Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 6

Na prethodnom času

- Prsteni i polja

Bulovi izrazi i Bulove funkcije

Bulove funkcije

- **Logička kola**, koja su gradivni elementi digitalnih sistema, mogu se predstaviti pomoću funkcija koje imaju binarne ulaze i izlaze, a koje ćemo zvati **Bulove funkcije**.
- Bulove funkcije definisišemo na skupu $B = \{0, 1\}$. Gradivni elementi Bulovih funkcija jesu *Bulove operacije*, *Bulove promenljive* i *Bulovi izrazi*. Osnovne operacije u Bulovim algebrama jesu unarna **negacija** (**komplement**) $'$, definisana sa $0' = 1$ i $1' = 0$, i binarne **disjunkcija** (**Bulova suma**) $+$ i **konjunkcija** (**Bulov proizvod**) $\cdot$, date sa:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Bulovi izrazi

Primer

U srednjoj školi rađeno: ispitati istinitost izraza $(\neg x \wedge y) \vee y$.

Bulovi izrazi

Primer

U srednjoj školi rađeno: ispitati istinitost izraza $(\neg x \wedge y) \vee y$.

Mi ćemo umesto $(\neg x \wedge y) \vee y$ **pisati** $x'y + y$**, umesto** $\bot$ **pisaćemo** 0**, a umesto** $\top$ **pisaćemo** 1.

x	y	x'	$x'y$	$x'y + y$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	0	1

Dakle, izraze pravimo od konstanti $0, 1$*, promenljivih* $x, y, z, \ldots$ *i operacija* $+, \cdot, '$.

Definicija Bulovih izraza

Definicija (Bulovi izrazi)

1. *Konstante* $0, 1$ *i promenljive* $x, y, z, u, \ldots$ *su Bulovi izrazi.*
2. *Ako su* A *i* B *Bulovi izrazi, onda su to i* $(A + B)$, $(A \cdot B)$, $(A)'$.
3. *Bulovi izrazi dobijaju se konačnim brojem primena prethodna dva pravila.*

Primer

Bulovi izrazi su (zagrade pišemo samo kada moramo):
$0, 1, x, y, x'y, x'y + y, 1 + x', (x' + y')'z, \ldots$

Od Bulovih izraza do Bulovih funkcija

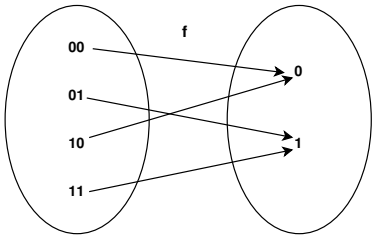
Setimo se našeg Bulovog izraza $x'y + y$ i ispitivanja njegove tačnosti:

x	y	$x'y + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Od Bulovih izraza do Bulovih funkcija

Setimo se našeg Bulovog izraza $x'y + y$ i ispitivanja njegove tačnosti:
Zapravo, ovaj izraz definiše jednu **Bulovu funkciju** $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, i pišemo $f(x,y) = x'y + y$.

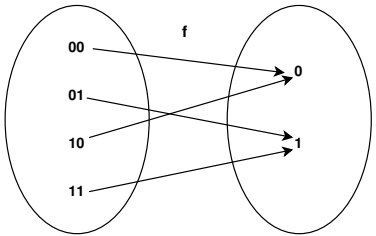
x	y	$f(x,y) = x'y + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Od Bulovih izraza do Bulovih funkcija

Setimo se našeg Bulovog izraza $x'y + y$ i ispitivanja njegove tačnosti:
Zapravo, ovaj izraz definiše jednu **Bulovu funkciju** $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, i pišemo $f(x,y) = x'y + y$.

x	y	$f(x,y) = x'y + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Napomena

Primetimo da izraz y definiše istu funkciju. Dakle, svaki izraz određuje jednu funkciju, ali više Bulovih izraza može da određuju istu funkciju.
Koristeći zakone logike, koje zovemo **Bulovi identiteti**, *možemo prepoznati izraze koji definišu istu Bulovu funkciju.*

Bulovi identiteti

Osnovni Bulovi identiteti

B_1 **Komutativnost:** Za sve $x, y \in B$ važi

$$x + y = y + x \quad \text{i} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $x, y, z \in B$ važi

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \text{i} \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $x \in B$ važi

$$x + 0 = x \quad \text{i} \quad x \cdot 1 = x$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $x \in B$ važi

$$x + x' = 1 \quad \text{i} \quad x \cdot x' = 0$$

Napomena

Ovi identiteti se još zovu i Bulove aksiome.

O osnovnim Bulovim identitetima

Svi osnovni Bulovi identiteti su zapravo zakoni logike i mogu se proveriti koristeći tablice. Recimo, za prvi distributivni zakon imamo:

x	y	z	$y+z$	xy	xz	$x(y+z)$	$xy+xz$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Napomena

Na sledećim slajdovima navodimo još važnih Bulovih identiteta. Te identitete takođe možemo proveriti preko tablica, ali, važnije od toga, ove identite možemo dokazati koristeći prethodne, a zatim ih dalje koristiti da izvodimo nove identitete.

Idempotentnost

Teorema (Idempotentnost)

Za sve $x \in B$ važi

$$x + x = x \quad i \quad x \cdot x = x$$

Dokaz

Dokazaćemo samo prvu jednakost. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned}
x &= x + 0 && \text{(iz aksiome neutralni elementi)} \\
&= x + (x \cdot x') && \text{(iz aksiome komplementarnost)} \\
&= (x + x) \cdot (x + x') && \text{(iz aksiome distributivnost)} \\
&= (x + x) \cdot 1 && \text{(iz aksiome komplementarnost)} \\
&= x + x && \text{(iz aksiome neutralni elementi)}
\end{aligned}$$

Ograničenost

Teorema (Ograničenost)

Za sve $x \in B$ važi

$$x + 1 = 1 \quad i \quad x \cdot 0 = 0$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned} x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 && \text{(aksioma neutralni elementi)} \\ &= (x + 1) \cdot (x + x') && \text{(aksioma komplementarnost)} \\ &= x + (1 \cdot x') && \text{(aksioma distributivnost)} \\ &= x + x' && \text{(aksioma neutralni elementi (i komut.))} \\ &= 1 && \text{(aksioma komplementarnost)} \end{aligned}$$

Apsorpcija

Teorema (Apsorpcija)

Za sve $x, y \in B$ važi

$$x + xy = x \quad i \quad x \cdot (x + y) = x$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned} x + xy &= x \cdot 1 + xy && \text{(aksioma neutralni elementi)} \\ &= x \cdot (1 + y) && \text{(aksioma distributivnost)} \\ &= x \cdot 1 && \text{(teorema ograničenost (i komut.))} \\ &= x && \text{(aksioma neutralni elementi)} \end{aligned}$$

Pomoćna teorema

Lema (Pomoćna)

Za sve $x, y \in B$ važi

$$x + x'y = x + y \quad i \quad x \cdot (x' + y) = x \cdot y$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned} x + x'y &= (x + x') \cdot (x + y) && \text{(aksioma distributivnost)} \\ &= 1 \cdot (x + y) && \text{(aksioma komplementarnost)} \\ &= x + y && \text{(aksioma neutralni elelmenti (i komut.))} \end{aligned}$$

Lema (Pomoćna 2)

Za sve $x, y \in B$ važi

$$x' + xy = x' + y \quad i \quad x' \cdot (x + y) = x' \cdot y$$

Asocijativnost

Teorema (Asocijativnost)

Za sve $x, y, z \in B$ važi

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad i \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= 1 \cdot \big((x + y) + z\big) && \textit{(neutralni elementi (i komut.))} \\
&= (x + x') \cdot \big((x + y) + z\big) && \textit{(komplementarnost)} \\
&= \big(x(x + y) + xz\big) + \big(x'(x + y) + x'z\big) && \textit{(distributivnost)} \\
&= \big(x + xz\big) + \big(x'y + x'z\big) && \textit{(apsorpcija i pomoćna 2)} \\
&= x + x'(y + z) && \textit{(apsorpcija i distributivnost)} \\
&= x + (y + z) && \textit{(pomoćna)}
\end{aligned}$$

Jedinstvenost komplementa

Teorema (Jedinstvenost komplementa)

Sistem jednačina $a + x = 1 \wedge a \cdot x = 0$ ima jedinstveno rešenje za sve vrednosti parametra $a \in B$ i to rešenje je $x = a'$.

Dokaz

Pošto se traži jedinstveno rešenje sistema mi ćemo pokazati da

1. **Postoji bar jedno rešenje:** *Na osnovu aksiome komplementarnosti, jedno rešenje je $x = a'$.*
2. **Nema više od jednog rešenja:** *Dokaz izvodimo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da postoji bar još jedno rešenje sistema b, takvo da je $b \neq a'$. Sada imamo*

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a + a') = ba + ba' = 0 + ba' = aa' + ba' = (a + b)a' = 1 \cdot a' = a'$$

Dobili smo kontradikciju pa zaključujemo da sistem ne može imati više od jednog rešenja.

Komplementi od 0 i 1

Teorema (Komplementi od 0 i 1)

Samo iz Bulovih aksioma možemo pokazati da važi

$$0' = 1 \quad i \quad 1' = 0$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost. Posmatrajmo sistem jednačina $0 + x = 1 \ \wedge \ 0 \cdot x = 0$. *Po aksiomi komplementarnost, rešenje sistema je* $x = 0'$, *a po teoremi ograničenost, rešenje sitema je i* $x = 1$. *Iz teoreme jedinstvenost komplementa dobijamo* $0' = 1$.

Napomena

Ovo sada nije korisno ali će biti kada budemo dali apstraktnu definiciju Bulove algebre.

Involucija

Teorema (Involucija)

Za sve $a \in B$ važi $(a')' = a$. Takođe, funkcija $f : B \to B$ definisana sa $f(x) = x'$ je bijekcija.

Dokaz

Posmatrajmo sistem jednačina $a' + x = 1 \ \wedge \ a' \cdot x = 0$. Po aksiomi komplementarnost (i komut.), rešenje sistema je $x = a$ i $x = (a')'$. Iz teoreme jedinstvenost komplementa dobijamo $(a')' = a$.

Demorganovi zakoni

Teorema (Demorganovi zakoni)

Za sve $a, b \in B$ *važi*

$$(a+b)' = a'b' \quad i \quad (ab)' = a' + b'$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost, druga će onda slediti iz dualnosti. Posmatrajmo sistem jednačina $(a+b)+x = 1 \ \wedge \ (a+b)\cdot x = 0$. *Po aksiomi komplementarnost, rešenje sistema je* $x = (a+b)'$. *Sa druge strane, imamo da je i* $x = a'b'$ *rešenje sistema:*

$$(a+b)+a'b' = (a+b+a')(a+b+b') = 1\cdot 1 = 1 \quad i \quad (a+b)\cdot a'b' = aa'b'+ba'b' = 0+0 = 0$$

Iz teoreme jedinstvenost komplementa dobijamo $(a+b)' = a'b'$.

Dualnost

Napomena

Primetimo da se aksiome pojavljuju u paru i da ako u jednoj aksiomi zamenimo mesta simbolima $+$ *i* $\cdot$*, i simbolima* 0 *i* 1 *onda ponovo dobijamo aksiomu Bulove algebre.*

Posledica

Sledi da su i sve Bulove teoreme dualane: kad god dokazemo neko tvrđenje u Bulovim algebrama možemo u tvrđenju izvršiti prethodno opisanu zamenu simbola i dobiti da važi njemu dualno tvrđenje. Zato smo ih sve i pisali u parovima.

Reprezentacije Bulovih funkcija

Kako za datu Bulovu funkciju naći izraz koji joj odgovara? (1/2)

Na primer, posmatrajmo Bulovu funkciju f datu sledećom tablicom:

x	y	z	$f(x,y,z)$	$xy'z'$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

- f ima vrednost 1 samo kada je $x = 1$, $y = 0$ i $z = 0$, inače ima vrednost 0
- Bulov izraz $xy'z'$ (dat u tablici) takođe ima ovu osobinu
- Odavde vidimo da važi $f(x,y,z) = xy'z'$

Kako za datu Bulovu funkciju naći izraz koji joj odgovara? (2/2)

Posmatrajmo sad Bulovu funkciju g datu sledećom tablicom:

x	y	z	$g(x,y,z)$	$xy'z'$	xyz'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0

- g ima vrednost 1 samo kada je $x = 1$, $y = 0$ i $z = 0$, ILI $x = 1$, $y = 1$ i $z = 0$, inače ima vrednost 0
- Bulov izraz $xy'z' + xyz'$ takođe ima ovu osobinu
- Odavde vidimo da važi $g(x,y,z) = xy'z' + xyz'$

Specijalni Bulovi izrazi

Definicija (Specijalni Bulovi izrazi)

1. **Monom:** *promenljiva ili njegova negacija* $(x, y, x', \ldots)$
2. **Elementarna konjunkcija (EK)**: *proizvod monoma* $(x, 0, , xy', \ldots)$
3. **Disjunktivna normalna forma (DNF)**: *zbir EK* $(x, x', 1, x'y + y, \ldots)$
4. **Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF)**: *zbir EK takvih da se u svakoj EK pojavljuju sve promenljive* $(x + x', x'y + xy, \ldots)$

Napomena

Dualno se definišu i elementarna disjunkcija (ED), konjunktivna normalna forma (KNF) i savršena konjuktivna normalna forma (SKNF).

Od Bulovih funkcija do Bulovih izraza

Napomena

Sledeća teorema pokazuje da za svaku Bulovu funkciju imamo tačno jedan Bulov izraz u obliku SDNF.

Teorema

Ako je $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *Bulova funkcija, tada se ona može zapisati kao Bulov izraz u SDNF obliku*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

gde je $x^\alpha = \begin{cases} x & , \quad \alpha = 1 \\ x' & , \quad \alpha = 0 \end{cases}$

Dokaz prethodne teoreme za $n = 2$

Teorema

Ako je $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ Bulova funkcija, tada se ona može zapisati kao Bulov izraz u SDNF obliku

$$f(x,y) = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\{0,1\}^2} f(\alpha_1,\alpha_2)\cdot x^{\alpha_1}\cdot y^{\alpha_2}$$

Dokaz

x	y	$f(x,y)$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(1,0)$
1	1	$f(1,1)$

Teorema kaže:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)\cdot x^0y^0 + f(0,1)\cdot x^0y^1 + f(1,0)\cdot x^1y^0 + f(1,1)\cdot x^1y^1 \\ &= f(0,0)\cdot x'y' + f(0,1)\cdot x'y + f(1,0)\cdot xy' + f(1,1)\cdot xy \end{aligned}$$

Sada možemo izračunati (primeti da ostane jedan sabirak):

$$\begin{aligned} f(0,0) &= f(0,0)\cdot 0'\cdot 0' + f(0,1)\cdot 0'\cdot 0 + f(1,0)\cdot 0\cdot 0' + f(1,1)\cdot 0\cdot 0 \\ &= f(0,0)\cdot 1\cdot 1 + f(0,1)\cdot 1\cdot 0 + f(1,0)\cdot 0\cdot 1 + f(1,1)\cdot 0\cdot 0 \end{aligned}$$

Isto tako možemo proveriti da i za $f(0,1), f(1,0), f(1,1)$ dobijamo tačne vrednosti.

Primer

Za sledeću Bulovu funkciju napisati Bulov izraz u obliku SDNF

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Primer

Za sledeću Bulovu funkciju napisati Bulov izraz u obliku SDNF

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)\cdot x^0y^0 + f(0,1)\cdot x^0y^1 + f(1,0)\cdot x^1y^0 + f(1,1)\cdot x^1y^1 \\ &= 0\cdot x'y' + 1\cdot x'y + 0\cdot xy' + 1\cdot xy \\ &= x'y + xy \end{aligned}$$

Primer

Za sledeću Bulovu funkciju napisati Bulov izraz u obliku SDNF

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)\cdot x^0y^0 + f(0,1)\cdot x^0y^1 + f(1,0)\cdot x^1y^0 + f(1,1)\cdot x^1y^1 \\ &= 0\cdot x'y' + 1\cdot x'y + 0\cdot xy' + 1\cdot xy \\ &= x'y + xy \end{aligned}$$

Napomena

Primetimo da je posledica teoreme da sve Bulove funkcije možemo predstaviti pomoću funkcija $+$, $\cdot$ i $'$. Zato se skup funkcija $\{+,\cdot,'\}$ zove generatorni za skup svih Bulovih funkcija.

Napomena

Primetimo i da Bulovi izrazi $x'y + y$, y i $x'y + xy$ svi određuju jednu istu Bulovu funkciju.

Baze skupa Bulovih funkcija

Napomena

Rekli smo da $\{+, \cdot, '\}$ *generiše sve Bulove funkcije, međutim imamo* $xy = (x' + y')'$, *što znači da nam* $\cdot$ *nije neophodna. Zato je i* $\{+, '\}$ *generatoran skup, ali se zove i* **baza** *skupa Bulovih funkcija. Recimo,* $\{\cdot, '\}$, $\{\oplus, '\}$ *(gde je* $x \oplus y = x'y + xy'$, *tzv. ekskluzivno ili, tj. sabiranje po modulu* 2*),* $\{\Rightarrow, '\}$ *su takođe baze. Međutim, postoje i baze sa samo jednim elementom. Inače, Bulovih funkcija od dve promenljive ima ukupno* 16.

Teorema

Skupovi funkcija $\{\overline{\wedge}\}$ *(Šeferova, ni) i* $\{\overline{\vee}\}$ *(Lukašijevićeva, nili) jesu baze skupa Bulovih funkcija, gde su operacije date sa* $x \overline{\wedge} y = x' + y'$ *i* $x \overline{\vee} y = x'y'$.

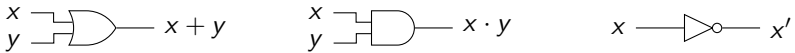
Dokaz

Za Šeferovu operaciju imamo da važi $x' = x \overline{\wedge} x$ *i* $x + y = (x \overline{\wedge} x) \overline{\wedge} (y \overline{\wedge} y)$, *tj. i* $'$ *i* $+$ *se mogu izraziti preko* $\overline{\wedge}$. *Slično se pokazuje i za Lukašijevićevu operaciju.*

Logička kola

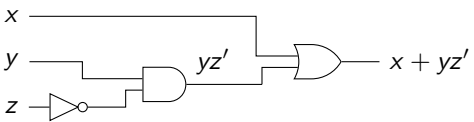
Logička kola

- Logička kola implementiraju funkcionalnosti digitalnih sistema, a (ako apstrahujemo neke fizičke osobine) logička kola su ništa drugo do Bulove funkcije.
- Logičke kapije su osnovni gradivni elementi logičkih kola. Mi ćemo raditi samo sa logičkim kapijama:



Zapravo, radićemo sa ovakvim kapijama ali sa dva ili više argumenata.

- Logička kola dobijamo povezivanjem više logičkih kapija. Na primer, kombinacijom logičkih kapija možemo nacrtati šematski prikaz logičkog kola Bulove funkcije $f(x, y, z) = x + yz'$.



Primer 1

Zadatak

U sobi sa dvoja vrata postavljena su dva prekidača za svetlo. Oba prekidača imaju dva moguća stanja: otvoren i zatvoren. Pred nama je zadatak da dizajniramo logičko kolo koje upravlja radom sijalice i koje će omogućiti da se pritiskom na bilo koji od prekidača promeni stanje sijalice (upali ako je ugašena, ugasi ako je upaljena).

Primer 1

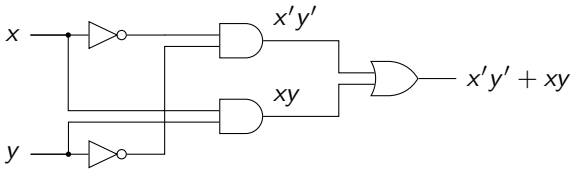
Zadatak

U sobi sa dvoja vrata postavljena su dva prekidača za svetlo. Oba prekidača imaju dva moguća stanja: otvoren i zatvoren. Pred nama je zadatak da dizajniramo logičko kolo koje upravlja radom sijalice i koje će omogućiti da se pritiskom na bilo koji od prekidača promeni stanje sijalice (upali ako je ugašena, ugasi ako je upaljena).

Jedno rešenje:

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

SDNF izraz funkcije
$f(x,y) = x'y' + xy$



Primer 2

Zadatak

Zadatak pred nama je, kao i u prethodnom primeru, da upravljamo radom sijalice, s tim što ovaj put imamo tri prekidača. Promena stanja na svakom od njih treba da rezultuje promenom stanja sijalice.

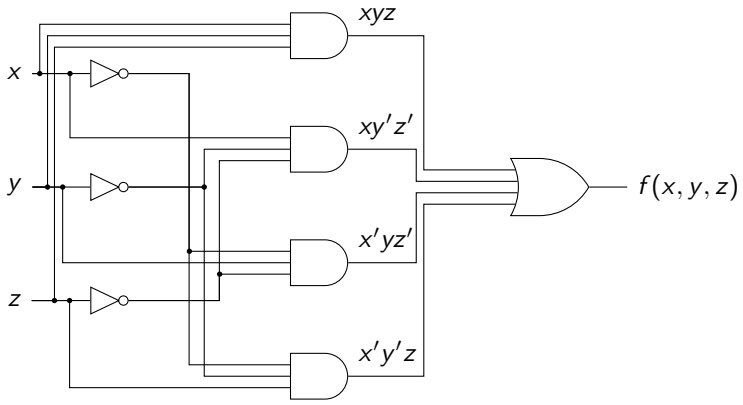
Primer 2

Zadatak

Zadatak pred nama je, kao i u prethodnom primeru, da upravljamo radom sijalice, s tim što ovaj put imamo tri prekidača. Promena stanja na svakom od njih treba da rezultuje promenom stanja sijalice.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

SDNF $f(x,y,z) =$
$xyz + xy'z' + x'yz' + x'y'z$



Minimizacija logičkih kola

Minimizacija?

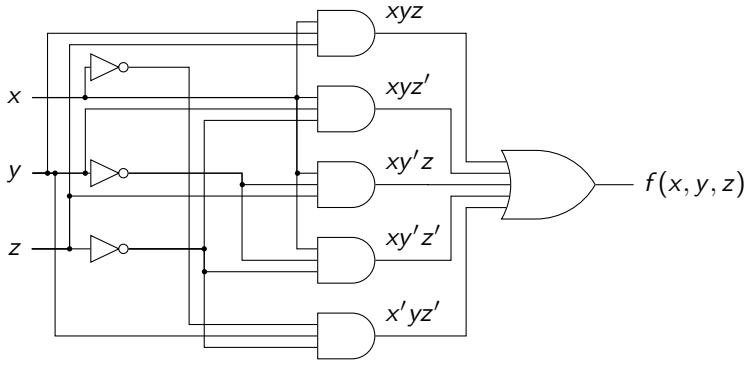
Inženjerski problem pred nama: Za datu specifikaciju logičkog kola preko tablice nacrtati shematski prikaz.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Minimizacija?

Inženjerski problem pred nama: Za datu specifikaciju logičkog kola preko tablice nacrtati shematski prikaz.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



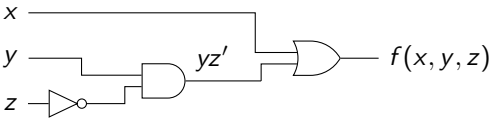
Rešenje: SDNF $f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz'$

Minimizacija!

Ako primenimo Bulove identitete možemo izvesti

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz' \\ &= xy(z+z') + xy'(z+z') + x'yz' && \text{(distr.)} \\ &= xy + xy' + x'yz' && \text{(kompl. i neutr.)} \\ &= x(y+y') + x'yz' && \text{(distr.)} \\ &= x + x'yz' && \text{(kompl. i neutr.)} \end{aligned}$$

Dobili smo manju DNF od početne, ali od ovoga može bolje. Ako za drugu EK primenimo zakon idempotentnosti $xyz' = xyz' + xyz'$, tada jednu kopiju xyz' možemo iskoristiti za grupisanje prve četiri EK kao što smo pokazali, a drugu možemo grupisati sa poslednjom EK iz SDNF $xyz' + x'yz' = (x+x')yz' = yz'$ i dobiti $f(x,y,z) = x + yz'$



Zaključak o minimizaciji

Dakle, imamo manje logičko kolo koje implementira istu Bulovu funkciju.

Pitanje: Zašto je važno imati manje logičko kolo?

Odgovor: Zbog manje cene koštanja, zbog manjeg zauzimanja prostora, zbog manjeg vremena kašnjenja u radu logičkog kola.

Zaključak o minimizaciji

Dakle, imamo manje logičko kolo koje implementira istu Bulovu funkciju.
Pitanje: Zašto je važno imati manje logičko kolo?
Odgovor: Zbog manje cene koštanja, zbog manjeg zauzimanja prostora, zbog manjeg vremena kašnjenja u radu logičkog kola.
Pitanje: Kako naći minimalno logičko kolo, tj. Bulov izraz (pri čemu posmatramo Bulove izraze samo u DNF obliku)?
Odgovor: Iz prethodna dva slajda možemo izvesti dva zaključka

- jedan DNF izraz je minimalniji od drugog ako ima manje ili jednako EK i odgovarajuće EK imaju manje ili jednako monoma
- opisano **grupisanje EK** koje se **razlikuju samo u jednom monomu** u SDNF, sa "**dupliranjem**" pojedinih EK, veoma je naporno i nepregledno

Ovde ćemo dati grafički metod koji za funkciju zadatu SDNF izrazom određuje njen minimalni izraz u obliku DNF. Taj metod zove se **Karnoove mape** i najčešće se koristi za minimizaciju Bulovih funkcija za najviše 6 argumenata.

Karnoove mape

U Karnoovoj mapi svako polje odgovara jednoj EK iz SDNF Bulove funkcije i susedna polja (ona koja imaju zajedničku stranicu) se razlikuju samo u jednom monomu. Karnoove mape za Bulove funkcije od 2, 3 i 4 promenljive su tablice:

	x'	x
y	xy	$x'y$
y'	xy'	$x'y'$

	xy	xy'	$x'y'$	$x'y$
z	xyz	$xy'z$	$x'y'z$	$x'yz$
z'	xyz'	$xy'z'$	$x'y'z'$	$x'yz'$

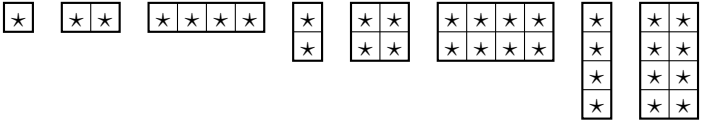
	xy	xy'	$x'y'$	$x'y$
zu	$xyzu$	$xy'zu$	$x'y'zu$	$x'yzu$
zu'	$xyzu'$	$xy'zu'$	$x'y'zu'$	$x'yzu'$
$z'u'$	$xyz'u'$	$xy'z'u'$	$x'y'z'u'$	$x'yz'u'$
$z'u$	$xyz'u$	$xy'zu'$	$x'y'z'u$	$x'yz'u$

Maksimalni obeleženi četvorouglovi

U Karnoovoj mapi grupišemo polja obeležena sa $\star$ na sledeći način.

Definicija (Osnovni obeleženi četvorouglovi)

Sledeći četvorouglovi su osnovni obeleženi četvorouglovi:



Definicija (Proste implikante)

Proste implikante *su maksimalni obeleženi četvorouglovi (nisu sadržani u drugom obeleženom četvorouglu) u Karnoonoj mapi.*

Kada imamo proste implikante, **minimalne disjunktivne normalne forme (MDNF)** dobijamo tako što napravimo dijunkciju ($+$) minimalnog broja prostih implikanti koje prepokrivaju sva obeležena polja u Karoovoj mapi.

Primer 1

Za Bulovu funkciju $f(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz'$, naći sve proste impikante i sve MDNF.

Primer 1

Za Bulovu funkciju $f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz'$, naći sve proste impikante i sve MDNF.

Rešenje. Prvo popunjavamo Karnoovu mapu

	xy	xy'	$x'y'$	$x'y$
z	$\star$	$\star$		
z'	$\star$	$\star$		$\star$

Sada obeležena polja grupišemo u maksimalne obeležene četvorouglove, i tražimo MDNF-ove.

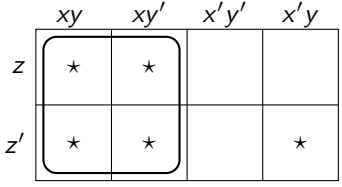
Proste implikante su:

MDNF je:

Primer 1

Za Bulovu funkciju $f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz'$, naći sve proste impikante i sve MDNF.

Rešenje. Prvo popunjavamo Karnoovu mapu



Sada obeležena polja grupišemo u maksimalne obeležene četvorouglove, i tražimo MDNF-ove.

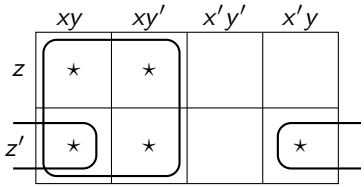
Proste implikante su: x,

MDNF je:

Primer 1

Za Bulovu funkciju $f(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz'$, naći sve proste impikante i sve MDNF.

Rešenje. Prvo popunjavamo Karnoovu mapu



Sada obeležena polja grupišemo u maksimalne obeležene četvorouglove, i tražimo MDNF-ove.

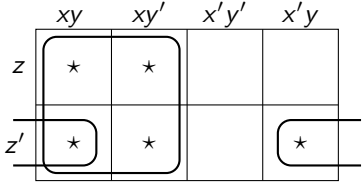
Proste implikante su: x, yz'

MDNF je:

Primer 1

Za Bulovu funkciju $f(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz'$, naći sve proste impikante i sve MDNF.

Rešenje. Prvo popunjavamo Karnoovu mapu



Sada obeležena polja grupišemo u maksimalne obeležene četvorouglove, i tražimo MDNF-ove.

Proste implikante su: x, yz'

MDNF je: $\Phi = x + yz'$.

Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

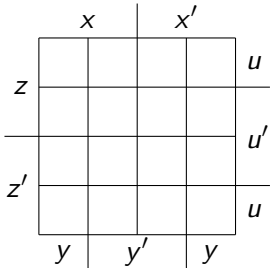
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) =$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

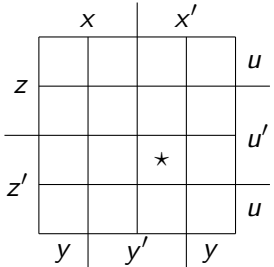
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u'$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

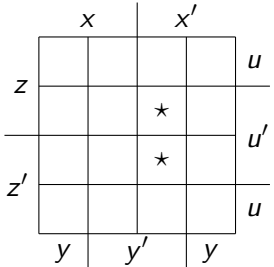
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu'$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

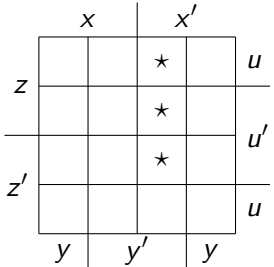
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

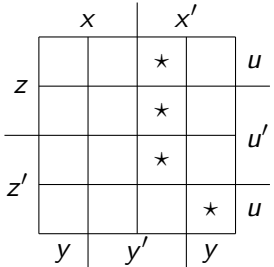
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

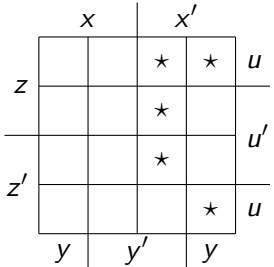
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

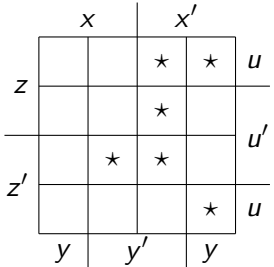
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u'$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

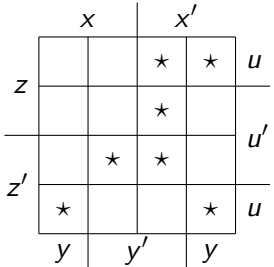
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

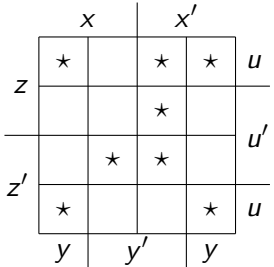
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

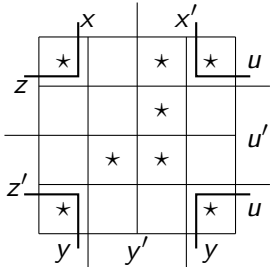
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$



Proste implikante su: yu,

MDNF-ovi su:

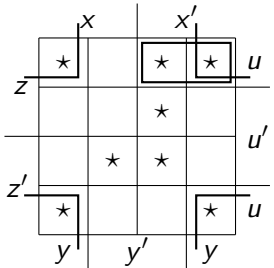
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: yu, $x'zu$,

MDNF-ovi su:

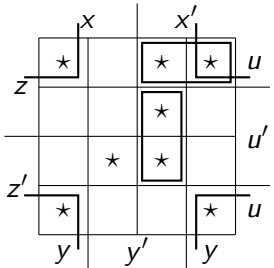
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$,

MDNF-ovi su:

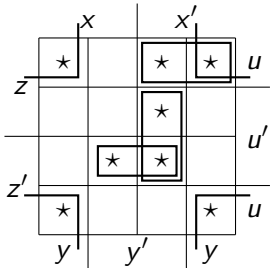
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$, $y'z'u'$,

MDNF-ovi su:

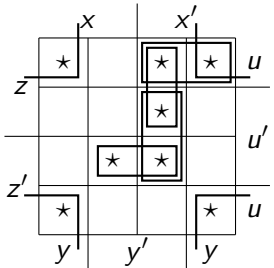
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$, $y'z'u'$, $x'y'z$

MDNF-ovi su:

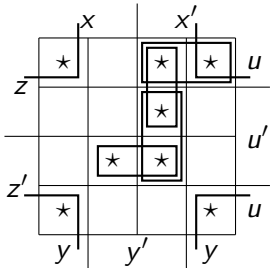
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$, $y'z'u'$, $x'y'z$

MDNF-ovi su: $\Phi = yu+$

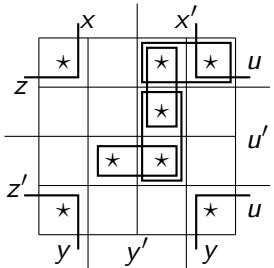
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$, $y'z'u'$, $x'y'z$

MDNF-ovi su: $\Phi = yu + y'z'u' +$

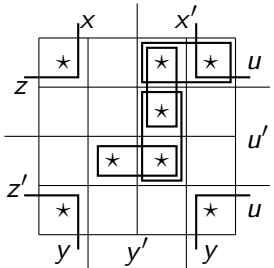
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu mapu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$, $y'z'u'$, $x'y'z$

MDNF-ovi su: $\Phi = yu + y'z'u' + x'y'z$

Šta smo danas radili

- Bulove funkcije i logička kola