

U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Tačke $P(1, 2, 3), Q(2, 3, 1)$ i $R(3, 1, 2)$ pripadaju ravni α . **1)** $\vec{PQ} = (1, 1, -2)$ **2)** $\vec{PR} = (2, -1, -1)$ **3)** $\vec{PR} \cdot \vec{PQ} = 3$
4) $|\vec{PQ}| = \sqrt{6}$ **5)** $|\vec{PR}| = \sqrt{6}$ **6)** $\vec{PR} \times \vec{PQ} = (3, 3, 3)$ **7)** $\vec{OP} \cdot (\vec{PR} \times \vec{PQ}) = 18$ **8)** $\sphericalangle QPR = \frac{\pi}{3}$
9) Jednačina ravni $\alpha : x+y+z=6$ **10)** Jednačina prave kroz tačke P i Q je $\ell_{P,Q} : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$

- U paralelogramu $ABCD$ tačka P je sredina stranice CD i dijagonala AC i duž PB seku se u tački T . Neka je $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$. Tada:

- 1)** Tačka T je težište trougla BCD . **2)** $\vec{TB} = \frac{1}{3}\vec{PB}$ **3)** $\vec{TB} = \frac{2}{3}\vec{PB}$
4) $3\vec{TB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ **5)** $3\vec{TB} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ **6)** $3\vec{TB} = \vec{a} - 2\vec{b}$

- Izraziti vektor $\vec{x} = (3, 4, -4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, -1), \vec{b} = (0, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
 $\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a = 1 \vee a = -1$ **2)** određen: $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ **3)** kontradiktoran: /

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax - ay = a \wedge ax + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:
1) dvostruko neodređen: $a = 0$ **2)** jednostruko neodređen: / **3)** određen: $a \neq 0$ **4)** kontradiktoran: /
5) Skup svih rešenja datog sistema jednačina je $\{(1, 0)\}$ ili $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$. **DA** NE

- Koje od sledećih uređenih n -torki jesu **generatorne** za vektorski prostor \mathbb{R}^3 : **1)** $((0, 0, -5), (0, 3, 0), (7, 0, 0))$
2) $((3, 0, 0), (0, -3, 0))$ **3)** $((0, 0, 5), (0, 5, 0), (5, 0, 0), (3, 5, 2))$ **4)** $((-1, -1, -1), (4, 4, 4), (3, 3, 3))$

- $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [7]$ $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = /$

- Matrice linearnih transformacija $f(x) = (2x, x, x), g(x, y, z) = x, h(x, y) = (y, y)$ i $s(x, y, z) = (z + x, z - y)$. su:

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M_g = [1 \ 0 \ 0] \quad M_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [0 \ 0 \ 0] \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

2 2 2 2 1 3 1 0 1

- Koje od sledećih uređenih n -torki **su nezavisne** za vektorski prostor \mathbb{R}^3 : **1)** $((0, 0, -1), (0, 4, 0), (9, 0, 0))$
2) $((1, 3, -2), (-2, -6, 3))$ **3)** $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$ **4)** $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje nenula **komutativne** kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ :
1) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ **2)** $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$ **3)** $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ **4)** $(AB)^2 = A^2B^2$
5) $\text{rang}(A + B) < \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$ **6)** $A + B = B + A$ **7)** $\text{rang}(A + B) > \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$
8) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$ **9)** $A(BC) = (AB)C$ **10)** $A(B + C) = BA + CA$

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$? **a)** $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- Neka su $\vec{x} \neq 0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni i α, β i γ uglovi koje vektor \vec{x} obrazuje sa redom vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tada:

1) Trijedar vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je nezavisan **2)** Trijedar $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je generatoran **3)** $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$

4) Trijedar vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je baza **5)** $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ **6)** $(|\vec{x}| \cos \alpha)\vec{i} + (|\vec{x}| \cos \beta)\vec{j} + (|\vec{x}| \cos \gamma)\vec{k} = \vec{x}$

7) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$ **8)** $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = |\vec{x}|^2$ **9)** $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako i samo ako je:

1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **2)** $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ **3)** $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ **6)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ **7)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ **8)** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je nezavisna.

- Neka je tačka P presek ravni $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i $\vec{n}\vec{a} \neq 0$. Tada je: **1)** $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$.

2) $\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. **3)** $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{n}$. **4)** $\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. **5)** $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{n}$.

- Normalna projekcija vektora $\vec{x} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = (-1, 2, 3)$ na pravu $\ell : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{1}$ je vektor:

$\text{pr}_\ell(\vec{x}) = (1, 2, 1)$, a na ravan $\alpha : x + 2y + z = 1$ je vektor $\text{pr}_\alpha(\vec{x}) = (-2, 0, 2)$ i $\text{pr}_\ell(\vec{x}) + \text{pr}_\alpha(\vec{x}) = \vec{x}$

- Napisati bar jednu (ukoliko postoji) linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ za koju važi:

1) je injektivna $f(x, y) = (x, y, 0, 0)$ **2)** nije injektivna $f(x, y) = (0, 0, 0, 0)$
3) je surjektivna $f(x, y) = /$ **4)** nije surjektivna $f(x, y) = (0, 0, 0, 0)$

A ALGEBRA

ZADACI 2

2.2.2024.

1. Ravan α određena je tačkom A i vektorom normale \vec{n} , a prava p određena je tačkom P i vektorom pravca \vec{p} , gde važi $A \notin p, P \notin \alpha$ i $\vec{p} \perp \vec{n}$. U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_P, \vec{n}$ i \vec{p} izraziti vektore položaja tačaka B i C tako da ABC bude jednakostranični trougao i da $B \in \alpha, C \in \alpha$ i $B \in p$.
2. Neka je V vektorski prostor generisan vektorima $\vec{a} = (2, -1, -1), \vec{b} = (-4, 2, 2), \vec{c} = (-1, -1, -1)$ i $\vec{d} = (7, 1, 1)$. Odrediti sve linearne zavisnosti vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i \vec{d} , naći jednu bazu prostora V i odrediti $\dim(V)$.
3. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadata sa $f(1, 1) = (0, 1)$ i $f(-1, 1) = (-1, 0)$.
 - a) Izračunati $f(1, 0)$ i $f(0, 1)$.
 - b) Napisati M_f matricu linearne transformacije f u standardnoj bazi, odrediti rang matrice i proveriti da li je f bijekcija.
 - c) Ako je $A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ kvadrat, odrediti skup slika $f(A)$ i izračunati površinu figure $f(A)$.