

Ime, prezime i broj indeksa: _____

PELUEHA

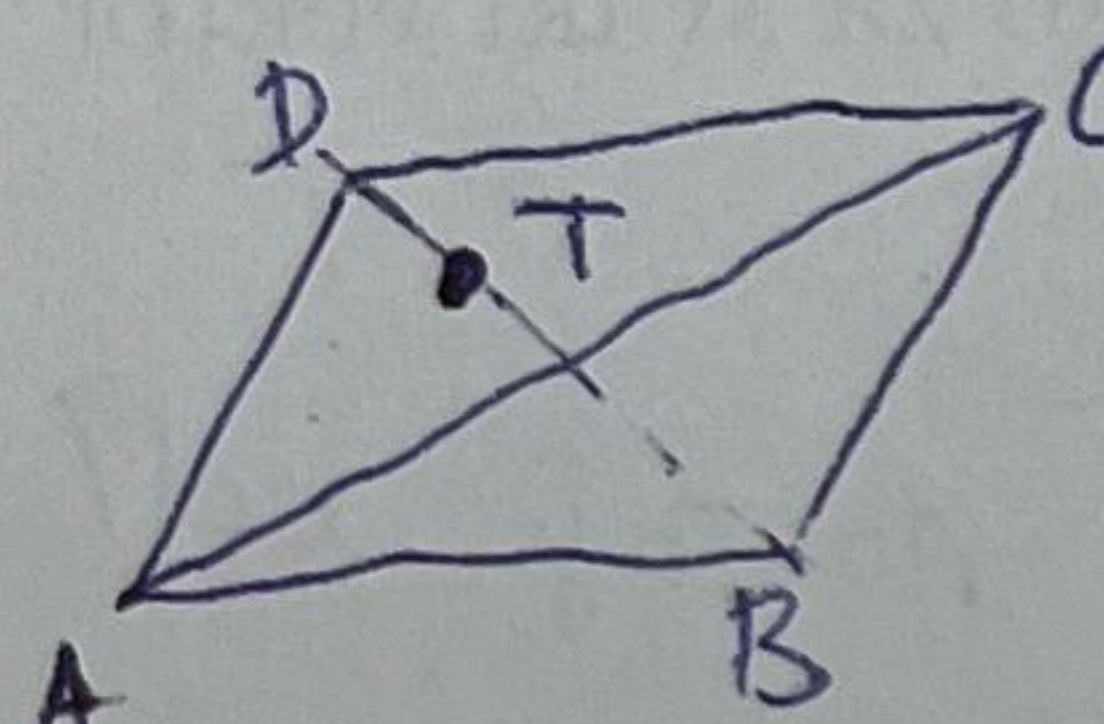
1. (2 boda) Odrediti sve vrednosti realnih parametara a i b za koje je sistem linearnih jednačina $ax + y = a$ i $x + ay = b$:

- određen: $a \neq 1 \wedge a \neq -1$
- kontradiktoran: $(a=1 \wedge b \neq 1) \vee (a=-1 \wedge b \neq 1)$
- 1 puta neodređen: $(a=1=b) \vee (a=-1 \wedge b=1)$
- 2 puta neodređen: ---

2. (2 boda) Izračunati determinantu svođenjem na trougaoni oblik.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

3. (2 boda) Neka je $ABCD$ paralelogram čija je jedna dijagonala AC . Ako su date koordinate tačaka $A(1, 0, 2)$, $B(2, 0, 1)$ i $C(1, 1, 1)$, odrediti koordinate težišta trougla ACD .



$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{r}_C - \vec{r}_B = (1, 0, 2) + (1, 1, 1) - (2, 0, 1) = (0, 1, 2)$$

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_D}{3} = \frac{(1, 0, 2) + (1, 1, 1) + (0, 1, 2)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

4. (2 boda) Date su prava $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ i ravan $\alpha : x = 1$. Napisi jedan vektor pravca prave p , $\vec{p} = (1, 2, 3)$, jedan vektor normale ravni α , $\vec{n} = (1, 0, 0)$, i koordinate tačke A koja pripada i pravoj p i ravni α , $A(1, 1, 0)$.

5. (2 boda) Zaokružiti slovo/slova ispred n -torki vektora koje su baze $\mathbb{R}^3$.

- (a) $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 0))$
☒ (b) $((1, 0, 0), (-1, -1, 0), (1, 1, -1))$
(c) $((-1, 0, 0), (-1, -1, 0), (1, 1, 1), (2, 1, 2))$
(d) $((-1, -1, 1), (2, -1, 2))$

6. (2 boda) Zaokružiti slovo/slova ispred skupova za koje je $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ potprostor vektorskog prostora $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

- ☒ (a) $V = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
☒ (b) $V = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = x, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
(c) $V = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 1, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
(d) $V = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 0, x, y, z \in \mathbb{Q}\}$

7. (2 boda) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linearna transformacija i neka je $f(1, 1) = (1, 1)$ i $f(0, -1) = (0, 1)$.

- (a) Izračunati $f(1, 0) = (1, 2)$ i $f(0, 1) = (0, -1)$
(b) Napisati matricu M_f linearne transformacije f u standardnoj bazi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

8. (2 boda) Za linearnu transformaciju $f(x, y, z) = (x - y, 2x, z)$ izračunati $f^{-1}(x, y, z)$, ako postoji.

$$\det(M) = 2 \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9. (2 boda) Neka su A i B proizvoljne kvadratne matrice reda 3 nad poljem realnih brojeva. Zaokruži slovo/slova ispred tačnih iskaza.

- (a) $\det(A) = 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$
 (b) $\text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \det(A) = 3$
 (c) $\text{rang}(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$
 (c) $\text{rang}(A) < 3 \Rightarrow \det(A) = 0$

10. (2 boda) Ispod matrica napiši njihove rangove.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2

11. (5 bodova) Svaka n -torka vektora $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ jeste baza vektorskog prostora V akko za svaki vektor $x \in V$ postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ takvi da je

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$$

Dokazati.

($\Rightarrow$) Нека је B база. Претпоставимо ~~копирати репрезентације~~, да постоји $x \in V$

који има две репрезентације преко B , тј.

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \quad \text{и} \quad x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n.$$

Тада следује $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$, па пошто је B база следује $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

($\Leftarrow$) Пошто B генерише све $x \in V$, треба још показати линеарну независност.

Важно да $\forall x \in V$ постоје јединствени $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такви да је

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n, \quad \text{па за } x = 0 \text{ имамо } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0, \text{ одакле следује}$$

да су $a_1, a_2, \dots, a_n$ линеарно независни.

Fakultet tehničkih nauka
Energetika, elektronika i telekomunikacije

ALGEBRA
ZADACI - drugi deo

1. 3. 2026.
Novi Sad

1. (8 bodova) Diskutovati po $a \in \mathbb{R}$ i rešiti po $x, y, z, u \in \mathbb{R}$ sistem jednačina:

$$\begin{aligned} ax + y + z + u &= 0 \\ x + ay + az + au &= 0 \\ x + y + az + u &= 2 \\ x + y + z + au &= 6 \end{aligned}$$

2. (8 bodova) Ravan α sadrži tačku A i normalna je na vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$, a prava p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p} \neq \vec{0}$. Pri tome je $\alpha \nparallel p$, $P \notin \alpha$ i $A \notin p$. U funkciji od $\vec{a}$, $\vec{p}$ i vektora položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_P$ tačaka A i P , izraziti vektore položaja tačaka B , C i D tako da $ABCD$ bude kvadrat koji leži u ravni α , pri čemu B pripada pravoj p , a A i B su susedna temena.

3. (9 bodova) Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, -4, 4)$, $\vec{c} = (-1, 2, -2)$, i neka je linearna transformacija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(\vec{v}) = (\vec{a} \times \vec{v} - \vec{b}) \times \vec{c}$.

- (a) Ispitati da li su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno nezavisni.
 (b) Odrediti $f(x, y, z)$ i napisati matricu linearne transformacije f .
 (c) Odrediti dimenziju prostora $f(\mathbb{R}^3)$.