Chapter 1

Skalarne funkcije više promenljivih

Sa stanovišta primene, fizičke veličine koje možemo predstaviti pomoću funkcija mogu biti skalarne i vektorske. Skalarne veličine se mogu potpuno izraziti brojnom vrednošću (masa, dužina, vreme, rad, energija, itd.), dok se vektorske veličine iskazuju vektorima (brzina, ubrzanje, sila, itd.).

1.1 Skalarne funkcije

Definicija 1.1.1 *Realna funkcija n realnih promenljivih je preslikavanje skupa $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, u skup $\mathbb{R}$, tj. podskup Dekartovog proizvoda $D \times \mathbb{R}$ u kome se svaki element iz D pojavljuje tačno jedanput kao prva komponenta.*

Skup D se naziva domen funkcije, a vrednost funkcije f u tački $(x_1, \dots, x_n) \in D$ se zapisuje $f(x_1, \dots, x_n)$. Pišemo i

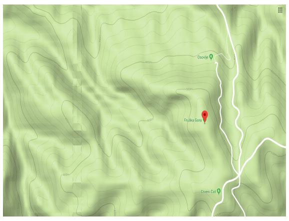
$$\boxed{f = f(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n}$$

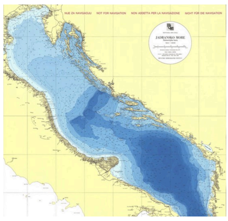
ili

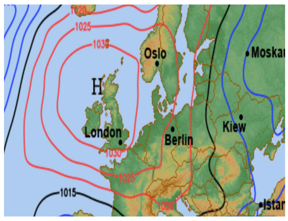
$$f : D \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

Za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$, jednačinom $f(x_1, \dots, x_n) = c$ je zadata nivo površ funkcije f. U slučaju $n = 2$ nivo površ se naziva i nivo kriva.

Sličan pojam, izolinije, se koristi prilikom kreiranja geografskih karata. Izolinije (grč. isos = jednak) su linije koje na geografskim kartama spajaju tačke u kojima neka pojava ima jednake vrednosti. Neki karakteristični primeri izolinija su:







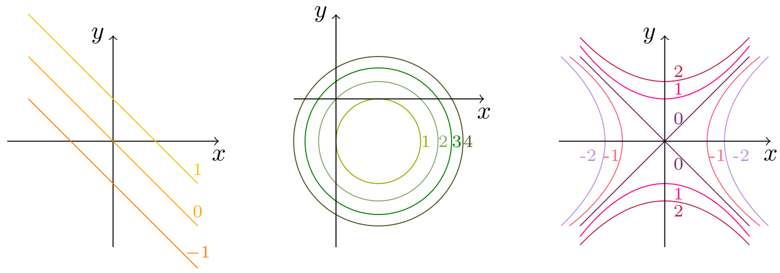
- izohipse (grč. hypsos = visina) - krive koje na geografskim kartama povezuju mesta iste nadmorske visine. U delovima gde je mreža izohipsi gusta, u prirodi je područje strmo;
- izobate (grč. batos=dubina) - krive koje na geografskim kartama spajaju mesta jednake dubine;
- izobare (grč. baros = težina) - krive koje na kartama povezuju mesta istog vazdušnog pritiska.

Primer 1.1.1 *Skicirati nivo krive sledećih funkcija*

(i) $z = x + y$

(ii) $z = (x-1)^2 + (y+1)^2$

(iii) $z = x^2 - y^2$.



(a) (b) (c)

Figure 1.1: Primeri nivo krivih

Rešenje.

(i) Na Slici 1.1(a) su skicirane nivo krive za $z = -1, 0, 1$.

(ii) Na Slici 1.1(b) su skicirane nivo krive za $z = 1, 2, 3, 4$.

(iii) Na Slici 1.1(c) su skicirane nivo krive za $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

□

1.2 Granična vrednost i neprekidnost

Neka je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je M_1 tačka nagomilavanja skupa D.

Definicija 1.2.1 *Kažemo da je $A \in \mathbb{R}$ granična vrednost funkcije f kad M teži M_1 ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r = r(\epsilon) > 0)(\forall M \in D \setminus \{M_1\})\ d(M, M_1) < r \Rightarrow d(f(x, y), A) < \epsilon$$

i pišemo

$$\lim_{M \to M_1} f(M) = A.$$

Primer 1.2.1 *Neka je*

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & , \textit{ ako je } (x, y) \neq (2, 5) \\ 1 & , \textit{ ako je } (x, y) = (2, 5) \end{cases}$$

Granična vrednost funkcije f kad M teži $(2, 5)$ jednaka je $A = 7$. $\square$

Definicija 1.2.2 *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je neprekidna u unutrašnjoj tački $M_1 \in D$ ako je*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r = r(\epsilon) > 0)(\forall M \in D)\ d(M, M_1) < r \Rightarrow d(f(M), f(M_1)) < \epsilon$$

Znači, tri uslova moraju biti zadovoljena:

(*i*) $\lim_{M \to M_1} f(M) = A$, tj. postoji granična vrednost kada $M \to M_1$;

(*ii*) postoji $f(M_1)$, tj. f je definisana u tački M_1;

(*iii*) $A = f(M_1)$.

Definicija 1.2.3 *Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački iz D.*

Primer 1.2.2 *Funkcija f u Primeru 1.2.1 ima otklonjiv prekid u tački $(2, 5)$. Moguće je definisati funkciju g koja ima jednake vrednosti kao f u svim tačkama domena osim u tački $(x, y) = (2, 5)$. Funkcija g je definisana sa*

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y & , \textit{ ako je } (x, y) \neq (2, 5) \\ 7 & , \textit{ ako je } (x, y) = (2, 5) \end{cases}$$

i neprekidna je u $\mathbb{R}^2$. $\square$

1.3 Diferencijalni račun funkcije dve promenljive

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ funkcija dve promenljive i neka je ona zadata jednačinom

$$z = f(x, y).$$

Parcijalni izvodi prvog reda. Neka je (x_1, y_1) unutrašnja tačka skupa D. Zavisnost funkcije z od dva argumenta direktno indukuje postojanje dve vrste prvih parcijalnih izvoda, po promenljivoj x i po promenljivoj y.

Definicija 1.3.1 *Ako postoji granična vrednost*

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x}}$$

onda tu graničnu vrednost nazivamo parcijalni izvod prvog reda funkcije f po promenljivoj x u tački (x_1, y_1) i označavamo je sa $\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x}$ ili $f_x(x_1, y_1)$.

Ako postoji

$$\boxed{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)}{\Delta y}}$$

onda tu graničnu vrednost nazivamo parcijalni izvod prvog reda funkcije f po promenljivoj y u tački (x_1, y_1) i označavamo je sa $\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y}$ ili $f_y(x_1, y_1)$.

Primer 1.3.1 *Neka je $z = x^2 - 3y^3$. Odrediti, po definiciji, parcijalne izvode prvog reda funkcije z u tački* $(1, 1)$.

Rešenje. Primenom definicije dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} z_x(1,1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 3 - 1 + 3}{\Delta x} = 2 \\ z_y(1,1) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1 - 3(1+\Delta y)^3 - 1 + 3}{\Delta x} = -9 \end{aligned}$$

□

Primer 1.3.2 *Neka je $f(x, y) = x^2y^3$. Odrediti parcijalne izvode prvog reda funkcije z.*

Rešenje. Iz definicije možemo direktno zaključiti da, kada se traži parcijalni izvod po x, smatra se da je y konstanta. Slično, kada se traži parcijalni izvod po y, smatra se da je x konstanta.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x^2)'y^3 = 2xy^3 \\ f_y(x,y) &= x^2(y^3)' = 3x^2y^2 \end{aligned}$$

$\square$

Izvod u pravcu. Direktno uopštenje prvih parcijalnih izvoda jeste izvod u funkcije u datom pravu.

Definicija 1.3.2 *Neka je $z = f(x, y)$ i neka je $\vec{s}_0 = (s_1, s_2)$ jedinični vektor. Izvod funkcije z u pravcu vektora $\vec{s}_0$ u tački (x_1, y_1) je*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{s}_0}(x_1, y_1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + ts_1, y_1 + ts_2) - f(x_1, y_1)}{t}}$$

Iz prethodne definicije direktno sledi da za $\vec{s}_0 = \vec{\imath}$ i $\vec{s}_0 = \vec{\jmath}$ redom dobijamo prve parcijalne izvode funkcije z po x i y.

Totalni diferencijal funkcije dve promenljive. Neka je $z = f(x, y)$ $(x, y) \in D$ i neka je D otvoren skup.

Totalni priraštaj funkcije z u tački $(x_1, y_1) \in D$ je

$$\Delta z(x_1, y_1) = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)$$

za priraštaje argumenata Δx i Δy.

Definicija 1.3.3 *Funkcija $z = f(x, y)$ je diferencijabilna u tački $(x_1, y_1) \in D$ ako se njen totalni priraštaj u toj tački može napisati u obliku*

$$\Delta z(x_1, y_1) = A(x_1, y_1)\Delta x + B(x_1, y_1)\Delta y + C(\Delta x, \Delta y)$$

gde je

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{C(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Teorema 1.3.1 *Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački (x_1, y_1), onda postoje parcijalni izvodi prvog reda $f_x(x_1, y_1)$ i $f_y(x_1, y_1)$ i važi*

$$\Delta z(x_1, y_1) = f_x(x_1, y_1)\Delta x + f_y(x_1, y_1)\Delta y + C(\Delta x, \Delta y).$$

Ako je funkcija diferencijabilna, onda je ona i neprekidna.

Teorema 1.3.2 *Ako u okolini tačke (x_1, y_1) funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda, onda je ona u toj tački diferencijabilna.*

Definicija 1.3.4 *Neka je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna na D i neka je $\Delta x = dx$ i $\Delta y = dy$. Totalni diferencijal funkcije z u tački $(x_1, y_1) \in D$ je*

$$\boxed{dz(x_1, y_1) = f_x(x_1, y_1)dx + f_y(x_1, y_1)dy.}$$

Teorema 1.3.3 *Neka su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ funkcije dve promenljive čiji parcijalni izvodi prvog reda $P_y(x, y)$ i $Q_x(x, y)$ su neprekidne funkcije na D. Tada postoji funkcija $z = f(x, y)$ čiji totalni diferencijal je*

$$dz(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ako i samo ako važi

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

za sve $(x, y) \in D$.

Primer 1.3.3 *Odrediti funkciju $z = f(x, y)$ čiji totalni diferencijal je oblika*

$$dz(x, y) = \left(6xy^3 + 5\right) dx + \left(9x^2y^2 + 6\right) dy.$$

Rešenje. Primetimo prvo da za $P(x, y) = 6xy^3 + 5$ i $Q(x, y) = 9x^2y^2 + 6$ važi

$$P_y(x, y) = 18xy^2 = Q_x(x, y).$$

Prema prethodnom tvrđenju, postoji funkcija $z = f(x, y)$ sa osobinom

$$dz(x, y) = \left(6xy^3 + 5\right) dx + \left(9x^2y^2 + 6\right) dy.$$

To znači da funkcija z zadovoljava sledeći sistem jednačina:

$$f_x(x, y) = 6xy^3 + 5 \quad \text{i} \quad f_y(x, y) = 9x^2y^2 + 6. \tag{1.1}$$

Iz prve jednačine (integracijom po x) dobijamo

$$f(x, y) = 3x^2y^3 + 5x + \varphi(y). \tag{1.2}$$

Ako dobijenu jednačinu sada diferenciramo po y, onda je $f_y(x, y) = 9x^2y^2 + \varphi'(y)$. Zamenom $f_y(x, y)$ u drugu jednačinu sistema (1.1), dobijamo

$$9x^2y^2 + \varphi'(y) = 9x^2y^2 + 6 \Leftrightarrow \varphi'(y) = 6 \Leftrightarrow \varphi(y) = 6y + C$$

odakle zamenom u (1.2) dobijamo $f(x, y) = 3x^2y^3 + 5x + 6y + C$. □

Teorema 1.3.4 *Neka su $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ i $R = R(x,y,z)$ funkcije tri promenljive čiji parcijalni izvodi prvog reda $P_y(x,y,z)$, $P_z(x,y,z)$ $Q_x(x,y,z)$, $Q_z(x,y)$, $R_x(x,y,z)$ i $R_y(x,y,z)$ su neprekidne funkcije na otvorenom skupu D. Tada postoji funkcija $F = F(x,y,x)$ čiji totalni diferencijal je*

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

ako i samo ako važe sledeća tri uslova:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)\\ \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z)\\ \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)\end{aligned}$$

za sve $(x,y,z) \in D$.

Primer 1.3.4 *Odrediti funkciju $F = F(x,y,z)$ čiji totalni diferencijal je oblika*

$$dF(x,y,z) = (2x+2)\,dx + (2y+2)\,dy + (2z+2)\,dz.$$

Rešenje. Primetimo prvo da je $P_y = P_z = Q_x = Q_z = R_x = R_y$ i da je ispunjen uslov za postojanje funkcije F sa osobinom

$$F_x(x,y,z) = 2x+2 \quad \text{i} \quad F_y(x,y,z) = 2y+2 \quad \text{i} \quad F_z(x,y,z) = 2z+2. \tag{1.3}$$

Ako prvi uslov integralimo po x, dobijamo

$$F(x,y,z) = x^2 + 2x + \varphi(y,z). \tag{1.4}$$

Prvi parcijalni izvod po y je onda $F_y(x,y,z) = \varphi_y(y,z)$. Ako dobijeni izraz izjednačimo sa drugim uslovom iz (1.3), a zatim integralimo po y, dobijamo

$$\varphi_y(y,z) = 2y+2 \Leftrightarrow \varphi(y,z) = y^2 + 2y + \psi(z). \tag{1.5}$$

Iz (1.4) i (1.5) sada sledi

$$F(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 + 2y + \psi(z).$$

Prvi parcijalni izvod dobijene funkcije F po z je $F_z(x,y,z) = \psi'(z)$. Izjednačavanjem sa trećim uslovom iz (1.3), dobijamo

$$\psi'(z) = 2z+2 \Leftrightarrow \psi(z) = z^2 + 2z + C,$$

odakle je konačno $F(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 + 2z + C$. □

1.3.1 Geometrijska interpretacija.

U nastavku dajemo geometrijsku interpretaciju za parcijalne izvode prvog reda po x i y, totalni diferencijal prvog reda i izvod u pravcu.
Parcijalni izvod prvog reda po x.
Neka je C_x kriva koja se nalazi u preseku ravni $y = y_1$ i grafika funkcije $z = f(x, y)$. Parcijalni izvod prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ po x u tački $(x_1, y_1) \in D$ predstavlja koeficijent pravca tangente u tački (x_1, y_1) na krivu C_x :

$$\mathrm{tg}(\angle EAB) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_1).$$

Odatle direktno sledi

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_1) = \frac{BE}{\Delta x} \quad \text{tj.} \quad BE = \frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_1) \cdot \Delta x.$$

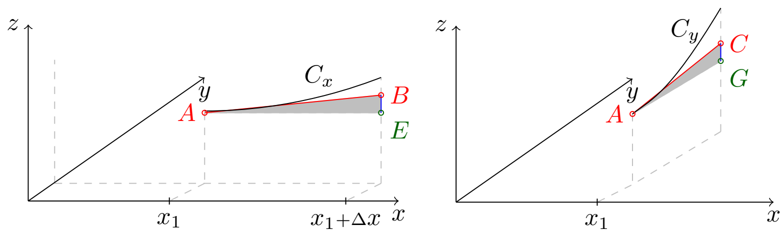
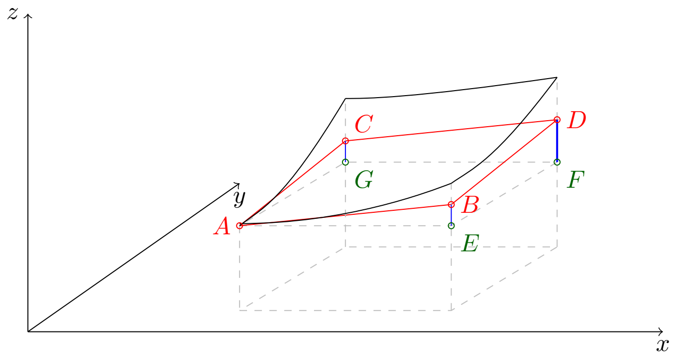


Figure 1.2: Geometrijska interpretacija $z_x(x_1, y_1)$ i $z_y(x_1, y_1)$.

Parcijalni izvod prvog reda po y.
Neka je C_y kriva koja se nalazi u preseku ravni $x = x_1$ i grafika funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Parcijalni izvod prvog reda funkcije f po y u tački (x_1, y_1) predstavlja koeficijent pravca tangente u tački (x_1, y_1) na krivu C_y :

$$\mathrm{tg}(\angle GAC) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_1, y_1) \quad \text{i} \quad GC = \frac{\partial z}{\partial y}(x_1, y_1) \cdot \Delta y.$$



Totalni diferencijal prvog reda.
Posmatrajmo sada ravan koja sadrži tačke A, B, C i D. Kako su (vezani) vekotri $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ koplanarni (leže u istoj ravni), njihov mešoviti proizvod je jednak nuli. Primetimo prvo da je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (AE, 0, EB) = (dx, 0, z_x dx) \\
\overrightarrow{AC} &= (0, AG, GC) = (0, dy, z_y dy) \\
\overrightarrow{AD} &= (AE, EF, FD) = (dx, dy, FD)
\end{aligned}$$

Odatle sledi, za $(dx, dy) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} dx & 0 & z_x dx \\ 0 & dy & z_y dy \\ dx & dy & FD \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad FD = z_x dx + z_y dy \\
&\Leftrightarrow \quad FD = dz
\end{aligned}$$

Izvod u pravcu. Neka je $\vec{s}_0 = (s_1, s_2)$ (na slici (a) je to $\overrightarrow{A'Q'}$). Pored toga, neka je $C_{\vec{s}_0}$ kriva koja se nalazi u preseku grafika funkcije i ravni koja sadrži vektor $\vec{s} = \overline{A'F'} = t \cdot \vec{s}_0$ i normalna je na xy-ravan. Izvod u pravcu vektora $\vec{s}_0$ predstavlja koeficijent pravca tangente u tački (x_1, y_1) na krivu $C_{\vec{s}_0}$:

$$\operatorname{tg}(\angle FAD) = \frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0}(x_1, y_1) \qquad\qquad FD = \frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0}(x_1, y_1) \cdot |\vec{s}|.$$

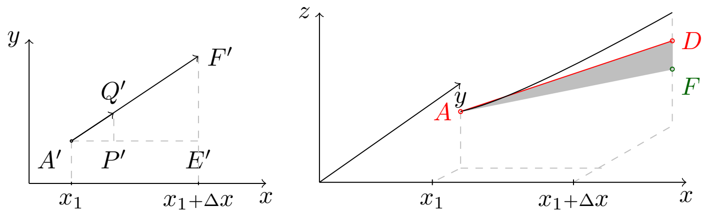
Ako iskoristimo da je $FD = dz$ i $|\vec{s}_0| = 1$, možemo dalje izvesti sledeće:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0}(x_1, y_1) &= \frac{dz}{|\vec{s}|} = \frac{f_x(x_1, y_1)dx + f_y(x_1, y_1)dy}{|\vec{s}|} \\
&= f_x(x_1, y_1)\frac{dx}{|\vec{s}|} + f_y(x_1, y_1)\frac{dy}{|\vec{s}|} \\
&= f_x(x_1, y_1)\frac{A'E'}{A'F'} + f_y(x_1, y_1)\frac{E'F'}{A'F'} \\
&= f_x(x_1, y_1)\frac{A'P'}{|\vec{s}_0|} + f_y(x_1, y_1)\frac{P'Q}{|\vec{s}_0|} \\
&= f_x(x_1, y_1) \cdot s_1 + f_y(x_1, y_1) \cdot s_2 \\
&= (f_x(x_1, y_1), f_y(x_1, y_1)) \cdot (s_1, s_2) = \nabla f(x_1, y_1) \cdot \vec{s}_0.
\end{aligned}$$

Znači,

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0}(x_1, y_1) = \nabla f(x_1, y_1) \cdot \vec{s}_0.}$$

Napomena: ∇ je simbolički operator definisan sa $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$. Primenjen na skalarnu funkciju f daje vektorsku funkciju $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ koji se još naziva i gradijent funkcije f.



Parcijalni izvodi i totalni defirencijali višeg reda. Parcijalni izvodi prvog reda funkcije $z = f(x, y)$, ako postoje, su funkcije koje zavise od dve promenljive. Ako te funkcije imaju svoje parcijalne izvode prvog reda, onda su to parcijalni izvodi drugog reda. Tako slično kao za funkciju jedne promenljive, parcijalne izvode reda n za $n \geq 2$ definišemo induktivno kao parcijalne izvode prvog reda parcijalnih izvoda reda $n-1$.

Definicija 1.3.5 *Ako postoje parcijalni izvodi prvog reda funkcija* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *na otvorenom skupu* D*, onda te izvode nazivamo drugi parcijalni izvodi i označavamo* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *(ili* f_{xx}*),* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *(*f_{yx}*),* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *(ili* f_{yy}*) i* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *(ili* f_{xy}*). Važi*

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & = & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{array}}$$

Teorema 1.3.5 *Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *u nekoj okolini tačke* (x_1, y_1) *i neprekidni su u tački* (x_1, y_1)*, onda su oni i jednaki u toj tački, tj. važi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1).$$

Ako funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u okolini tačke (x_1, y_1), onda možemo definisati totalni diferencijal drugog reda funkcije f kao totalni diferencijal prvog reda od totalnog diferencijala prvog reda funkcije f. Ako uvedemo oznake $dx^2 = (dx)^2$ i $dy^2 = (dy)^2$, onda je

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

ili kraće, simbolički,

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f.$$

Slično se dobija i totalni diferencijal reda n ($n \geq 2$):

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f.$$

1.4 Izvod složene funkcije

Teorema 1.4.1 *Neka je funkcija $f = f(x, y)$ diferencijabilna i $x = x(t), y = y(t)$, $t \in D$. Tada važi*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{1.6}$$

Primer 1.4.1 *Odrediti prvi izvod funkcije $z = \sqrt{e^{2t} + \sin t} + e^t + 2\sin t$*

Rešenje. Uvedimo smenu $x(t) = e^t$ i $y(t) = \sin t$. Tada je

$$z(t) = \sqrt{(x(t))^2 + y(t)} + x(t) + 2y(t).$$

Primenom lančanog pravila (1.6), dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{x(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + y(t)}} + 1\right) \cdot e^t + \left(\frac{1}{2\sqrt{(x(t))^2 + y(t)} + 2} + 2\right) \cdot \cos t$$

□

Neka je funkcija $f = f(u, v)$, $(u, v) \in D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ i $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, gde je $(u, v) : D \to D_1$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako f ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda po u i v, a u i v imaju parcijalne izvode prvog reda po x i y, tada važi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.8}$$

Primer 1.4.2 *Neka je data funkcija $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$, gde je $x = \frac{u^2 - v^2}{2}$ i $y = uv$. Odrediti z_u i z_v.*

Rešenje.

1. način: Primetimo prvo da su parcijalni izvodi prvog reda datih funkcija oblika

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y \quad \frac{\partial x}{\partial u} = u \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -v \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Koristeći lančana pravila (1.7) i (1.8), dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= 2x(u,v)\cdot u + y(u,v)\cdot v = 2\cdot\frac{u^2-v^2}{2}\cdot u + uv^2 = u^3\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= 2x(u,v)\cdot(-v) + y(u,v)\cdot u = 2\cdot\frac{u^2-v^2}{2}\cdot(-v) + u^2v = v^3
\end{aligned}$$

2. način: Ako zamenimo izraze koji definišu funkcije x i y u izraz za z, dobijamo

$$z(u,v) = \frac{(u^2-v^2)^2}{4} + \frac{1}{2}u^2v^2 = \frac{1}{4}(u^4+v^4).$$

Sada je

$$z_u(u,v) = u^3 \quad \text{i} \quad z_v(u,v) = v^3.$$

□

1.5 Implicitno zadate funkcije

Neka je $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Kažemo da je jednačinom

$$\boxed{F(x,y,z) = 0}$$

implicitno zadata funkcija $z = f(x,y)$ ako je z jedinstvena funkcija sa osobinom da za svaki element (x,y) nekog skupa $\emptyset \neq D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ važi

$$F(x,y,z(x,y)) = 0 \text{ i } (x,y,z(x,y)) \in D.$$

Teorema 1.5.1 *Neka je funkcija $z = f(x,y)$ data implicitno jednačinom*

$$F(x,y,z) = 0$$

za koju postoje parcijalni izvodi F_x, F_y i važi $F_z(x_1,y_1,z(x_1,y_1)) \neq 0$ za svako $(x_1,y_1) \in D_1$ Tada je

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1) = -\frac{F_x(x_1,y_1,z_1)}{F_z(x_1,y_1,z_1)} \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1) = -\frac{F_y(x_1,y_1,z_1)}{F_z(x_1,y_1,z_1)}}$$

$(z_1 = f(x_1,y_1))$

Dokaz. Ako je $F(x,y,z)=0$ onda je $dF(x,y,z)=0$. U jednačinu

$$dF=0 \quad \text{tj.} \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

ćemo uvrstiti

$$dz = f_x dx + f_y dy.$$

Tako dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} & 0 = F_x dx + F_y dy + F_z(f_x dx + f_y dy) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = (F_x + F_z f_x)dx + (F_y + F_z f_y)dy \\ \Leftrightarrow\ & F_x + F_z f_x = 0 \wedge F_y + F_z f_y = 0 \end{aligned}$$

Odatle je, u slučaju kada je $F_y(x_1,y_1,z(x_1,y_1)) \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1) = -\frac{F_x(x_1,y_1,z_1)}{F_z(x_1,y_1,z_1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1) = -\frac{F_y(x_1,y_1,z_1)}{F_z(x_1,y_1,z_1)}.$$

□

Primer 1.5.1 *Neka je funkcija $z=f(x,y)$ data implicitno jednačinom*

$$x^2y + 2x^2yz + \sin z - 1 = 0. \tag{1.9}$$

Izračunati $z_x(1,1)$ i $z_y(1,1)$.

Rešenje. Izračunaćemo prvo vrednost funkcije $z(1,1)$. Zamenom vrednosti $(x,y)=(1,1)$ u jednačinu (1.9), dobijamo

$$2z + \sin z = 0 \Leftrightarrow \sin z = -2z \Leftrightarrow z = 0.$$

(Treba primetiti da je $(z,u)=(0,0)$ jedina presečna tačka grafika funkcija $u=\sin z$ i $u=-2z$.)

Diferenciranjem jednačine (1.9) redom po x i po y, dobijamo

$$2xy + 4xyz + 2x^2yz_x + z_x\cos z = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + 2x^2z + 2x^2yz_y + z_y\cos z = 0.$$

Odatle je

$$z_x = -\frac{2xy+4xyz}{2x^2y+\cos z} \qquad \text{i} \qquad z_y = -\frac{x^2+2x^2z}{2x^2y+\cos z}$$

Sada je

$$z_x(1,1) = -\frac{2}{3} \qquad \text{i} \qquad z_y(1,1) = -\frac{1}{3}.$$

□

1.6 Tangentna ravan

Funkcija data eksplicitno Neka je površ S zadata eksplicitno jednačinom $z = f(x, y)$ i neka $(x_1, y_1, z_1) \in S$, gde je $z_1 = z(x_1, y_1)$. Tangentna ravan na površ S u tački $(x_1, y_1, z_1) \in S$ je ravan koja je određena tangentama na krive koje leže na površi i sadrže tačku (x_1, y_1, z_1). Jednačina ravni koja sadrži tačku (x_1, y_1, z_1) je oblika

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$z = -\frac{A}{C}(x - x_1) - \frac{B}{C}(y - y_1) + z_1.$$

Ako je data ravan tangentna ravan u tački (x_1, y_1, z_1) na površ S, onda funkcija koja je definiše ima jednake prve parcijalne izvode kao i funkcija kojom je definisana površ, tj. važi

$$f_x(x_1, y_1) = -\frac{A}{C} \quad \text{i} \quad f_y(x_1, y_1) = -\frac{B}{C}.$$

Znači, jednačina tangentne ravni na površ u tački (x_1, y_1) je oblika

$$\boxed{z - z_1 = f_x(x_1, y_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y - y_1)}$$

Prethodna jednačina je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} & f_x(x_1, y_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y - y_1) - (z - z_1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (f_x(x_1, y_1), f_y(x_1, y_1), -1) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (f_x(x_1, y_1), f_y(x_1, y_1), -1) \perp (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \end{aligned}$$

Tako zaključujemo da je $\vec{n} = (f_x(x_1, y_1), f_y(x_1, y_1), -1)$ vektor normale tangentne ravni.

Funkcija data implicitno Ako je površ data implicitno, jednačinom $F(x, y, z) = 0$, onda za prethodnu jednačinu tangentne ravni na S u tački (x_1, y_1, z_1) za koju je $F_z(x_1, y_1, z_1) \neq 0$ važi sledeće:

$$\begin{aligned} & z - z_1 = f_x(x_1, y_1)(x - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y - y_1) \\ \Leftrightarrow\ & z - z_1 = -\frac{F_x(x_1, y_1, z_1)}{F_z(x_1, y_1, z_1)}(x - x_1) - \frac{F_y(x_1, y_1, z_1)}{F_z(x_1, y_1, z_1)}(y - y_1). \end{aligned}$$

Jednačina tangentne ravni je sada oblika

$$\boxed{(F_x(x_1, y_1, z_1), F_y(x_1, y_1, z_1), F_z(x_1, y_1, z_1)) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0}$$

i važi

$$(F_x(x_1,y_1,z_1),F_y(x_1,y_1,z_1),F_z(x_1,y_1,z_1)) \perp (x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$

što znači da je vekotr normale tangentne ravni

$$\vec{n} = (F_x(x_1,y_1,z_1),F_y(x_1,y_1,z_1),F_z(x_1,y_1,z_1)).$$

Primer 1.6.1 *Odrediti jednačinu tangentne ravni na površ datu jednačinom* $x^2+y^2+z^2=30$ *u tački* $(1,-2,z_1)$ *u kojoj je* $z_1>0$.

Rešenje. Ako uvrstimo $(1,-2)$ u jednačinu površi, za $z_1>0$, dobijamo

$$z_1=\sqrt{30-1-4}=5.$$

Normala na tangentnu ravan u tački $(1,-2,5)$ je

$$(F_x(1,-2,5),F_y(1,-2,5),F_z(1,-2,5))=(2,-4,10).$$

Jednačina tangentne ravni je sada jednačina ravni koja sadrži tačku sa radijus vektorom $\vec{r}_0=(1,-2,5)$, a čija normala je $\vec{n}=(2,-4,10)$:

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0 \Leftrightarrow 2(x-1)-4(y+2)+10(z-5)=0 \Leftrightarrow 2x-4y+10z-60=0.$$

□

Geometrijska interpretacija gradijenta

Funkcija data eksplicitno Neka je površ data eksplicitno jednačinom $z=f(x,y)$ i neka je jednačina tangentne ravni u (x_1,y_1,z_1) data sa

$$z-z_1=f_x(x_1,y_1)(x-x_1)+f_y(x_1,y_1)(y-y_1).$$

Ako za datu površ i njenu tangentnu ravan posmatramo nivo krive dobijene za $z=z_1$, onda je

$$\begin{aligned} & f_x(x_1,y_1)(x-x_1)+f_y(x_1,y_1)(y-y_1)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (f_x(x_1,y_1),f_y(x_1,y_1))\cdot(x-x_1,y-y_1)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (f_x(x_1,y_1),f_y(x_1,y_1))\perp(x-x_1,y-y_1) \\ \Leftrightarrow\quad & \nabla f(x_1,y_1)\perp(x-x_1,y-y_1). \end{aligned}$$

To znači da gradijent funkcije $z=f(x,y)$ u tački (x_1,y_1) predstavlja vektor normale na nivo krivu površi za koju je $z=f(x_1,y_1)$ u tački (x_1,y_1).

Funkcija data implicitno Neka je površ data implicitno jednačinom $F(x,y,z)=0$ i tangentna ravna je data sa

$$(F_x(x_1,y_1,z_1),F_y(x_1,y_1,z_1),F_z(x_1,y_1,z_1)) \perp (x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$

odakle je

$$\nabla F(x_1,y_1,z_1)\perp(x-x_1,y-y_1,z-z_1).$$

To znači da je tada gradijent funkcije $F=F(x,y,z)$ u tački (x_1,y_1,z_1) normalan na tangentnu ravan nivo površi funkcije F za koju je $F(x,y,z)=0$.

1.7 Relativne ekstremne vrednosti

U ovom poglavlju ćemo predstaviti relativne ekstremne vrednosti funkcija više promenljivih. Nakon navođenja osnovnih pojmova i uvođenja potrebnih i dovoljnih uslova za postojanje relativnih ekstremnih vrednosti, pokazaćemo na čega se ti rezultati svode u slučaju funkcije dve promenljve.

1.7.1 Funkcije više promenljivih

Neka je $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.7.1 *Funkcija f ima (strogi) relativni tj. lokalni maksimum u tački $(a_1, \ldots, a_n) \in D^o$ ako postoji $\epsilon > 0$ takvo da za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ sa osobinom $0 < |\Delta x_i| < \epsilon$, važi*

$$f(a_1, \ldots, a_n) > f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) \quad \textit{tj.} \quad \Delta f(x_1, \ldots, x_n) < 0.$$

Definicija 1.7.2 *Funkcija f ima (strogi) relativni tj. lokalni minimum u tački $(a_1, \ldots, a_n) \in D^o$ ako postoji $\epsilon > 0$ takvo da za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ sa osobinom $0 < |\Delta x_i| < \epsilon$, važi*

$$f(a_1, \ldots, a_n) < f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) \quad \textit{tj.} \quad \Delta f(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$

Sledeće tvrđenje daje potrebne uslove za postojanje ekstremnih vrednosti funkcije.

Teorema 1.7.1 *Ako u tački $A(a_1, \ldots, a_n) \in D^o$ postoje parcijalni izvodi prvog reda funkcije f i f ima ekstremnu vrednost u tački A, onda je*

$$\boxed{f_{x_1}(A) = 0 \quad \ldots \quad f_{x_n}(A) = 0.}$$

To znači da je gradijent $\nabla f(A) = 0$, odnosno da je totalni diferencijal prvog reda $df(A) = 0$.

Teorema 1.7.2 *Neka je $A(a_1, \ldots, a_n) \in D^o$ stacionarna tačka funkcije f.*

(i) Ako je $d^2 f(A) < 0$, $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, funkcija f ima relativni maksimum u tački A.

(ii) Ako je $d^2 f(A) > 0$, $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, funkcija f ima relativni minimum u tački A.

(iii) Ako $d^2 f(A)$ menja znak za razne vrednosti $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, funkcija f nema ni relativni minimum ni relativni maksimum u tački A.

Dokaz: Neka je $d\vec{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$. Ako funkciju f u tački A aproksimiramo Tejlorovim polinomom drugog reda, onda je

$$f(A + d\vec{x}) \approx f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2(A) \Leftrightarrow \Delta f(A) \approx df(A) + \frac{1}{2}d^2(A)$$

To znači da u slučaju kada je A stacionarna tačka dobijamo

$$\Delta f(A) \approx \frac{1}{2}d^2 z(A)$$

Odatle zaključujemo da se u stacionarnim tačkama znak priraštaja funkcije ponaša isto kao znak totalnog diferencijala prvog reda posmatrane funkcije. □

1.7.2 Heseova matrica

Za simetričnu kvadratnu matricu A reda n kažemo da je pozitivno definitna ako je vrednost $(\vec{x})^T A\vec{x}$ strogo pozitivna za sve vektore $(\vec{x})^T = [x_1\ x_2 \dots x_n] \neq [0\ 0 \dots 0]$. Ako je ta vrednost nenegativna onda kažemo da je A pozitivno semi-definitna. Slično se definišu negativno definitna i negativno semi-definitna matrica.

Prilikom rešavanja optimizacionih problema ili opisivanja grafika funkcije više promenljivih često se koristi Heseova matrica, uz pomoć koje se može odrediti totalni diferencijal drugog reda.

Definicija 1.7.3 *Neka je $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, i neka su neprekidni svi njeni parcijalni izvodi drugog reda na D. Tada je Heseova matrica (ili Hesijan) funkcije f kvadratna matrica reda n definisana sa*

$$\boxed{H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \end{bmatrix}.}$$

Možemo primetiti da se totalni deferencijal drugog reda funkcije F može predstaviti uz pomoć Heseove matrice na sledeći način:

$$d^2 f = [dx_1\ dx_1\ \dots dx_n] \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_2x_1} & \dots & f_{x_nx_1} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_nx_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_1x_n} & f_{x_2x_n} & \dots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

tj. u tački A je

$$\boxed{d^2 f(A) = (d\vec{x})^T \cdot H(f(A)) \cdot d\vec{x}}$$

gde je sa $(d\vec{x})^T$ označen vektor $[dx_1\ dx_2 \ldots dx_n]$.

Neka funkcija $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u stacionarnoj tački A.

(i) Ako je $H(f(A))$ pozitivno definitna kada je $d\vec{x} \neq \vec{0}$, onda f u A ima strogi lokalni minimum,

(ii) Ako je $H(f(A))$ negativno definitna kada je $d\vec{x} \neq \vec{0}$, , onda f u A ima strogi lokalni maksimum.

1.7.3 Funkcije dve promenljive

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima lokalnu ekstremnu vrednost u nekoj tački (x_1, y_1) onda je tangentna ravan na S u tački $(x_1, y_1, z(x_1, y_1))$ horizontalna tj. njena jednačina je oblika

$$z = z(x_1, y_1).$$

Ako su u toj tački definisani parcijalni izvodi prvog reda, onda su oni jednaki nuli. Tako zaključujemo da ekstremne vrednosti funkcije tražimo u tačkama u kojima nisu svi prvi parcijalni izvodi definisiani ili je totalni diferencijal prvog reda jednak nuli. Te tačke nazivamo kritičnima tačkama.

Definicija 1.7.4 *Neka je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka u tački $A(x_1, y_1) \in D^o$ postoje parcijalni izvodi provog reda funkcije z. Tačka A je stacionarna tačka funkcije f ako važe sledeća dva uslova:*

$$\boxed{f_x(x_1, y_1) = 0 \quad i \quad f_y(x_1, y_1) = 0.}$$

Teorema 1.7.3 *Ako postoje parcijalni izvodi prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ u tački $(x_1, y_1) \in D^o$ i z ima ekstremnu vrednost u tački (x_1, y_1), onda je (x_1, y_1) stacionarna tačka funkcije f.*

Dokaz: Pretpostavimo da z ima relativnu ekstremnu vrednost u tački (x_1, y_1). Tada i funkcije jedne promenljive g_1 i g_2 definisane sa $g_1(x) = f(x, y_1)$ i $g_2(y) = f(x_1, y)$ imaju relativne ekstremne vrednosti u $x = x_1$ odnosno $y = y_1$. Potrebni uslovi da g_1 i g_2 imaju relativne ekstremume u $x = x_1$ i $y = y_1$ su $g_1'(x_1) = 0$ i $g_2'(y_1) = 0$, respektivno. Odatle sledi da su $f_x(x_1, y_1) = 0$ i $f_y(x_1, y_1) = 0$. $\square$

Za funkciju dve promenljive možemo izvesti dovoljne uslove za postojanje ekstremnih vrednosti koristeći determinantu Hesijanove matrice, kao što je to predstavljeno u sledećem tvrđenju.

Teorema 1.7.4 *Neka je (x_1, y_1) stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$ koja ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda i neka je*

$$\begin{aligned} D_2(x_1, y_1) &= |H(z((x_1, y_1))| = \begin{vmatrix} z_{xx}(x_1, y_1) & z_{yx}(x_1, y_1) \\ z_{xy}(x_1, y_1) & z_{yy}(x_1, y_1) \end{vmatrix} \\ &= \left(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2\right)(x_1, y_1). \end{aligned}$$

(i) Ako je $D_2(x_1, y_1) > 0$ i $z_{xx}(x_1, y_1) < 0$ (ili $z_{yy} < 0$), funkcija z ima relativni maksimum u tački (x_1, y_1).

(ii) Ako je $D_2(x_1, y_1) > 0$ i $z_{xx}(x_1, y_1) > 0$ (ili z_{yy}), funkcija z ima relativni minimum u tački (x_1, y_1).

(iii) Ako je $D_2(x_1, y_1) < 0$ funkcija z nema ni relativni maksimum ni relativni minimum u tački (x_1, y_1). U ovom slučaju, tačka (a, b) se često naziva sedlastom tačkom.

Dokaz. Totalni diferencijal drugog reda funkcije z možemo transformisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} d^2z &= z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2 \\ &= dy^2\left(z_{xx}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 2z_{xy}\frac{dx}{dy} + z_{yy}\right). \end{aligned}$$

Kako je $dy^2 \geq 0$, to znači da d^2z ima isti znak kao i kvadratna funkcija

$$f(t) = z_{xx}t^2 + 2z_{xy}t + z_{yy}, \quad t = \frac{dx}{dy}.$$

Data kvadratna funkcija je strogo pozitivna ili strogo negativna jedino u slučaju kada je njena diskriminanta negativna tj.

$$z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy} < 0.$$

Ako je koeficijent z_{xx} uz t^2 pozitivan, onda f ima minimum i važi $f(t) > 0$, dok za negativno z_{xx} funkcija ima maksimum i važi $f(t) < 0$. □

Treba primetiti da prethodno tvrđenje ne daje odgovor za slučaj $D_2(x_1, y_1) = 0$ i u tom slučaju su neophodna dalja ispitivanja (npr. direktna primena definicije).

Primer 1.7.1 *Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisane sa*

$$z = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$

Rešenje. Da bismo odredili stacionarne tačke, neophodno je da odredimo tačke u kojima je gradijent jednak 0 tj. u kojima su parcijalni izvodi prvog reda jednaki 0.

$$\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - 3 \qquad & z_x &= 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \\ z_y &= 3y^2 - 12 \qquad & z_y &= 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow (y = 2 \vee y = -2) \end{aligned}$$

Tako smo dobili stacionarne tačke:

$$A(1,2) \quad B(1,-2) \quad C(-1,2) \quad D(-1,-2).$$

Odredićemo parcijalne izvode drugog reda i totalni diferencijal drugog reda:

$$z_{xx} = 6x \quad z_{xy} = z_{yx} = 0 \quad z_{yy} = 6y$$

$$d^2z(x,y) = 6xdx^2 + 6ydy^2.$$

Posmatraćemo vrednost totalnog diferencijala drugog reda u svakoj stacionarnoj tački:

(A) $d^2z(1,2) = 6dx^2 + 12dy^2 > 0$ za $(dx,dy) \neq (0,0) \Rightarrow z_{\min}(1,2) = -10$,

(B) $d^2z(1,2) = 6dx^2 - 12dy^2$ menja znak, odakle zaključujemo da z nema ekstremnu vrednost u B,

(C) $d^2z(1,2) = -6dx^2 + 12dy^2$ menja znak, odakle zaključujemo da z nema ekstremnu vrednost u C,

(D) $d^2z(-1,-2) = -6dx^2 - 6dy^2 < 0$ za $(dx,dy) \neq (0,0) \Rightarrow z_{\max}(-1,-2) = 55$.

□

1.8 Vezane (uslovne) ekstremne vrednosti

Uslovne ekstremne vrednosti su tačke u kojima funkcija

$$f = f(x_1,\dots,x_n), \quad (x_1,\dots,x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

ima lokalne ekstremne vrednosti, ali uz dodatne uslove da promenljive $(x_1,\dots,x_n) \in D$ zadovoljavaju ograničenja data jednačinama

$$g_j(x_1,\dots,x_n) = 0 \text{ za svako } j \in \{1,\dots,m\}$$

gde je $(x_1,\dots,x_n) \in D$.

Lagranžov metod množitelja. Jedan od najrasprostranjenijih metoda za određivanje vezanih ekstremnih vrednosti jeste Lagranžov metod množitelja.

Definicija 1.8.1 *Neka su $f, g_1, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ funkcije koje imaju neprekidne pracijalne izvode prvog reda na D. Lagranžova funkcija (ili Lagranžian) je funkcija $F : D \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}$ definisana sa*

$$\boxed{F(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1,\dots,x_n),}$$

gde su $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ realni parametri (tzv. Lagranžovi množitelji).

Teorema 1.8.1 *Neka su $f, g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ funkcije koje imaju neprekidne pracijalne izvode prvog reda na D. Ako funkcija f ima uslovnu ekstremnu vrednost u tački $A(a_1, \ldots, a_n)$, onda je*

$$F_{x_1}(A) = 0 \quad \ldots \quad F_{x_n}(A) = 0 \quad g_1(A) = 0 \quad \ldots \quad g_n(A) = 0$$

Za stacionarnu tačku A važe sledeće implikacije:

(i) ako je $d^2F(A) < 0$, $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, funkcija f ima uslovni maksimum u tački A;

(ii) ako je $d^2F(A) > 0$, $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, funkcija f ima uslovni minimum u tački A;

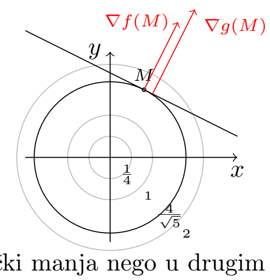
(iii) ako $d^2F(A)$ menja znak za razne vrednosti $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, funkcija f nema ni uslovni minimum ni uslovni maksimum u tačli A.

Primer 1.8.1 *Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $z = x^2 + y^2$ ako je $x + 2y = 4$.*

Rešenje. Pretpostavimo da postoji tačka $M(x_m, y_m)$ u kojoj funkcija $f(x, y) = x^2+y^2$ dostiže svoju lokalnu ekstremnu vrednost, pri čemu zadovoljava jednačinu $x + 2y = 4$ tj. $g(x, y) = 0$ (za $g(x, y) = x + 2y - 4$). Posmatrajući nivo krive, možemo primetiti da je M tačka u kojoj je data prava tangenta na nivo krivu $x^2 + y^2 = c$ ($c = f(M)$), tj. to je tačka u kojoj su gradijenti funkcija f i g paralelni.

To znači da postoji koeficijent proporcionalnosti $-\lambda$ i važi

$$\nabla f(x_m, y_m) = -\lambda \nabla g(x_m, y_m) \wedge x_m + 2y_m = 4$$



Rešenje datog sistema je

$$\begin{aligned} &(2x_m, 2y_m) = -\lambda(1, 2) \wedge x_m + 2y_m = 4 \\ \Leftrightarrow\ &\left(x_m = -\tfrac{\lambda}{2} \wedge y_m = -\lambda \wedge -5\lambda = 8\right) \\ \Leftrightarrow\ &\left(x_m = \tfrac{4}{5} \wedge y_m = \tfrac{8}{5} \wedge \lambda = -\tfrac{8}{5}\right) \end{aligned}$$

Kako je vrednost funkcije u dobijenoj stacionarnoj tački manja nego u drugim tačkama koje zadovoljavaju zadati uslov (što pokazuju nivo krive), funkcija f u tački M ima vezani lokalni minimum $f(M) = \frac{16}{5}$.

Primer 1.8.2 *Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije $z = xy^2z^3$ ako je $x + y + z = 6$ za $x, y, z > 0$.*

Rešenje. Lagranžova funkcija je oblika

$$F(x,y,z) = xy^2z^3 + \lambda(x+y+z-6)$$

odakle je

$$F_x(x,y,z) = y^2z^3 + \lambda \wedge F_y(x,y,z) = 2xyz^3 + \lambda \wedge F_z(x,y,z) = 3xy^2z^2 + \lambda.$$

Parcijalni izvodi drugog reda su elementi Hesijanove matrice

$$\begin{aligned} H(F(x,y,z)) &= \begin{bmatrix} F_{xx}(x,y,z) & F_{yx}(x,y,z) & F_{zx}(x,y,z) \\ F_{xy}(x,y,z) & F_{yy}(x,y,z) & F_{zy}(x,y,z) \\ F_{xz}(x,y,z) & F_{yz}(x,y,z) & F_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Na domenu $x,y,z>0$, stacionarne tačke su rešenja jednačine $\nabla F(x,y,z) = 0$ tj. rešenja sledećeg sistema jednačina:

$$\begin{array}{l} y^2z^3 + \lambda = 0 \\ 2xyz^3 + \lambda = 0 \\ 3xy^2z^2 + \lambda = 0 \\ x+y+z = 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y^2z^3 + \lambda = 0 \\ yz^3(2x-y) = 0 \,/ : {\scriptstyle yz^3 \neq 0} \\ y^2z^2(3x-z) = 0 \,/ : {\scriptstyle y^2z^2 \neq 0} \\ x+y+z = 6 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} y^2z^3 + \lambda = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \\ x+y+z = 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = -y^2z^3 \\ y = 2x \\ z = 3x \\ 6x = 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = -108 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ x = 1 \end{array}$$

Totalni diferencijal drugog reda funkcije F je

$$d^2F(x,y,z) = 2xz^3dy^2 + 6xy^2zdz^2 + 4yz^3dxdy + 6y^2z^2dxdz + 12xyz^2dydz$$

i njegova vrednost u stacionarnoj tački $A(1,2,3)$ je

$$d^2F(1,2,3) = 54dy^2 + 72dz^2 + 216dxdy + 216dydz + 216dxdz.$$

Diferenciranjem uslova $x+y+z=6$ dobijamo $dz = -dx - dy$ što zamenom u totalni diferencijal drugog reda daje

$$\begin{aligned} d^2F(1,2,3) &= 54dy^2 + 72(dx+dy)^2 + 216dxdy + 216dy(-dx-dy) \\ &\quad +216dx(-dx-dy) \\ &= -90dy^2 - 72dxdy - 144dx^2 = -90\left(dy^2 + \frac{4}{5}dxdy\right) - 144dx^2 \\ &= -90\left(dy + \frac{4}{10}dx\right)^2 - 108dx^2 \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je

$$d^2F(1,2,3) < 0, \quad (dx,dy,dz) \neq (0,0,0),$$

što znači da funkcija f u tački $(1,2,3)$ ima uslovni lokalni maksimum $f(1,2,3) = 108$.