Fakultet tehničkih nauka
Energetika, elektronika i telekomunikacije

ALGEBRA
ZADACI

10. 8. 2025.
Novi Sad

Prvi deo

1. (8 bodova) Ispitati sve aksiome Abelove grupe za strukturu $(\{A, B, C, D\}, \cdot)$, ako je $\cdot$ množenje matrica, a matrice A, B, C i D date sa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. (8 bodova) Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $\dfrac{2z+1}{i-\overline{z}} = 2z$.

3. (9 bodova) Polinom $p(x) = x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 81x + 243$ napisati kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljima $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$.

Drugi deo

1. (8 bodova) U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & ay & + & (a+2)z & = & a \\ ax & + & (a+2)y & + & (a-1)z & = & a \\ ax & + & (a+2)y & + & (2a+3)z & = & 1 \end{array}$$

i rešiti ga u slučaju neodređenosti.

2. (8 bodova) Ravan α sadrži tačku A i normalna je na vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$, a prava p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p} \neq \vec{0}$. Pri tome je $\alpha \nparallel p$, $P \notin \alpha$ i $A \notin p$. U funkciji od $\vec{a}$, $\vec{p}$ i vektora položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_P$ tačaka A i P, izraziti vektore položaja tačaka B i C tako da ABC bude jednakostranični trougao koji leži u ravni α i $B \in p$.

3. (9 bodova) Odrediti dimenziju vektorskog prostora V generisanog petorkom vektora (a, b, c, d, e) i naći sve podskupove skupa $A = \{a, b, c, d, e\}$ koji su baze prostora V ako su sve zavisnosti skupa vektora A date jednakostima

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} a & - & b & + & c & + & d & + & 2e & = 0 \\ a & + & 2b & - & c & + & d & + & e & = 0 \\ -a & - & 5b & + & c & - & d & & & = 0 \\ a & - & 4b & + & c & + & d & + & e & = 0 \end{array}$$

kao i njihovim linearnim kombinacijama.