Fakultet tehničkih nauka
Energetika, elektronika i telekomunikacije

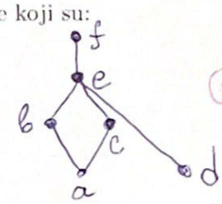
ALGEBRA
TEST - prvi deo

30. 11. 2024.
Novi Sad

Ime, prezime i broj indeksa: ИВАН П.

1. (2 boda) Na skupu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ data je binarna relacija $\rho = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,e), (a,f), (b,b), (b,e), (b,f), (c,c), (c,e), (c,f), (d,d), (d,e), (d,f), (e,e), (e,f), (f,f)\}$. Da li je ρ relacija poretka na skupu A? DA NE (zaokružiti jedno). Ako jeste, nacrtati Hasеov dijagram i naći elemente koji su:
   - minimalni: a, d
   - maksimalni: f
   - najmanji: /
   - najveći: f

(1)



(1)

2. (2 boda) Dati su skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$ i binarne relacije $f_1 = \{(a,1), (b,1), (c,1), (b,2)\}$, $f_2 = \{(a,2), (b,2), (c,3)\}$ i $f_3 = \{(a,3), (b,1), (c,2)\}$.
   - Koje od navedenih relacija f_i jesu funkcije skupa A u skup B, tj. $f_i : A \to B$? f_2 и f_3
   - Za one relacije f_i koje jesu funkcije pronaći C podskup od B takav da je $f_i : A \to C$ sirjektivno. (1)
     $f_2 : A \xrightarrow{НА} \{2,3\}$ $f_3 : A \xrightarrow{НА} B$
   - Koliko ima f_i funkcija takvih da $f_i : A \to B$? $3^3 = 27$
   - Koliko ima injektivnih f_i funkcija takvih da $f_i : A \to \{1, 2, 3, 4\}$? $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (1)

3. (2 boda) Date su funkcije $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   - Odrediti $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $h \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ i $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. (1)
   - Da li postoji h^{-1}? Obrazložiti odgovor. НЕ, h није ИНЈЕКТИВНА (1)

4. (2 boda) Neka je $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ proizvoljna Bulova algebra.
   - Proveriti tačnost izraza
     (a) $0' + 1' = (0 \cdot 1)'$ i (b) $(y + xy)(x + yx) = x + y$.

     $0' + 1' = 1 + 0 = 1$ (0.5)
     $(0 \cdot 1)' = 0' = 1$
     ТАЧНО ЈЕ.

     $(y + xy)(x + yx) = y \cdot x$
     $x + y \neq y \cdot x$ НИЈЕ ТАЧНО. (0.5)
   - Bulov izraz $(x(yz)')(z + x')'$ predstaviti u obliku DNF.

     $(x(yz)')(z + x')' = (x(y' + z'))z'x = (xy' + xz')xz' = xy'z' + xz'$
     $= xy'z' + x(y + y')z' = xy'z' + xyz' + \cancel{xy'z'}$ (1)

5. (2 boda) Zaokruži broj ispred struktura koja čine grupu. 2 – 1.5 – 1 – 0

   1. $(\mathbb{N}, +)$ 2. $(\mathbb{Q}, +)$ 3. $(\mathbb{Z}_4, +)$ 4. $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 5. $(\{f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_a(x) = ax, a \in \mathbb{R}\}, \circ)$

6. (2 boda) Pokazati ili opovrgnuti tačnost u proizvoljnom prstenu $(F, +, \cdot)$:
   (a) $(x + (-y))(z + 0) = xy + (-yz)$ i (b) $ax + b = ay + b \Rightarrow x = y$.

   $(x + (-y))(z + 0) = (x + (-y))z$
   $= xz + (-y)z = xz + (-yz)$
   НИЈЕ ТАЧНО. (1)

   $ax + b = ay + b \Rightarrow ax = ay$
   АЛИ $ax = ay$ НЕ ИМПЛИЦИРА $x = y$.
   Нпр. у $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ПРСТЕНУ (1)
   $2x = 2y$ ЈЕ ТАЧНО ЗА $x = 0$ и $y = 2$.

2

7. (2 boda) U polju kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3 - i = 0$.

$z^3 = i = e^{\pi/2 i} \Rightarrow z = \sqrt[3]{i} = e^{\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} i}, k \in \{0, 1, -1\}$ 1

$z \in \{e^{\pi/6 i}, e^{\frac{5\pi}{6} i}, e^{-\frac{3\pi}{6} i}\} = \{-i, e^{\pi/6 i}, e^{-\frac{5\pi}{6} i}\}$ 1

8. (2 boda) Definisati kompleksnu funkciju f koja predstavlja rotaciju kompleksne ravni oko broja $w = i$ za ugao $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$f(z) =$ $i + (z - i)e^{\pi/2 i}$ 2

9. (2 boda) Nad poljem $\mathbb{R}$ naći NZD za polinome $P(t) = t^3 + t^2 - t - 1$ i $Q(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2$.

$P(t) = t^2(t+1) - (t+1) = (t+1)(t^2-1)$ $\quad Q(t) = t(t^2-1) - 2(t^2-1) = (t^2-1)(t-2)$

1

$\mathrm{NZD}(P(t), Q(t)) =$ $t^2 - 1$ 1

10. (2 boda) Proveri svodljivost polinoma $P(t) = t^2 - 2$ nad poljima:

- $\mathbb{Q}$ несводљив јер нема корен
- $\mathbb{R}$ $P(t) = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ - сводљив
- $\mathbb{Z}_3$ $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ - нема корен - несводљив
- $\mathbb{Z}_5$ $P(0) = 3$, $P(1) = 4$, $P(2) = 2$, $P(3) = 2$, $P(4) = 4$ - нема корен - несводљив

1 1

11. (5 bodova) Bezuov stav: Vrednost polinoma $P \in F[t]$ u tački $\alpha \in F$ jednaka je ostatku pri deljenju polinoma P polinomom $t - \alpha$. Dokazati.

$P = Q \cdot (t - \alpha) + R$, где је $dg(R) = 1$ или $R = 0$.

$\psi(P)(x) = \psi(Q)(x) \cdot (x - \alpha) + R$, па за $x = \alpha$ добијамо

$\psi(P)(\alpha) = 0 + R = R$ 5

Fakultet tehničkih nauka
Energetika, elektronika i telekomunikacije

ALGEBRA
ZADACI - prvi deo

30. 11. 2024.
Novi Sad

1. (8 bodova) Napisati SDNF, sve proste implikante i sve MDNF Bulove funkcije definisane tablicom

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

2. (8 bodova) Neka su a, b, c i d permutacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definisane sa

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ispitati sve aksiome Abelove grupe za strukturu $(\{a, b, c, d\}, \circ)$.

3. (9 bodova) Odrediti vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ za koju je 2 koren polinoma

$$p(x) = x^5 + (a-4)x^4 + (4-a)x^3 - 2ax^2 + (3-a)x + 4a - 10$$

a potom (tj. sa određenim a) napisati polinom p kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljima $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{Z}_5$.