

Prvi deo

- (9 bodova) Za $a \in (0, \infty)$, neka je funkcija $f_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definisana sa $f_a(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, i neka je $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in (0, \infty)\}$. (a) Dokazati da je $(\mathcal{F}, \cdot)$ komutativna grupa, gde je operacija $\cdot$ množenje funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. (b) Ispitati da li je $(\mathcal{F}, \circ)$ grupoid, gde je $\circ$ kompozicija funkcija.
- (8 bodova) Nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ faktorizirati polinom $p(x) = 1024x^5 + 256x^4 + 64x^3 + 16x^2 + 4x + 1$.
- (8 bodova) Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $\frac{z^2}{|z|\bar{z}} = i$.

Drugi deo

- (8 bodova) Neka je P tačka koja pripada pravoj p , a $\vec{p} \neq \vec{0}$ vektor paralelan sa pravom p . Neka tačke A i C ne pripadaju pravoj p , i neka je $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{p} \neq 0$. (a) U zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_C$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektor položaja vrha B jednakokrakog trougla čija je osnovica AC , a vrh B pripada pravoj p . (b) Neka je AC dijagonala romba. U zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_C$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja preostala dva temena romba od kojih jedno pripada pravoj p .
- (8 bodova) Diskutovati po $a, b \in \mathbb{R}$ i rešiti po $x, y, z \in \mathbb{R}$ sistem jednačina
$$\begin{array}{rrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b^2 \\ x & + & ay & + & az & = & 1 \end{array}$$
- (9 bodova) Rešiti po izboru jedan od sledećih zadataka:
 - (1) Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 2, -4)$, i neka je linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{b}$. (a) Ispitati da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni. (b) Odrediti $f(x, y, z)$, i napisati matricu linearne transformacije f .
 - (2) Dokazati da je skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina
$$\begin{array}{rrcr} -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$
potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu bazu tog potprostora.

REŠENJA ZADATAKA

1. (a) Uočimo da za $a, b \in (0, \infty)$, odnosno $f_a, f_b \in \mathcal{F}$ važi

$$[1]: f_a \cdot f_b = f_{ab}, \quad \text{jer za svako } x \in \mathbb{R} \text{ važi}$$

$$(f_a \cdot f_b)(x) = f_a(x) \cdot f_b(x) = a^x \cdot b^x = (ab)^x = f_{ab}(x).$$

- (a.1) Iz $a, b \in (0, \infty)$ sledi $ab \in (0, \infty)$, te zbog [1] sledi da je $(\mathcal{F}, \cdot)$ grupoid.

- (a.2) Asocijativnost operacije $\cdot$ u grupoidu $(\mathcal{F}, \cdot)$ sledi zbog [1]. Naime, za sve $a, b, c \in (0, \infty)$ je

$$(f_a \cdot f_b) \cdot f_c \stackrel{[1]}{=} f_{ab} \cdot f_c \stackrel{[1]}{=} f_{(ab)c} = f_{a(bc)} \stackrel{[1]}{=} f_a \cdot f_{bc} \stackrel{[1]}{=} f_a \cdot (f_b \cdot f_c).$$

- (a.3) Komutativnost operacije $\cdot$ u grupoidu $(\mathcal{F}, \cdot)$ sledi zbog [1]. Naime, za sve $a, b \in (0, \infty)$ je

$$f_a \cdot f_b \stackrel{[1]}{=} f_{ab} = f_{ba} \stackrel{[1]}{=} f_b \cdot f_a.$$

- (a.4) Neutralni element operacije $\cdot$ u grupoidu $(\mathcal{F}, \cdot)$ je funkcija $f_1 \in \mathcal{F}$ (jer $1 \in (0, \infty)$). Naime, za sve $a \in (0, \infty)$ iz [1] sledi $f_1 \cdot f_a \stackrel{[1]}{=} f_{1 \cdot a} = f_a$, i analogno $f_a \cdot f_1 = f_a$.

- (a.5) Inverzni element za $f_a \in \mathcal{F}$ u $(\mathcal{F}, \cdot)$ (gde je tada $a \in (0, \infty)$) je $f_{\frac{1}{a}} \in \mathcal{F}$ (jer je $\frac{1}{a} \in (0, \infty)$ za $a \in (0, \infty)$). Naime, za sve $a \in (0, \infty)$ iz [1] sledi

$$f_{\frac{1}{a}} \cdot f_a \stackrel{[1]}{=} f_{\frac{1}{a} \cdot a} = f_1,$$

$$\text{i analogno } f_a \cdot f_{\frac{1}{a}} = f_1.$$

Drugi način: Dokažimo da je struktura $(\mathcal{F}, \cdot)$ izomorfna sa komutativnom grupom $(\mathbb{R}, \cdot)$, odakle tada sledi da je i $(\mathcal{F}, \cdot)$ komutativna grupa. Neka je funkcija $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{F}$ definisana sa $\varphi(a) = f_a$, $a \in (0, \infty)$.

- (1) Funkcija φ je bijektivna. Naime, s jedne strane za svako $f_a \in \mathcal{F}$ postoji $a \in (0, \infty)$ gde je $\varphi(a) = f_a$, te je φ surjektivna funkcija. S druge strane, za različite $a, b \in (0, \infty)$ su različite i funkcije $\varphi(a) = f_a$ i $\varphi(b) = f_b$ jer je tada npr. $f_a(2) = a^2 \neq b^2 = f_b(2)$.

- (2) Važi $\varphi(ab) = f_a \cdot f_b$ jer je $\varphi(ab) = f_{ab} \stackrel{[1]}{=} f_a \cdot f_b$.

- (b) Iz sledećeg kontraprimera sledi da $(\mathcal{F}, \circ)$ nije grupoid. Dokažimo npr. da za $f_2 \in \mathcal{F}$ (jer $2 \in (0, \infty)$) važi $f_2 \circ f_2 \notin \mathcal{F}$. Potrebno je da dokažemo da ne postoji $a \in (0, \infty)$ takvo da je $f_2 \circ f_2 = f_a$, odnosno

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_2 \circ f_2)(x) = f_a(x).$$

Pretpostavimo suprotno, dakle da postoji $a \in (0, \infty)$ takvo da je

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = 2^{2^x} = f_a(x) = a^x,$$

dakle $2^{2^x} = a^x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada npr. za $x = 0$ dobijamo $2^{2^0} = a^0$ odnosno $2 = 1$, čime smo dobili kontradikciju.

2. Polinom $p(x)$ možemo posmatrati kao zbir prvih 6 članova geometrijskog niza sa prvim članom 1 i koeficijentom progresije $4x$, te primenom formule za zbir prvih 6 članova geometrijskog niza dobijamo

$$p(x) = 1 \cdot \frac{(4x)^6 - 1}{4x - 1} = \frac{4^6 x^6 - 1}{4x - 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4^6 x^6 - 1 = 0 \quad \wedge \quad 4x - 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^6 = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4^6} e^{0 \cdot i} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{4} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x \in \sqrt[6]{\frac{1}{4^6} e^{0 \cdot i}} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \left\{ \sqrt[6]{\frac{1}{4^6} e^{\frac{2k\pi i}{6}}} \mid k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \right\} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \left\{ \frac{1}{4} e^{\frac{2k\pi i}{6}} \mid k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \right\} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i}{3}}, -\frac{1}{4} \right\}.$$

Odavde redom dobijamo faktORIZACIJE polinoma p nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1024 \underbrace{\left(x - \frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) \left(x + \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i}{3}} \right) \left(x - \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{3}} \right) \left(x + \frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{3}} \right)}_{\left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{2\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right) \left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right)} \left(x + \frac{1}{4} \right) \\ &= 1024 \left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{2\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right) \left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right) \left(x + \frac{1}{4} \right) \\ &= 1024 \left(x^2 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{16} \right) \left(x^2 - \frac{1}{4} x + \frac{1}{16} \right) \left(x + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

3. Jednačina nije definisana za $z = 0$. Za $z \neq 0$, smenom $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{|z|\bar{z}} = i &\Leftrightarrow \frac{\rho^2 e^{i2\varphi}}{\rho \cdot \rho e^{-i\varphi}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i3\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \left(\rho \in (0, \infty) \wedge 3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\rho \in (0, \infty) \wedge \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi = \frac{(1+4k)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right) \\ &\Leftrightarrow z \in \left\{ \rho e^{-\frac{1}{2}\pi i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\} \cup \left\{ \rho e^{\frac{5}{6}\pi i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\} \cup \left\{ \rho e^{\frac{1}{6}\pi i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{ \rho i \mid \rho \in (0, \infty) \} \cup \left\{ \rho e^{\frac{5}{6}\pi i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\} \cup \left\{ \rho e^{\frac{1}{6}\pi i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\}. \end{aligned}$$

4. (a) Neka je S sredina duži AC , dakle $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C)$, i neka je α simetralna ravan duži AC . Ravan α tada sadrži tačku S a $\vec{AC}$ je njen vektor normale. Kako je ABC jednakokraki trougao sa vrhom u B , sledi da tačka B leži u ravni α . Dakle, $B = p \cap \alpha$, te je $\vec{r}_B = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_S - \vec{r}_P) \cdot \vec{AC}}{\vec{AC} \cdot \vec{p}} \vec{p}$.
- (b) Tačka B iz dela (a) zadatka je upravo jedno teme traženog romba $ABCD$, a tačka S iz (a) je presek njegovih dijagonala. Stoga iz $\vec{BS} = \vec{SD}$ sledi $\vec{r}_D = \vec{r}_S + \vec{r}_S - \vec{r}_B = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$.

5. Nakon što prvu jednačinu oduzmemo od druge i treće, a zatim drugu oduzmemo od treće, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ (a-1)y &= b^2 - 1, & \text{odakle sledi} \\ (a-1)z &= 1 - b^2 \end{aligned}$$

(1) za $a \neq 1$ je sistem određen, i skup rešenja je $R_S = \left\{ 1, \frac{b^2 - 1}{a - 1}, \frac{1 - b^2}{a - 1} \right\}$;

(2) za $a = 1$ je sistem ekvivalentan sa

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 0 &= b^2 - 1, \end{aligned} \quad \text{te imamo podslučajeve:}$$

(2.1) za $b \notin \{-1, 1\}$ je sistem kontradiktoran ($R_S = \emptyset$);

(2.2) za $b \in \{-1, 1\}$ je sistem ekvivalentan sa $x + y + z = 1$, te je 2 puta neodređen i skup rešenja mu je $R_S = \{(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

6. (1) (a) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni jer je $\vec{b} = -2\vec{a}$.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \vec{v} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2y + z, -2x + z, -x - y), \\ \vec{v} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{v} \times (-2\vec{a}) = -2(\vec{v} \times \vec{a}) \\ &= (-4y - 2z, 4x - 2z, 2x + 2y), \\ f(x, y, z) &= (2y + z, -2x + z, -x - y) + (-4y - 2z, 4x - 2z, 2x + 2y) \\ &= (-2y - z, 2x - z, x + y), \\ M_f &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) Nakon što prvu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na drugu, prvu jednačinu oduzmemo od treće, a zatim drugu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na treću, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} -x - y + 2z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}$$

čiji je skup rešenja

$$\mathcal{R} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Lin}\{(1, 1, 1)\}.$$

Sledi da je $\mathcal{R}$, kao lineal, potprostora $\mathbb{R}^3$ (teorema). Jedna baza mu je $\{(1, 1, 1)\}$ jer je, kao lineal nad $(1, 1, 1)$, skup $\mathcal{R}$ generisan sa $(1, 1, 1)$, a vektor $(1, 1, 1) \neq \vec{0}$ je i linearno nezavisan.