Fakultet tehničkih nauka
Energetika, elektronika i telekomunikacije

ALGEBRA
TEST - prvi deo

10. 8. 2025.
Novi Sad

Ime, prezime i broj indeksa: РЕШЕЊА

1. (2 boda) Zaokružiti slova koja odgovaraju osobinama koje važe za date binarne relacije, gde je R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost. F - funkcija.
   - $\rho_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ R S A T F
   - $\rho_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2>1,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ R S A T F
   - $\rho_3 = \{(x,y) \mid x-y=0,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ R S A T F
   - $\rho_4 = \{(x,y) \mid x-y>0,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ R S A T F

2. (2 boda) Zaokruži slova ispred injektivnih funkcija.
   (a) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ definisana sa $f(x)=\sin x$;
   (b) $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ definisana sa $g(x)=\cos x$;
   (c) $h : [-1,1] \to [-1,1]$ definisana sa $h(x)=x^2$;
   (d) $i : [-1,1] \to [-1,1]$ definisana sa $i(x)=-x$;

3. (2 boda) Odrediti brojeve elemenata sledećih skupova.
   - $|\{f \mid f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}\}| =$ $4^3=256$
   - $|\{f \mid f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\},\ f \text{ je injektivna}\}| =$ $4\cdot3\cdot2=24$
   - $|\{f \mid f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\},\ f \text{ je rastuća}\}| =$ $\binom{4}{3}=4$
   - $|\{f \mid f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\},\ f \text{ je sirjektivna}\}| =$ 0

4. (2 boda) Neka je $(B,+,\cdot,',0,1)$ proizvoljna Bulova algebra.
   - Proveriti tačnost izraza
     (a) $xy=0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$ i (b) $(x=0\vee y=0) \Rightarrow xy=0$.
     НЕТАЧНО: ЗА $x\neq0$ и $y=x'\neq0$
     $x\cdot y = x\cdot x' = 0$
     ТАЧНО; $a\cdot0=0\cdot a=0$ (ОГРАНИЧЕНОСТ)
   - Bulov izraz $(x+yz)(x'z)'$ predstaviti u obliku SDNF.

$$(x+yz)(x'z)' = (x+yz)(x+z') = \underbrace{xx}_{x} + xz' + yzx + \overbrace{yzz'}^{0} =$$
$$= x(y+y')(z+z') + xyz = \underline{xyz} + xyz' + xy'z + xy'z' + \underline{xyz} = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

5. (2 boda) Zaokruži slovo ispred tačnih iskaza ako su $x,y,z\in G$, gde je $(G,\star)$ proizvoljna grupa u kojoj je e neutralni element, a sa x^{-1} je označen inverzni element od x.
   (a) $x\star y=e \Rightarrow y=e\star x^{-1}$
   (b) $x\star y=z \Rightarrow y=z\star x^{-1}$
   (c) $x\star z=y\star z \Rightarrow x=z$
   (d) $x\star z=y\star z \Rightarrow x=y$

6. (2 boda) Zaokružiti slovo ispred domena integriteta.
   (a) $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ (b) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ (c) $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ (d) $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ (c) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

$1+e^{\pi/3\, i} = e^{\pi/6\, i}\left(e^{-\pi/6\, i}+e^{\pi/6\, i}\right)$

$= 2\cos\frac{\pi}{6}\, e^{\pi/6\, i}$

7. (2 boda) Izračunati argumente sledećih kompleksnih brojeva.

- $\arg\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) =$ $\pi/3$
- $\arg\left(-e^{\frac{\pi}{3}i}\right) =$ $-2\pi/3$
- $\arg\left(-e^{\frac{\pi}{3}}\right) =$ π
- $\arg\left(1+e^{\frac{\pi}{3}i}\right) =$ $\pi/6$

8. (2 boda) Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih kompleksnih funkcija $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i ispitati da li su bijekcije.

- $f(z) = -\overline{z}$ je ОСНА СИМЕТРИЈА У ОДНОСУ НА Im-ОСУ (БИЈЕКЦИЈА)
- $g(z) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ je РОТАЦИЈА ОКО 0 ЗА УГАО $\pi/3$ (БИЈЕКЦИЈА)

$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z = e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot z$

$-1=2$
$-2=1$

9. (2 boda) Nad poljem $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ naći NZD za polinome $P(t) = t^3+t^2-t-1$ i $Q(t) = t^2+t+1$.

$(t^3+t^2+2t+2) : (t^2+t+1) = t$
$\underline{-t^3 \pm t^2 \pm t}$
$= t+2$

$(t^2+t+1) : \boxed{(t+2)} = t+2$
$\underline{-t^2 \pm 2t}$
$2t+1$
$\underline{2t+1}$
$= 0$

$\mathrm{NZD}(P(t), Q(t)) =$ $t+2$

10. (2 boda) Ako je $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $f(1+i) = 0$, zaokruži slovo ispred tačnih iskaza:

(a) $(x-1+i) \mid f(x)$
(b) $(x+1+i) \mid f(x)$
(c) $(x-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}) \mid f(x)$
(d) $(x+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}) \mid f(x)$

11. (5 bodova) Svaki konačan domen integriteta je i polje. Dokazati.

Нека је $(R, +, \cdot)$ домен интегритета и нека је $R = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Треба доказати да за $x \in R\setminus\{0\}$ постоји $x^{-1} \in R\setminus\{0\}$. Нека је $S = \{xx_1, xx_2, \ldots, xx_n\}$. За $x_i \neq x_j$ имамо да $xx_i \neq xx_j$, јер би у супротном имали $xx_i - xx_j = 0 \Leftrightarrow x(x_i - x_j) = 0 \Rightarrow x_i = x_j$.
То значи да је $S = R$, а како $1 \in R = S$, следи да је за неко i $xx_i = 1$, тј. $x_i = x^{-1}$.

Fakultet tehničkih nauka
Energetika, elektronika i telekomunikacije

ALGEBRA
TEST - drugi deo

10. 8. 2025.
Novi Sad

Ime, prezime i broj indeksa: РЕШЕЊА

1. (2 boda) Odrediti sve vrednosti realnih parametara a i b za koje je sistem linearnih jednačina $ax + by = a$ i $ay = b$:

   - određen: $a \neq 0$
   - kontradiktoran: $a = 0 \wedge b \neq 0$
   - 1 puta neodređen: —
   - 2 puta neodređen: $a = b = 0$

$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$

- $a = 0$

$by = 0$

$0 = b$

2. (2 boda) Izračunati sledeće determinante razvojem po drugoj koloni.

   - $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1) + 1 \cdot 1 = 3$
   - $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 8 = -2$

3. (2 boda) Zaokruži slovo ispred iskaza koji je ekvivalentan sa iskazom da su slobodni nenula vektori $\vec{x} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ i $\vec{y} = \delta\vec{i} + \epsilon\vec{j} + \zeta\vec{k}$ **kolinearni.**

   (a) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu paralelni;

   (b) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$;

   (c) $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\beta}{\epsilon} = \frac{\gamma}{\zeta}$;

   (d) **rang** $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \zeta \end{bmatrix} = 1$.

4. (2 boda) Ravan α zadata je svojom jednačinom $\alpha : x + y = 1$.

   - Napisati jedinični vektor normale ravni α. $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
   - Napisati koordinate tačke koja pripada ravni α i koja leži na x-osi. $(1, 0, 0)$

5. (2 boda) Data je trojka vektora $a = (1, 0, -1), b = (2, 1, 5)$ i $c = (1, 1, 1)$ u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

   - Ispitati linearnu zavisnost vektora a, b i c;

$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,1,5) + \mu(1,1,1) = (0,0,0)$

$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha + 5\beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \;/\cdot(-7) \\ 7\beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \\ -5\gamma &= 0 \end{aligned}$

$\gamma = 0, \beta = 0, \alpha = 0 \Rightarrow a, b$ и c су линеарно независни

   - Odrediti jednu bazu i dimenziju vektorskog prostora koji generišu vektori a, b i c.

Пошто су a, b и c линеарно независни они чине базу простора $V = Lin(a, b, c) = \mathbb{R}^3$. $\dim(V) = 3$.

6. (2 boda) Zaokružiti slova ispred onih struktura koja čine vektorski prostor $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ za:

   (a) $V = \{(x, y, z) \,|\, x = 1,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

   (b) $V = \{(x, y, z) \,|\, x + y = 0,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

   (c) $V = \{(x, y, z) \,|\, \frac{x}{-2} = y = \frac{z}{2},\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

   (b) $V = \{(x, y, z) \,|\, x + y = 0,\ x, y, z \in \mathbb{Q}\}$

7. (2 boda) Date su linearne transformacije $f(x,y) = (-y,x)$ i $g(x,y) = (x+y,0)$.

- Odrediti skup slika linearne transformacije g, tj. naći $g(\mathbb{R}^2)$.

$g(\mathbb{R}^2) = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ – ТО ЈЕ X-ОСА

- Odrediti funkciju h, ako je $h = f \circ g$. Da li je h linearna transformacija? Obrazložiti odgovor.

Преко матрица:

$M_f = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_h = M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Следи $h(x,y) = (0, x+y)$ и h јесте лин. трансф. јер има одговарајући облик.

8. (2 boda) Za linearnu trasformaciju $f(x,y,z) = (2x+y-z, y, x+z)$ naći $f^{-1}(x,y,z)$, ako postoji.

Преко матрица

$M_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det(M_f) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, M_f^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Следи $h(x,y,z) = \frac{1}{3}(x-y+z, 3y, -x+y+2z)$.

9. (2 boda) Neka su A, B, C i D proizvoljne kvadratne matrice reda 3 nad poljem realnih brojeva. Zaokruži slova ispred tačnih iskaza.

(a) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$

(b) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(c) $A(B+C) = BA + CA$

(d) $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(A) \cdot \operatorname{rang}(B)$

$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} /(\tfrac{1}{2}) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(C) = 3$

10. (2 boda) Ispod svake matrice napiši njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} /(-1)$ 3

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2

11. (5 bodova) Svaka n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jeste baza vektorskog prostora V akko je B maksimalna linearno nezavisna n-torka (tj. dodavanjem jednog vektora u B dobija se linearno zavisna $(n+1)$-torka). Dokazati.

($\Rightarrow$) Нека је B база. Тада се сваки вектор $a \in V$ може представити као линеарна комбинација вектора из B, тј. $B \cup \{a\}$ јесте линеарно зависна. Дакле, B јесте максимална линеарно независна n-торка.

($\Leftarrow$) Нека је B максимална линеарно независна n-торка у V и нека је $a \in V$. Тада је $B \cup \{a\}$ лин. зависна па је $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n + \beta a = 0$ – за $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ при чему је бар један различит од нуле. Ако би $\beta = 0$ онда би и $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ (јер су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линеарно независни). Следи $\beta \neq 0$, а одатле добијамо

$a = -\beta^{-1}\alpha_1 a_1 - \beta^{-1}\alpha_2 a_2 - \ldots - \beta^{-1}\alpha_n a_n$

Из овога закључујемо B генерише све векторе из V, а пошто је B и линеарно независан, следи да је B база простора V.