Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 7

Na prethodnom času

- Bulove funkcije i logička kola

Apstraktna definicija Bulove algebre

Iskazni račun

Posmatrajmo $(\{\top, \bot\}, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$, gde operacije $\vee$ i $\wedge$ predstavljaju disjunkciju i konjukciju, a $\neg$ je negacija:

B_1 **Komutativnost:** Za sve $p, q \in \{\top, \bot\}$ važi

$$p \vee q = q \vee p \quad \text{i} \quad p \wedge q = q \wedge p$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $p, q, r \in \{\top, \bot\}$ važi

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{i} \quad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $p \in \{\top, \bot\}$ važi

$$p \vee \bot = p \quad \text{i} \quad p \wedge \top = p$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $p \in \{\top, \bot\}$ važi

$$p \vee \neg p = \top \quad \text{i} \quad p \wedge \neg p = \bot$$

Skupovi

Neka je $A \neq \emptyset$. Posmatrajmo $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$, gde je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup od A, operacije $\cup$ i $\cap$ predstavljaju uniju i presek skupova, a $^-$ je komplement ($\overline{X} = A \backslash X$):

B_1 **Komutativnost:** Za sve $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$X \cup Y = Y \cup X \quad \text{i} \quad X \cap Y = Y \cap X$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad \text{i} \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $X \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$X \cup \emptyset = X \quad \text{i} \quad X \cap A = X$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $X \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$X \cup \overline{X} = A \quad \text{i} \quad X \cap \overline{X} = \emptyset$$

Delioci broja 30

Posmatrajmo $\left(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ skup delioca broja 30, NZS i NZD najmanji zajednički sadržalac i najveći zajednički delilac:

B_1 **Komutativnost:** Za sve $x, y \in D_{30}$ važi

$$NZS\{x, y\} = NZS\{y, x\} \quad \text{i} \quad NZD\{x, y\} = NZD\{y, x\}$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $x, y, z \in D_{30}$ važi

$$NZD\{x, NZS\{y, z\}\} = NZS\{NZD\{x, y\}, NZD\{x, z\}\} \quad \text{i}$$

$$NZS\{x, NZD\{y, z\}\} = NZD\{NZS\{x, y\}, NZS\{x, z\}\}$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $x \in D_{30}$ važi

$$NZS\{x, 1\} = x \quad \text{i} \quad NZD\{x, 30\} = x$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $x \in D_{30}$ važi

$$NZS\{x, x'\} = 30 \quad \text{i} \quad NZD\{x, x'\} = 1$$

Apstrakcija: Bulove algebre

Definicija: Uređena šestorka $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, gde je $B \neq \emptyset$, $+ : B^2 \to B$, $\cdot : B^2 \to B$, $' : B \to B$ i $0, 1 \in B$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ **Bulova algebra** ako važe aksiome:

B_1 **Komutativnost:** Za sve $a, b \in B$ važi

$$a + b = b + a \quad \text{i} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $a, b, c \in B$ važi

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{i} \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $a \in B$ važi

$$a + 0 = a \quad \text{i} \quad a \cdot 1 = a$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $a \in B$ važi

$$a + a' = 1 \quad \text{i} \quad a \cdot a' = 0$$

Dualnost. Bulovi identiteti

Napomena

Primetimo da se aksiome pojavljuju u paru i da ako u jednoj aksiomi zamenimo mesta simbolima $+$ *i* $\cdot$*, i simbolima* 0 *i* 1 *onda ponovo dobijamo aksiomu Bulove algebre.*

Posledica

Sledi da će i skup teorema Bulove algebre biti dualan: kad god dokazemo neko tvrđenje u Bulovim algebrama možemo u tvrđenju izvršiti prethodno opisanu zamenu simbola i dobiti da važi njemu dualno tvrđenje.

Napomena

Svi Bulovi identiteti *koje smo izveli na prethodim slajdovima zapravo smo izveli iz Bulovih aksioma, tako da oni* **važe na svim Bulovim algebrama**.

Podalgebre

Podalgebre i kako ih naći

Definicija (Podalgebre)

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Kažemo da je Bulova algebra* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ *podalgebra Bulove algebre* $\mathcal{B}$ *ako je* $C \subseteq B$ *i operacije iz* $\mathcal{C}$ *su restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$.

Podalgebre i kako ih naći

Definicija (Podalgebre)

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Kažemo da je Bulova algebra* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ *podalgebra Bulove algebre* $\mathcal{B}$ *ako je* $C \subseteq B$ *i operacije iz* $\mathcal{C}$ *su restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$.

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra i* $C \subseteq B$. *Tada je* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$, *gde su* $+, \cdot, '$ *restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$, *podalgebra algebre* $\mathcal{B}$ *ako i samo ako za sve* $a, b \in C$ *važi* $a + b \in C$, $a \cdot b \in C$ *i* $a' \in C$.

Dokaz

($\Rightarrow$): *Ako je* $\mathcal{C}$ *podalgebra od* $\mathcal{B}$, *onda su operacije u* $\mathcal{C}$ *restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$.

($\Leftarrow$): *Pošto sve aksiome Bulovih algebri važe u* $\mathcal{B}$, *onda važe u* $\mathcal{C}$ *(jer su operacije iz* $\mathcal{C}$ *restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$*), pod uslovom da* 0 *i* 1 *iz* B *pripadaju i* C. *Ovo sledi iz: ako* $a \in C$ *onda i* $a' \in C$, *pa i* $a + a' \in C$ *i* $a + a' \in C$, *tj.* $1 \in C$ *i* $0 \in C$.

Primeri podalgebri

Naći sve podalgebre Bulovih algebri:
$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$, za $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$
$(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

- $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_2 = (\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$

Primeri podalgebri

Naći sve podalgebre Bulovih algebri:
$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, za $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$
$(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

- $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_2 = (\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_3 = (\{\emptyset, A, \{a\}, \{b, c\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_4 = (\{\emptyset, A, \{b\}, \{a, c\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_5 = (\{\emptyset, A, \{c\}, \{a, b\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$

Primeri podalgebri

Naći sve podalgebre Bulovih algebri:
$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$, za $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

$(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

- $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_2 = (\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_3 = (\{\emptyset, A, \{a\}, \{b, c\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_4 = (\{\emptyset, A, \{b\}, \{a, c\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_5 = (\{\emptyset, A, \{c\}, \{a, b\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$

- $\mathcal{C}_1 = (D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_2 = (\{1, 30\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$

Primeri podalgebri

Naći sve podalgebre Bulovih algebri:
$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$, za $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$
$(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

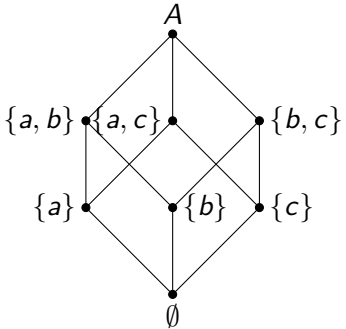
- $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_2 = (\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_3 = (\{\emptyset, A, \{a\}, \{b, c\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_4 = (\{\emptyset, A, \{b\}, \{a, c\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_5 = (\{\emptyset, A, \{c\}, \{a, b\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$

- $\mathcal{C}_1 = (D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_2 = (\{1, 30\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_3 = (\{1, 30, 2, 15\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_4 = (\{1, 30, 3, 10\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_5 = (\{1, 30, 5, 6\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$

Relacija poretka na Bulovim algebrama

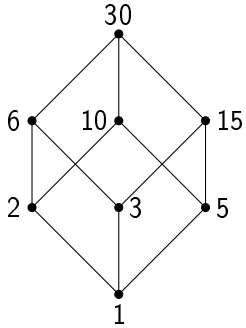
Neke relacije poretka

- Skupovi: $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, za $A = \{1, 2, 3\}$



Imamo: $X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

- Delioci broja 30: $(D_{30}, |)$



Imamo: $k \mid l \Leftrightarrow NZS\{k, l\} = l$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada je* $\preccurlyeq$ *relacija poretka na* $\mathcal{B}$.

Dokaz

(R) $(\forall a \in B)\ a \preccurlyeq a$

(A) $(\forall a, b \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow a = b$

(T) $(\forall a, b, c \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \Rightarrow a \preccurlyeq c$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada je* $\preccurlyeq$ *relacija poretka na* $\mathcal{B}$.

Dokaz

(R) $(\forall a \in B)\ a \preccurlyeq a \ \Leftrightarrow\ a + a = a$ *(iz idempotentnosti)*

(A) $(\forall a, b \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow a = b$

(T) $(\forall a, b, c \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \Rightarrow a \preccurlyeq c$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada je* $\preccurlyeq$ *relacija poretka na* $\mathcal{B}$.

Dokaz

(R) $(\forall a \in B)\ a \preccurlyeq a \ \Leftrightarrow\ a + a = a$ *(iz idempotentnosti)*

(A) $(\forall a, b \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow a = b$
$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Leftrightarrow (a + b = b \wedge b + a = a) \Rightarrow a = b$ *(iz komutativnosti)*

(T) $(\forall a, b, c \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \Rightarrow a \preccurlyeq c$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada je* $\preccurlyeq$ *relacija poretka na* $\mathcal{B}$.

Dokaz

(R) $(\forall a \in B)\ a \preccurlyeq a \ \Leftrightarrow\ a + a = a$ *(iz idempotentnosti)*

(A) $(\forall a, b \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow a = b$
$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Leftrightarrow (a + b = b \wedge b + a = a) \Rightarrow a = b$ *(iz komutativnosti)*

(T) $(\forall a, b, c \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \Rightarrow a \preccurlyeq c$
$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \Leftrightarrow (a + b = b \wedge b + c = c) \Rightarrow$
$a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c$ *(iz asocijativnosti)*

Neke osobine relacije poretka na Bulovim algebrama

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada za sve* $a, b, c \in B$ *važi*

1. $(a \preccurlyeq c \wedge b \preccurlyeq c) \Leftrightarrow a + b \preccurlyeq c$
2. $(c \preccurlyeq a \wedge c \preccurlyeq b) \Leftrightarrow c \preccurlyeq ab$
3. $(a \preccurlyeq c \wedge b \preccurlyeq c) \Rightarrow ab \preccurlyeq c$
4. $(c \preccurlyeq a \wedge c \preccurlyeq b) \Rightarrow c \preccurlyeq a + b$

Ograničenost, ponovo

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada za sve* $a \in B$ *važi* $0 \preccurlyeq a$ *i* $a \preccurlyeq 1$.

Dokaz

Prvi deo: $0 \preccurlyeq a \Leftrightarrow 0 + a = a$, *što sledi iz aksiome neutralni elementi.*
Drugi deo: $a \preccurlyeq 1 \Leftrightarrow a + 1 = 1$, *što sledi iz teoreme ograničenost.*

Napomena

U svakoj Bulovoj algebri 0 *je najmanji, a* 1 *najveći element.*

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada za sve* $a \in B$ *važi*
$ab = 1 \Leftrightarrow (a = 1 \wedge b = 1)$

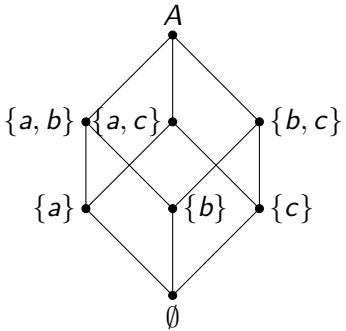
Dokaz

$(\Leftarrow)$: *Direktno.* $(\Rightarrow)$: $ab = 1 \Rightarrow a + ab = a + 1 \Rightarrow a = 1$ *(apsorpcija, ograničenost)*

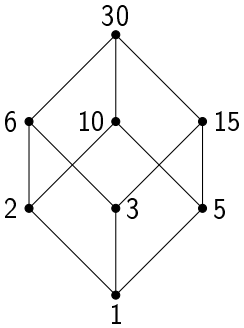
Homomorfizam i izomorfizam

Ovo deluje "isto"

- Skupovi: $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$, za $A = \{1, 2, 3\}$



- Delioci broja 30: $(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



Kako da formulišemo da su dve Bulove algebre "iste"?

Homomorfizam i izomorfizam

Definicija (Homomorfizam)

Neka su $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *i* $\mathcal{C} = (C, \oplus, \odot, ^-, 0^*, 1^*)$ *dve Bulove algebre. Funkcija* $\varphi : B \to C$*, se naziva homomorfizam ako za sve* $a, b \in B$ *važi*

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$
2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$
3. $\varphi(a') = \overline{\varphi(a)}$

Definicija (Izomorfizam)

Bijektivni homomorfizam se naziva izomorfizam.

Primer

Za Bulove algebre $\big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A\big)$, za $A = \{a, b, c\}$, i $\big(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30\big)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, jedan izomorfizam je

$$\varphi = \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a, b\} & \{a, c\} & \{b, c\} & \{a, b, c\} \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 10 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Treba proveriti da je φ bijekcija i da za sve $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ važi

1. $\varphi(X \cup Y) = NZS\{\varphi(X), \varphi(Y)\}$
2. $\varphi(X \cap Y) = NZD\{\varphi(a), \varphi(b)\}$
3. $\varphi(\overline{X}) = \big(\varphi(X)\big)'$

Reprezentacija Bulovih algebri

Teorema (Teorema Stona o reprezentaciji Bulovih algebri)

Svaka Bulova algebra izomorfna je sa nekom Bulovom algebrom skupova $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$.

Posledica

Svaka konačna Bulova algebra (a mi radimo samo sa konačnim) ima 2^n *elemenata i sve Bulove algebre sa istim brojem elemenata su izomorfne.*

Šta smo danas radili

- Apstraktna definicija Bulove algebre