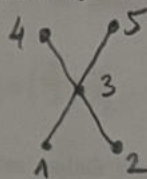


Ime, prezime i broj indeksa: _____

1. (2 boda) Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ data je binarna relacija $\rho = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 5)\}$. Da li je ρ relacija poretka na skupu A ?

☒ DA NE (zaokružiti jedno). Ako jeste, nacrtati Haseov dijagram i naći elemente koji su:

- minimalni: 1, 2
- maksimalni: 4, 5
- najmanji: —
- najveći: —



2. (2 boda) Zaokruži slovo ili slova ispred bijektivnih funkcija.

- (a) $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ definisana sa $f(x) = \sin x$;
- ☒ (b) $g: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ definisana sa $g(x) = \cos x$;
- ☒ (c) $h: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definisana sa $h(x) = x^3$;
- (d) $i: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definisana sa $i(x) = -x^2$;

3. (2 boda) Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$ i $C = \{a, b, c, d, e\}$.

- Napisati primer funkcije $f: A \rightarrow B$ koja je surjektivna i nije injektivna. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & x \end{pmatrix}$
- Napisati primer funkcije $g: A \rightarrow C$ koja je injektivna i nije surjektivna. $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$
- Napisati primer funkcije $h: A \rightarrow A$ koja je bijekcija. $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
- Napisati primer funkcije $i: A \rightarrow B$ koja nije ni injektivna ni surjektivna. $i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$

4. (2 boda) Neka je $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ proizvoljna Bulova algebra. Zaokružiti slovo ili slova ispred tačnih iskaza.

- ☒ (a) $x \cdot 0' + x' = 1$;
- ☒ (b) $x \cdot y = 0 \Rightarrow y = x'$;
- (c) $x \cdot y = 0 \Rightarrow y = x$;
- ☒ (d) $(x + x'y)' = x'y'$;

$$x \cdot 0' + x' = x \cdot 1 + x' = x + x' = 1$$

$$(x + x'y)' = (\underbrace{1(x + x')}(=1)(x + y))' = (x + y)' = x'y'$$

5. (2 boda) Napisati jedan nekomutativne grupe reda 6 i jedan primer beskonačne nekomutativne grupe.

$$(\{f|f: \{1, 2, 3\} \xrightarrow{1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2} \{1, 2, 3\}\}, \circ) - \text{КОММУТАТИВНА}$$

$$(\{f|f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \circ) - \text{БЕСКОММУТАТИВНА}$$

6. (2 boda) Zaokružiti slovo ili slova ispred polja.

- ☒ (a) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- (b) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
- ☒ (c) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$
- (d) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$
- ☒ (e) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

7. (2 boda) Napisati primere linearnih transformacija takvih da:

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i f nije surjektivna. $f(x, y, z) = (0, 0)$
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i f jeste injektivna. $f(x, y) = (x, y, 0)$
- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i f je bijekcija. $f(x, y, z) = (x, y, z)$
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i f nije ni injektivna ni surjektivna. $f(x, y) = (0, 0)$

8. (2 boda) Za linearnu transformaciju $f(x, y) = (x - y, 2x + y)$ naći $f^{-1}(x, y)$, ako postoji.

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \det(M_f) = 3 \neq 0$$

$$M_f^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3}, -\frac{2x}{3} + \frac{y}{3} \right)$$

9. (2 boda) Neka su A i B proizvoljne kvadratne matrice reda 3 nad poljem realnih brojeva i λ realan broj. Zaokruži slovo ili slova ispred tačnih iskaza.

- (a) $A + B = B + A$;
 (b) $AB = BA$;
 (c) $\det(\lambda A) = \lambda A$;
 (d) $\text{rang}(AB) = \max(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$.

10. (2 boda) Ispod svake matrice napiši njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1

11. (5 bodova) Ako je F polje, S sistem linearnih jednačina sa 3 promenljive i $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in F^3$ i $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in F^3$ rešenja sistema S nad poljem F , tada je za svako $\lambda \in F$ rešenje sistema S i

$$(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1, \lambda\alpha_2 + (1-\lambda)\beta_2, \lambda\alpha_3 + (1-\lambda)\beta_3).$$

Dokazati.

Ako je prva jednačina $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$ u

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ u $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ su rešenja TADA VAŽI

$$a_{11}(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1) + a_{12}(\lambda\alpha_2 + (1-\lambda)\beta_2) + a_{13}(\lambda\alpha_3 + (1-\lambda)\beta_3) =$$

$$= \lambda(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3) + (1-\lambda)(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3)$$

$$= \lambda b_1 + (1-\lambda)b_1 = b_1.$$

Ime, prezime i broj indeksa: _____

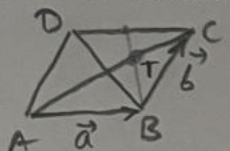
1. (2 boda) Odrediti sve vrednosti realnih parametara a i b za koje je sistem linearnih jednačina $ax + by = 0$ i $by = 0$:

- određen: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$
- kontradiktoran: $\checkmark$
- 1 puta neodređen: $(a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (a \neq 0 \wedge b = 0)$
- 2 puta neodređen: $a = 0 \wedge b = 0$

2. (2 boda) Izračunati determinantu razvojem po trećoj vrsti.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3$$

3. (2 boda) Neka je $ABCD$ paralelogram (neka je AC jedna njegova dijagonala) i neka je T težište trougla BCD . Izraziti vektor $\vec{TB}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$.



$$\begin{aligned} \vec{TB} &= \vec{TA} + \vec{AB} = \frac{2}{3} \vec{CA} + \vec{AB} = \frac{2}{3} (-\vec{a} - \vec{b}) + \vec{a} \\ &= \frac{1}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} \end{aligned}$$

4. (2 boda) Date su ravan $\alpha : x + y = 6$ i prava $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$. Izračunati koordinate tačke u kojoj prava p prodire kroz ravan α .

$$\begin{aligned} \vec{r}_T &= \vec{r}_p + \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_\alpha) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = (1, 2, 0) + \frac{((3, 0, 0) - (1, 2, 0)) \cdot (1, 1, 0)}{(1, 1, 0) \cdot (2, 1, 3)} (2, 1, 3) = (1, 2, 0) + \frac{3}{3} (2, 1, 3) \\ &= (3, 3, 3) \end{aligned}$$

5. (2 boda) Neka su a, b i c linearno nezavisni slobodni vektori. Tada je u vektorskom prostoru slobodnih vektora trojka vektora $(a + b - c, a - b, c)$ (zaokružiti tačno):

- ☒ (a) nezavisna;
- ☐ (b) generatorna;
- ☐ (c) zavisna;
- ☐ (d) baza.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

6. (2 boda) Zaokružiti slovo ili slova ispred onih struktura koja čine vektorski prostor $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ za:

- ☒ (a) $V = \{(x, y) \mid x = 0, x, y \in \mathbb{R}\};$
- ☒ (b) $V = \{(x, y) \mid x + y = 0, x, y \in \mathbb{R}\};$
- ☐ (c) $V = \{(x, y, z) \mid x + y = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\};$
- ☐ (d) $V = \{(x, y, z) \mid x + y = 0, x, y, z \in \mathbb{Q}\}.$

7. (2 boda) U polju kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3 + 1 - i = 0$.

$$z^3 = -1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$z = \sqrt[3]{2} e^{\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}i}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2} e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2} e^{-\frac{\pi}{12}i}$$

8. (2 boda) Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih kompleksnih funkcija $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i ispitati da li su bijekcije.

• $f(z) = ze^{\frac{2\pi}{3}i}$ je OSNA SIMETRIJA U ODNOSU NA OSU KOJA ZAKLAPTA $\frac{\pi}{3}$ SA Re^+ , BIJEKCIJA

• $g(z) = ze^{\frac{2\pi}{3}i}$ je ROTACIJA OKO 0 ZA UGAO $\frac{2\pi}{3}$, BIJEKCIJA

9. (2 boda) Nad poljem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ naći NZD za polinome $P(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ i $Q(t) = t^2 - t - 1$.

$$\begin{array}{r} (t^3 - t^2 - t - 1) : (t^2 - t - 1) = t \\ \underline{t^3 - t^2 - t} \\ -1 \end{array}$$

$$\text{NZD}(P(t), Q(t)) = \underline{1} \quad (\text{UZAJAMNO SU PROSTI})$$

10. (2 boda) Proveri svodljivost polinoma $P(t) = t^2 + t + 1$ nad poljima: $t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$

• $\mathbb{Q}$ NE SVODLJIV (NEMA KORENA)

• $\mathbb{R}$ NE SVODLJIV — 1) —

• $\mathbb{Z}_3$ $P(1) = 0$ — SVODLJIV

• $\mathbb{Z}_5$ NE SVODLJIV JER $P(0)=1, P(1)=3, P(2)=2, P(3)=3, P(4)=1$

11. (5 bodova) Neka su $S, T \in F[t]$ nenula polinomi, gde je $(F, +, \cdot)$ polje. Tada postoji tačno jedan normalizovan polinom $W \in F[t]$ takav da je $\text{NZD}(S, T) = W$, pri čemu se W dobija iz Euklidovog algoritma. Dokazati.

Hećka je $\text{dg}(S) \geq \text{dg}(T)$. PRIMENIMO EUKLIDOV ALGORITAM:

$$\begin{array}{l} (0) \quad S = Q_1 T + R_1, \quad \text{dg}(R_1) < \text{dg}(T) \\ (1) \quad T = Q_2 R_1 + R_2, \quad \text{dg}(R_2) < \text{dg}(R_1) \\ \vdots \\ (k-1) \quad R_{k-2} = Q_{k-1} R_{k-1} + R_k, \quad \text{dg}(R_k) < \text{dg}(R_{k-1}) \\ (k) \quad R_{k-1} = Q_k R_k \end{array}$$

Kako je $\text{dg}(R_k) = 0$ ili $R_{k+1} = 0$.

TVRDIAMO $\text{NZD}(S, T) = R_k$,
A NORMALIZOVAN NZD JE $W = R_k \bar{a}$,
GDE JE a VODEĆI KOEF OD R_k .

IZ (K) SLEDI $R_k | R_{k-1}$, PA IZ (K-1) SLEDI $R_k | R_{k-2}$, UTO, IZ (1) SLEDI $R_k | T$, PA IZ (0) SLEDI $R_k | S$. AKO JE $W | S$ I $W | T$, TADA IZ (0) SLEDI $W | R_1$, PA IZ (1) SLEDI $W | R_2$, UTO, IZ (K-1) SLEDI $W | R_k$.
ZAKLE, R_k JESTE NZD ZA S I T . JEDINSTVENOST SLEDI IZ $W = \bar{a}' R_k$ (KER JE NORMALIZOVAN).