Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 3

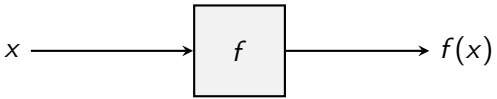
Na prethodnom času

- Rekacije ekvivalencije
  - Klase ekvivalencije i faktor skup (particije)
  - Skup $\mathbb{Z}_n$
- Relacije poretka (parcijalno uređeni skupovi)
  - Haseov dijagram
  - Najmanji, najveći, min i max elementi
  - Lanci i dobro uređeni skupovi

Funkcije

Šta su funkcije?

Funkciju f zamišljamo kao operator koji neke elemente x pretvara u izlazne elemente $f(x)$.



Deo specifikacije svake funkcije mora odgovoriti na pitanja:

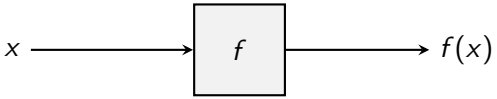
- Za koje x radi?
- Šta sve može biti $f(x)$? Ili barem kom skupu pripada $f(x)$?
- Šta radi f?

Bez obzira na to šta tačno radi f, možemo reći da svako f mora da ima jednu dobru osobinu:

- Jednu vrednost x treba uvek da pretvori u isti rezultat, tj. za jedno x treba da postoji tačno jedan $f(x)$

Šta su funkcije?

Funkciju f zamišljamo kao operator koji neke elemente x pretvara u izlazne elemente $f(x)$.



Deo specifikacije svake funkcije mora odgovoriti na pitanja:

- Za koje x radi? **Domen**
- Šta sve može biti $f(x)$? Ili barem kom skupu pripada $f(x)$? **Kodomen**
- Šta radi f?

Bez obzira na to šta tačno radi f, možemo reći da svako f mora da ima jednu dobru osobinu:

- Jednu vrednost x treba uvek da pretvori u isti rezultat, tj. za jedno x treba da postoji tačno jedan $f(x)$ **Pravilo funkcije**

Definicija funkcije

Definicija (Funkcija skupa A u skup B)

Neka su A i B neprazni skupovi. Kažemo da je f **funkcija** *skupa A u skup B, u oznaci $f : A \to B$, ako f svakom elementu skupa A dodeljuje tačno jedan element skupa B. Skup A je* **domen** *funkcije f, a skup B* **kodomen** *funkcije f. Ukoliko funkcija f elementu a skupa A dodeljuje element b skupa B, to zapisujemo u formi $(a, b) \in f$, ili $f(a) = b$. Kažemo da je a* **original**, *a b njemu odgovarajuća* **slika**.

Definicija (Skup slika)

Ako je f funkcija skupa A u skup B, **skup slika** *funkcije f je skup*

$$f(A) = \{b \mid b \in B \wedge (\exists a \in A)\, f(a) = b\} = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Definicija (Jednakost funkcija)

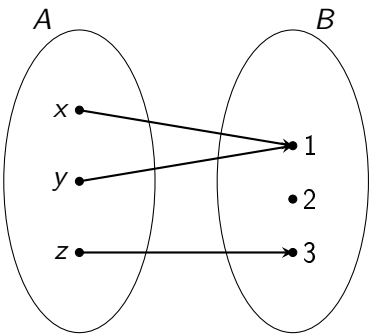
Funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ su **jednake** *ako su im jednaki domeni, tj. $A = C$, jednaki kodomeni $B = D$ i ako svakom elementu domena na isti način pridružuju element kodomena, tj. za svako $x \in A$ vredi $f(x) = g(x)$.*

Primer funkcije

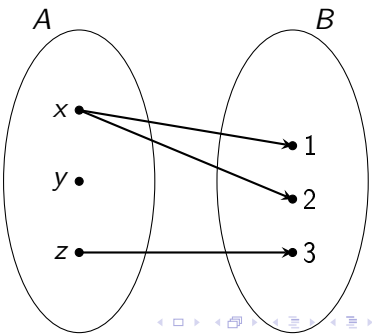
Zadatak

Data su dva preslikavanja f i g. Koje preslikavanje jeste funkcija, koje nije? Za ono koje jeste napisati domen i skup slika. Za funkciju, šta možemo uzeti kao njen kodomen?

$f = \{(x, 1), (y, 1), (z, 3)\}$

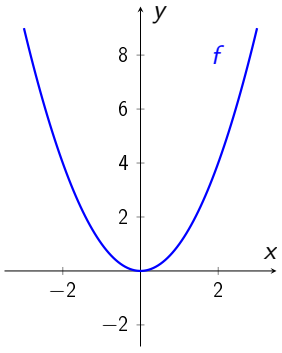


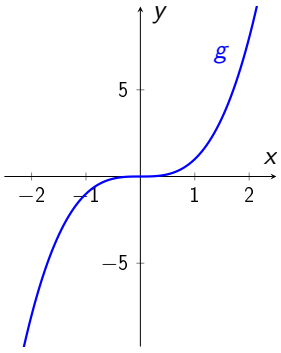
$g = \{(x, 1), (x, 2), (z, 3)\}$

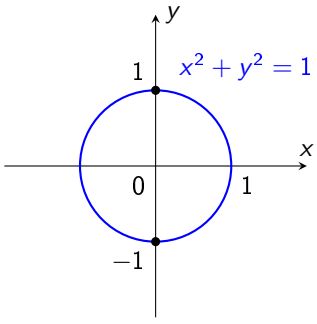


Funkcije nad $\mathbb{R}$: garfik funkcije

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ redom su zadate izrazima $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$. Naći skup slika od f i od g. Da li je $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ funkcija?

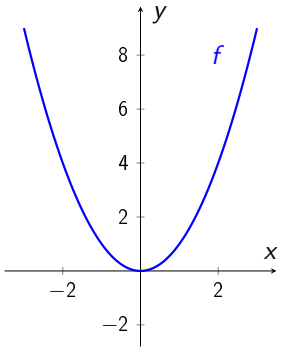




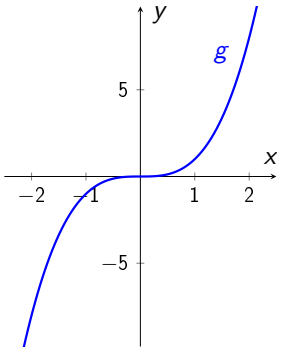


Funkcije nad $\mathbb{R}$: garfik funkcije

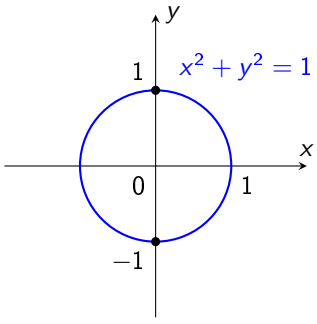
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ redom su zadate izrazima $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$. Naći skup slika od f i od g. Da li je $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ funkcija?



$f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$



$g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$



ovo nije funkcija

Pitanje: Kako bismo našli skup slika za funkciju $i(x) = -\ln(x^2 + 1)$? Ovo ćemo kasnije raditi preko kompozicija.

Osobine funkcija

Injektivnost

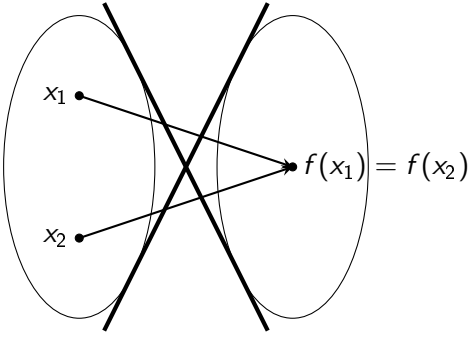
Definicija (Injektivna funkcija $(1-1)$)

Funkcija $f : A \to B$ *je* **injektivna** *ako za sve* $x_1,\ x_2 \in A$ *važi*

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

Napomena

Druga definicija injektivnosti:
$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$



Primer

Naći injektivne funkcije skupa $A = \{a, b, c\}$, *u skup* $\{1, 2, 3\}$.

1. $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3), (c, 1)\}$
2. $f_2 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$
3. $f_3 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

Injektivnost

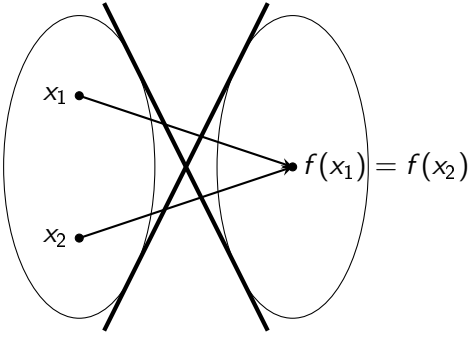
Definicija (Injektivna funkcija $(1-1)$)

Funkcija $f : A \to B$ *je* **injektivna** *ako za sve* $x_1,\ x_2 \in A$ *važi*

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

Napomena

Druga definicija injektivnosti:
$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$



Primer

Naći injektivne funkcije skupa $A = \{a, b, c\}$, *u skup* $\{1, 2, 3\}$.

1. $f_1 = \{(a,1),(b,2),(a,3),(c,1)\}$ $\quad \bot$
2. $f_2 = \{(a,1),(b,2),(c,1)\}$ $\quad \bot$
3. $f_3 = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ $\quad \top$

(Injektivna) restrikcija funkcije

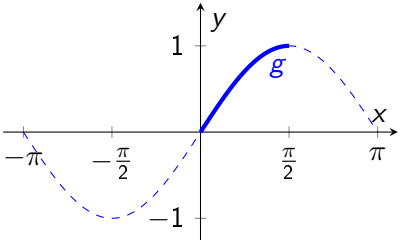
Definicija (Restrikcija funkcije)

Neka je data funkcija $f : A \to B$. *Funkcija* $g : C \to B$ *je* **restrikcija** *funkcije* $f : A \to B$ *ako je* $C \subset A$ *i za sve* $x \in C$ *važi* $g(x) = f(x)$. *Koristimo i oznaku* $g = f|_C$. *Ako je pri tom* g *injektivna, kažemo da je ona* **injektivna restrikcija** *funkcije* f.

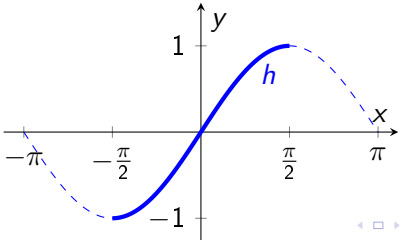
Primer

Funkcije $g = f|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ *i* $h = f|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ *jesu injektivne restrikcije funkcije* $f(x) = \sin(x)$

$g = f|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$



$h = f|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$



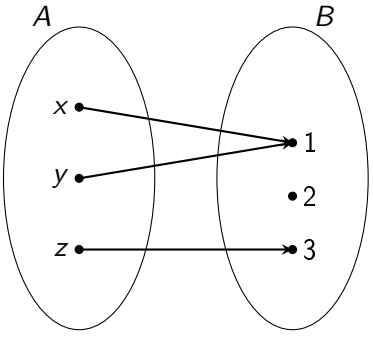
Sirjektivnost

Definicija (Sirjektivnost (*na*))

Funkcija $f : A \to B$ *je* **sirjektivna** (**na**) *ako za svako* $y \in B$ *postoji* $x \in A$ *takav da je* $f(x) = y$, *odnosno, ako važi* $f(A) = B$.

Primer

Za $A = \{x, y, z\}$ *i* $B = \{1, 2, 3\}$, *data je funkcija* $f : A \to B$ *sa* $f = \{(x, 1), (y, 1), (z, 3)\}$. *Da li je sirjektivna?*



Sirjektivnost

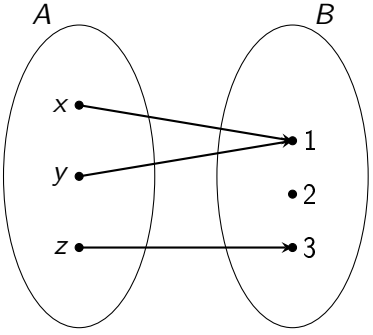
Definicija (Sirjektivnost (*na*))

Funkcija $f : A \to B$ *je* **sirjektivna** (**na**) *ako za svako* $y \in B$ *postoji* $x \in A$ *takav da je* $f(x) = y$, *odnosno, ako važi* $f(A) = B$.

Primer

Za $A = \{x, y, z\}$ *i* $B = \{1, 2, 3\}$, *data je funkcija* $f : A \to B$ *sa* $f = \{(x, 1), (y, 1), (z, 3)\}$. *Da li je sirjektivna?*

Nije sirjektivna jer je $f(A) = \{1, 3\}$ *(tj. ni jedan original se ne slika u* 2*).*



Bijekcija

Napomena

Ako je funkcija $f : A \to B$ injektivna, onda pišemo $f : A \xrightarrow{1-1} B$; ako je sirjektivna, onda pišemo $f : A \xrightarrow{na} B$.

Definicija (Bijekcija)

Funkciju $f : A \to B$ koja je i injektivna i sirjektivna zovemo bijekcija i pišemo $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$.

Primer

Za $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, jedna bijekcija $f : A \to B$ je $f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$

Napomena

Bijekcije se još zovu permutacije i uzajamno jednoznačna preslikavanja

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$, *preslikavanja i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.*

$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$

$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$

$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$

$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$

	$f_i : A \to B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, preslikavanja i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.

$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$

$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$

$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$

$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$

	$f_i : A \to B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1	*NE*	*NE*	*NE*	*NE*
f_2				
f_3				
f_4				

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, preslikavanja i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.

$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$

$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$

$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$

$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$

	$f_i : A \to B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1	*NE*	*NE*	*NE*	*NE*
f_2	*NE*	*NE*	*NE*	*NE*
f_3				
f_4				

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$, *preslikavanja i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.*

$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$

$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$

$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$

$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$

	$f_i : A \to B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1	*NE*	*NE*	*NE*	*NE*
f_2	*NE*	*NE*	*NE*	*NE*
f_3	*DA*	*NE*	*NE*	*NE*
f_4				

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, preslikavanja i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.

$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$

$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$

$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$

$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$

	$f_i : A \to B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1	NE	NE	NE	NE
f_2	NE	NE	NE	NE
f_3	DA	NE	NE	NE
f_4	DA	DA	NE	NE

Broj elemenata skupa

Napomena

- *Ako je* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$, *da li postoji* $f : A \xrightarrow{1-1} B$ *i da li postoji* $g : B \xrightarrow{na} A$?
- *Da li je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *data sa* $f(n) = 2n$ *injektivna?*

Definicija

Ako postoji bijekcija $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ *onda kažemo da* A *i* B *imaju isti broj elemenata i pišemo* $|A| = |B|$ *i* $Card(A) = Card(B)$.

Teorema

- *Za konačan skup* A *postoji bijekcija* $f : A \xrightarrow[na]{1-1} \{1, 2, \ldots, n\}$ *i tada pišemo* $|A| = n$.
- *Skup je beskonačan ako se može injektivno preslikati u svoj pravi podskup.*
- *Skup* A *sa istim brojem elemenata kao* $\mathbb{N}$ *zove se* **prebrojiv**, *i pišemo* $|A| = \aleph_0$
- *Skup* A *sa istim brojem elemenata kao* $\mathbb{R}$ *zove se* **neprebrojiv**, *i pišemo* $|A| = c$

Još jedan način zapisa funkcija (i relacija)

Napomena

Binarnu relaciju $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)\}$ *možemo zapisati na sledeći način*

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Iz ovog zapisa možemo lakše uočiti neke osobine od f:

- f je funkcija akko su svaka dva elementa u prvoj vrsti različita
- f je funkcija iz skupa A u skup B akko je f funkcija, $\{a_1, a_2, ..., a_n\} = A$ i $\{b_1, b_2, ..., b_n\} \subseteq B$
- f je injektivna funkcija akko su i u drugoj vrsti svaka dva elementa različita
- f je sirjektivna funkcija iz skupa A u skup B akko je i $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$

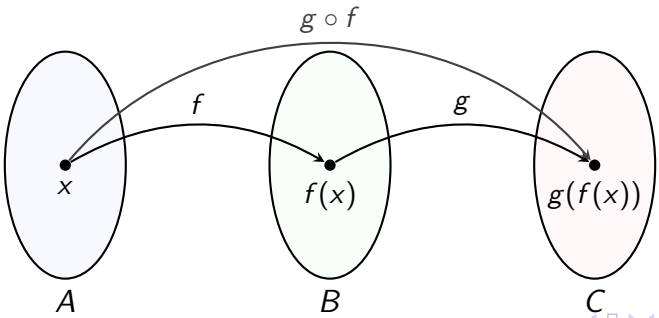
Kompozicija. Inverzna funkcija

Kompozicija funkcija

Definicija (Kompozicija funkcija)

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f : A \to B$ i $g : B \to C$ funkcije. Tada je i $g \circ f : A \to C$ takođe funkcija definisana sa

$$(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Kompozicija funkcija: osobine

Teorema

Neka je $A \neq \emptyset$ i funkcije $f, g, h : A \to A$. Tada važi $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, tj. važi asocijativnost.

Dokaz

Po definiciji kompozicije za $x \in \mathcal{D}(h)$ imamo
$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = (f \circ g)\big(h(x)\big) = f\big(g\big(h(x)\big)\big) = f\big(\big(g \circ h\big)(x)\big) = \big(f \circ \big(g \circ h\big)\big)(x)$

Primer

Za $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = x + 3$ i $g(x) = x^3$ odrediti

$$(f \circ g)(x) =$$
$$(g \circ f)(x) =$$

Kompozicija funkcija: osobine

Teorema

Neka je $A \neq \emptyset$ i funkcije $f, g, h : A \to A$. Tada važi $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, tj. važi asocijativnost.

Dokaz

Po definiciji kompozicije za $x \in \mathcal{D}(h)$ imamo

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = (f \circ g)\big(h(x)\big) = f\big(g\big(h(x)\big)\big) = f\big(\big(g \circ h\big)(x)\big) = \big(f \circ \big(g \circ h\big)\big)(x)$$

Primer

Za $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = x + 3$ i $g(x) = x^3$ odrediti

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = x^3 + 3$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^3$$

Primeti $f \circ g \neq g \circ f$ u ovom primeru.

Inverzna funkcija

Primer

Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$
2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

Inverzna funkcija

Primer

Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$ $\qquad f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2)\}$
2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ $\qquad g^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

Inverzna funkcija

Primer

Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$ $\qquad f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2)\}$
2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ $\qquad g^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

Definicija (Inverzna funkcija)

Inverzna funkcija *bijektivne funkcije* $f : A \to B$ *je funkcija* $f^{-1} : B \to A$, *takva da je* $f^{-1}(b) = a$ *ako i samo ako je* $f(a) = b$.

Inverzna funkcija

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Inverzna funkcija

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\qquad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Inverzna funkcija

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\quad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Inverzna funkcija

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\quad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_3^{-1} = \{(2x+1, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(t, \tfrac{t-1}{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Inverzna funkcija

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\quad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ ne postoji, f_4 nije $1-1$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_4(1) = f_4(-1)$$

Inverzna funkcija

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\quad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ ne postoji, f_4 nije $1-1$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ $\quad f_5^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_5^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} = \{(t, \sqrt{t}) \mid t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$$

Inverzna funkcija

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\quad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ ne postoji, f_4 nije $1-1$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ $\quad f_5^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad f_6^{-1} = \{(x, \ln x) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$

$$f_6^{-1} = \{(e^x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(t, \ln t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$$

Kompozicija i inverzna: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

Kompozicija i inverzna: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad$ $(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad$ $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad$ $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

Kompozicija i inverzna: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

Kompozicija i inverzna: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Kompozicija i inverzna: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Kompozicija i inverzna: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija i inverzna: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija i inverzna: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Napomena

Generalno, $f \circ g \neq g \circ f$, tj. ne važi komutativnost kompozicije.

Identička, inverzna funkcija i kompozicija

Definicija (Identička funkcija)

Neka je $A \neq \emptyset$. Funkcija $i_d : A \to A$ definisana sa $(\forall x \in A)\ i_d(x) = x$, se naziva identička funkcija skupa A. Primetimo da je i_d bijekcija i da je $f \circ i_d = i_d \circ f = f$.

Lema

Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i i_d identička funkcija skupa A. Tada važi $f \circ g = i_d$ akko $g = f^{-1}$ (i takođe $f = g^{-1}$).

Lema

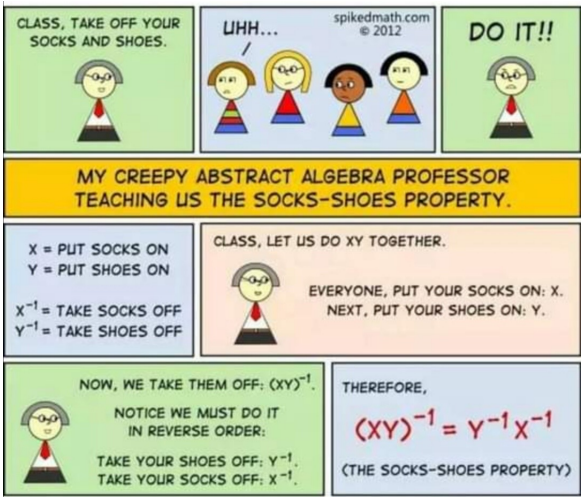
Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i i_d identička funkcija skupa A. Tada je

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Dokaz

$$\big(f \circ g\big) \circ \big(g^{-1} \circ f^{-1}\big) = f \circ \big(g \circ g^{-1}\big) \circ f^{-1} = f \circ i_d \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = i_d$$

Inverzna od kompozicije



Kompozicija nekih specijalnih funkcija i množenje matrica

Neka su date funkcije $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (2x + y, x - y),$$
$$g(x, y) = (x + 3y, -2x + y),$$

za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tada je

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x, y) &= f\big(g(x, y)\big) = f(x + 3y, -2x + y) \\ &= \big(2(x + 3y) + (-2x + y), x + 3y - (-2x + y)\big) \\ &= (7y, 3x + 2y).\end{aligned}$$

Primeti: Ako su

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tada je

$$M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Skup slika i kompozicija

Primeri

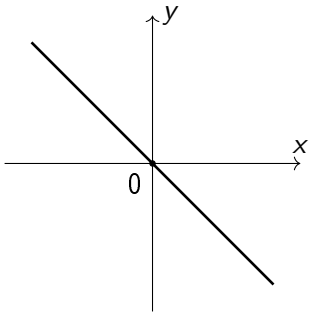
Za sledeće realne funkcije naći domen i skup slika (i prokomentarisati $1-1$ i *na*)

1. $f(x) = -x$
2. $g(x) = \ln x$
3. $h(x) = x^2 + 1$

Primeri

Za sledeće realne funkcije naći domen i skup slika (i prokomentarisati $1-1$ i *na*)

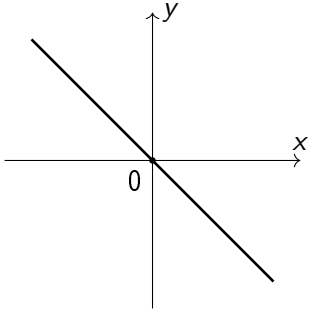
1. $f(x) = -x$ $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
2. $g(x) = \ln x$
3. $h(x) = x^2 + 1$

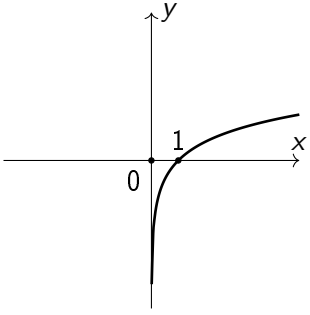


Primeri

Za sledeće realne funkcije naći domen i skup slika (i prokomentarisati $1-1$ i *na*)

1. $f(x) = -x$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
2. $g(x) = \ln x$ $\quad \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}^+, g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$
3. $h(x) = x^2 + 1$

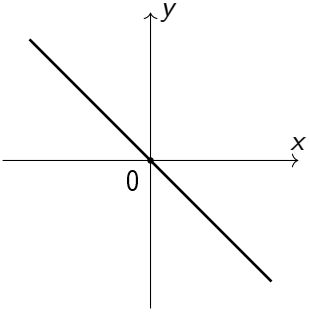


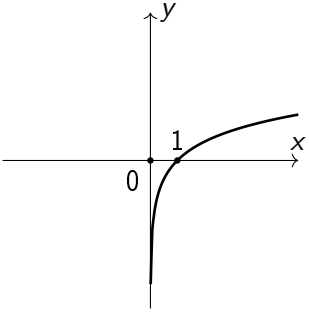


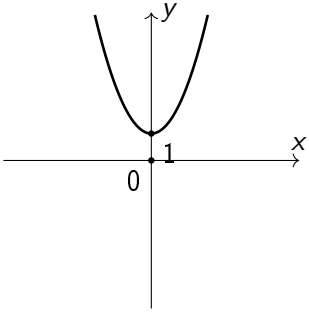
Primeri

Za sledeće realne funkcije naći domen i skup slika (i prokomentarisati $1-1$ i *na*)

1. $f(x) = -x$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
2. $g(x) = \ln x$ $\quad \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}^+, g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$
3. $h(x) = x^2 + 1$ $\quad \mathcal{D}(h) = \mathbb{R}, h(\mathbb{R}) = [1, \infty)$





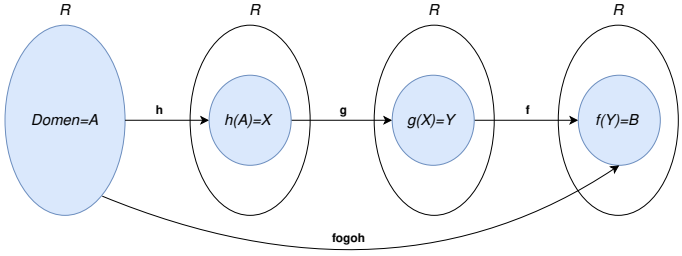


Primeri: nastavak

Za funkciju $i(x) = -\ln(x^2 + 1)$ naći domen i skup slika (i prokomentarisati $1 - 1$ i *na*)

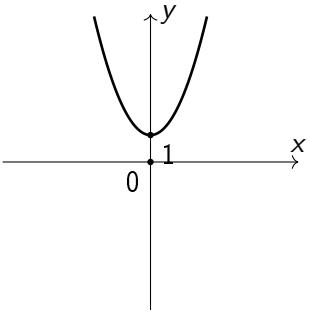
Primeri: nastavak

Za funkciju $i(x) = -\ln(x^2 + 1)$ naći domen i skup slika (i prokomentarisati $1 - 1$ i *na*)
Primetimo $\mathcal{D}(i) = \mathbb{R}$, jer je $x^2 + 1 > 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$ i
$i(x) = (f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$

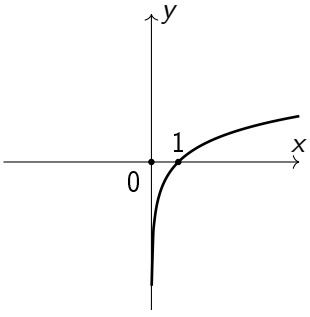


Primeri: nastavak

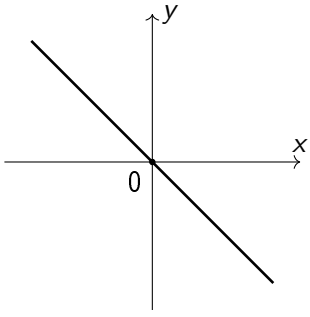
Za funkciju $i(x) = -\ln(x^2 + 1)$ naći domen i skup slika (i prokomentarisati $1 - 1$ i *na*)
Primetimo $\mathcal{D}(i) = \mathbb{R}$, jer je $x^2 + 1 > 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$ i
$i(x) = (f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$



$h : \mathbb{R} \to [1, \infty)$



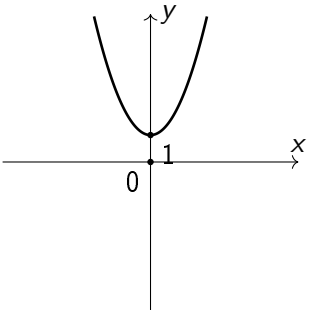
$g : [1, \infty) \to [0, \infty)$



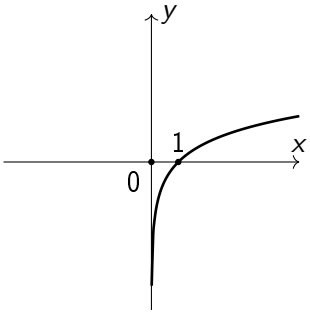
$f : [0, \infty) \to (-\infty, 0]$

Primeri: nastavak

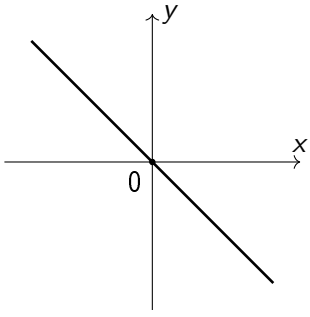
Za funkciju $i(x) = -\ln(x^2+1)$ naći domen i skup slika (i prokomentarisati $1-1$ i *na*)
Primetimo $\mathcal{D}(i) = \mathbb{R}$, jer je $x^2+1 > 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$ i
$i(x) = (f \circ g \circ h)(x) = f\big(g\big(h(x)\big)\big)$ **Dakle,** $\mathbf{i}(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$



$h : \mathbb{R} \to [1, \infty)$



$g : [1, \infty) \to [0, \infty)$



$f : [0, \infty) \to (-\infty, 0]$

Šta smo danas radili

- Funkcije skupa A u skup B
- Injektivnost i sirjektivnost
- Bijekcija
- Kompozicija funkcija
- Inverzna funkcija