# Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 8

# Na prethodnom času

- Bulove algebre

# Kompleksni brojevi

# Algebarski oblik kompleksnog broja

**Rađeno ranije:** skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

## Definicija (Realni i imaginarni deo)

*Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je $z$ zadat u* **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja $z$.*

**Rađeno ranije:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

## Primer

*Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:*

$z_1 + z_2 =$

$z_1 - z_2 =$

$z_1 \cdot z_2 =$

$\frac{z_1}{z_2} =$

# Algebarski oblik kompleksnog broja

**Rađeno ranije:** skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

## Definicija (Realni i imaginarni deo)

*Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je $z$ zadat u* **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja $z$.*

**Rađeno ranije:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

## Primer

*Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:*

$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$

$z_1 - z_2 =$

$z_1 \cdot z_2 =$

$\frac{z_1}{z_2} =$

# Algebarski oblik kompleksnog broja

**Rađeno ranije:** skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

## Definicija (Realni i imaginarni deo)

*Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je $z$ zadat u* **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja $z$.*

**Rađeno ranije:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

## Primer

*Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:*

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (1 - 2i) = 1 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

# Algebarski oblik kompleksnog broja

**Rađeno ranije:** skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

## Definicija (Realni i imaginarni deo)

*Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je $z$ zadat u* **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja $z$.*

**Rađeno ranije:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

## Primer

*Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:*

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (1 - 2i) = 1 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = 2 + 6 + 3i - 4i = 8 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

# Algebarski oblik kompleksnog broja

**Rađeno ranije:** skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

## Definicija (Realni i imaginarni deo)

*Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je $z$ zadat u* **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja $z$.*

**Rađeno ranije:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

## Primer

*Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:*

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$$

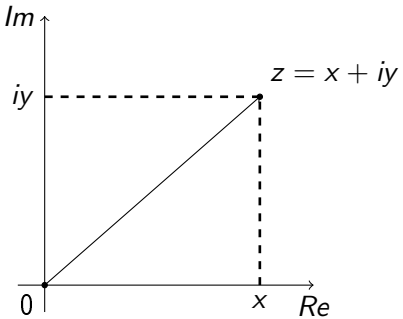
$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (1 - 2i) = 1 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = 2 + 6 + 3i - 4i = 8 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{2 - 6 + 4i + 3i}{1^2 + 2^2} = \frac{-4 + 7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

## Kompleksna ravan

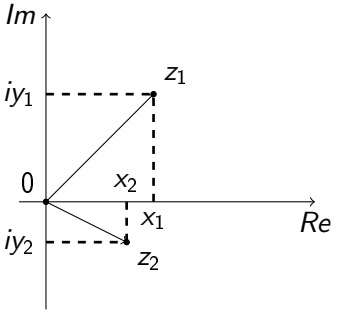
**Rađeno ranije:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje izomorfno polju $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$. Zato kompleksne brojeve možemo posmatrati u **kompleksnoj (ili Gausovoj) ravni**.




Ova geometrijska interpretacija olakšava razumevanje mnogih pojmova iz polja kompleksnih brojeva.

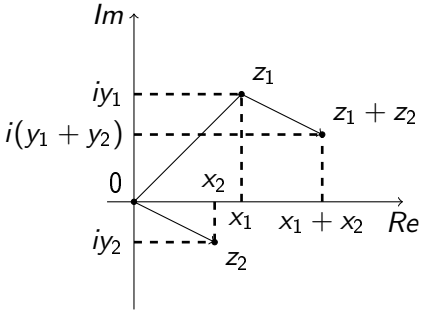
# Sabiranje kompleksnih brojeva je sabiranje vektora

Sabiranje kompleksnih brojeva je definisano "po koordinatama" sa $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, isto kao sabiranje vektora u ravni.



# Sabiranje kompleksnih brojeva je sabiranje vektora

Sabiranje kompleksnih brojeva je definisano "po koordinatama" sa $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, isto kao sabiranje vektora u ravni.



# Sabiranje kompleksnih brojeva je sabiranje vektora

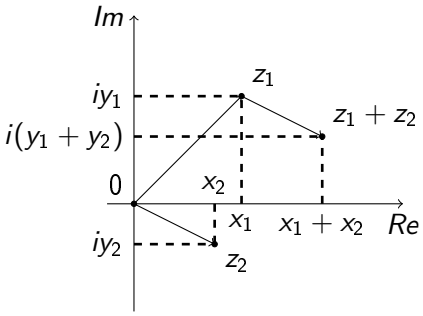
Sabiranje kompleksnih brojeva je definisano "po koordinatama" sa $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, isto kao sabiranje vektora u ravni.

## Teorema

*Abelova grupa $(\mathbb{C}, +)$ izomorfna je sa Abelovom grupom $(V, +)$, gde je $V$ skup svih slobodnih vektora u ravni i $+$ sabiranje vektora. Jedan izomorfizam je $f(z) = \overrightarrow{0z}$.*

## Posledica

*Funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa $f(z) = z + \omega$ u kompleksnoj ravni predstavlja translaciju svih tačaka za vektor $\omega$ (tj. za $\overrightarrow{0\omega}$).*



# Konjugovani kompleksni broj

Pošto je $i^2 = -1$ i $i^{-1} = -i$ imamo sledeće tvrđenje.

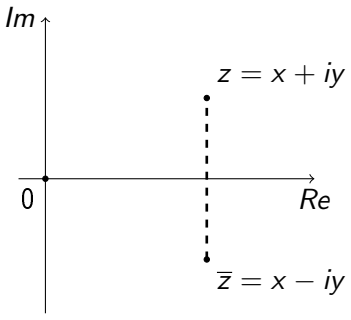
**Lema**
*Za $k \in \mathbb{Z}$ važi $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.*

**Definicija (Konjugovani kompleksni broj)**

*Neka je kompleksni broj $z = x + iy$. Tada je njemu konjugovani kompleksni broj $\overline{z} = x - iy$.*

**Napomena**

*Geometrijska interpretacija funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisane $f(z) = \overline{z}$ je osna simetrija u odnosu na Re-osu.*



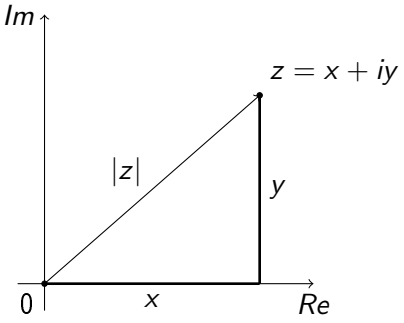
# Modul (ili moduo)

## Definicija (Modul)

*Modul je funkcija* $|\ |: \mathbb{C} \to [0, \infty)$, *definisana sa* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, *za* $z = x + iy$. *Vrednost* $|z|$ *zove se modul kompleksnog broja* $z$.

## Napomena

*U geometrijkoj interpretaciji vidimo da je* $|z|$ *rastojanje tačke* $z$ *od koordinatnog početka (sledi iz Pitagorine teoreme).*



# Osobine (1/2)

## Teorema

*Za* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *važi*

$(a)$ $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = Re(z)$

$(b)$ $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = Im(z)$

$(c)$ $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$(d)$ $Re(z_1 \pm z_2) = Re(z_1) \pm Re(z_2)$

$(e)$ $Im(z_1 \pm z_2) = Im(z_1) \pm Im(z_2)$

$(f)$ $\overline{z \in \mathbb{R}} \Rightarrow \overline{z} = z$

$(g)$ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$(h)$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, *za* $z_2 \neq 0$

$(i)$ $0, z_1, z_1 + z_2, z_2$ *čine temena paralelograma.*

## Dokaz

*Direktna posledica definicija. Recimo, za* $z = x + iy$, *pod* $(b)$ *sledi iz* $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{1}{2i}(2iy) = y = Im(z)$.

# Osobine (2/2)

**Teorema**

*Neka je $z = x + iy$. Tada važi*

$(a)\ |z| \geq 0 \qquad (b)\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \qquad (c)\ z\overline{z} = |z|^2 \qquad (d)\ |z| = |\overline{z}|$

**Dokaz**

$(c)\ z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(-xy + yx) = x^2 + y^2 = |z|^2$

**Zadatak**

*Odrediti skupove tačaka u kompleksnoj ravni određene jednačinama:*

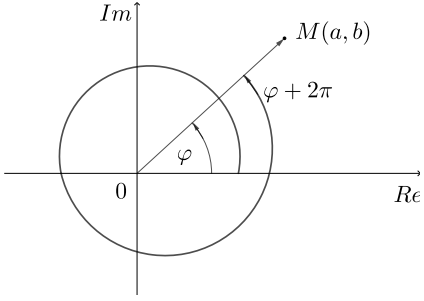
1. $|z| = 1$
2. $1 < |z| < 3$
3. $|z - 1| = 1$

# Argument kompleksnog broja

# Argument kompleksnog broja

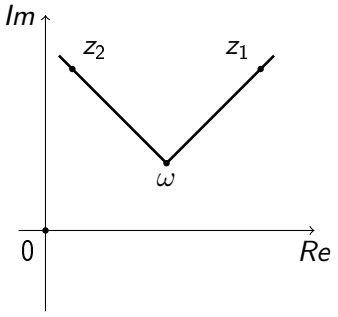
**Argument kompleksnog broja** $z$ različitog od 0, u oznaci $Arg\,(z) = \varphi$, je merni broj ugla za koji je potrebno rotirati pozitivni deo realne ose oko koordinatnog početka u pozitivnom matematičkom smeru (suprotno od kazaljke na satu) dok se ne poklopi sa polupravom koja spaja koordinatni početak i broj $z$.
Ovako definisan $Arg$ je višeznačna funkcija za koju važi

$$Arg(z) = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



# (Konveksni) orijentisani ugao u kompleksnoj ravni

- Ugao određen dvema polupravama je **orijentisan** ako se zna koja poluprava je prva, a koja druga.
- Konveksni ugao je **pozitivno orijentisan** ako rotiranje prvog kraka po (konveksnoj) oblasti ugla do drugog kraka jeste u pozitivnom smeru (suprotan od kazaljke na satu), inače je **negativno orijentisan**.
- Merni broj ugla ćemo uzimati iz skupa $(-\pi, \pi]$, tj. $[0, \pi]$ za pozitivno, a $(-\pi, 0)$ za negativno orijentisane.

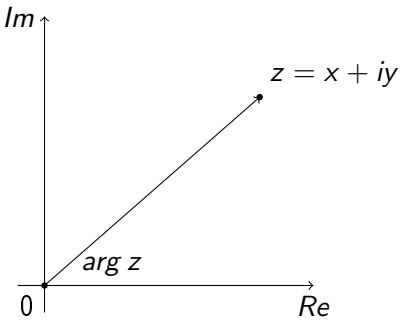



$\sphericalangle z_1 \omega z_2 = \frac{\pi}{4}$ je pozitivno orijentisan, a $\sphericalangle z_2 \omega z_1 = -\frac{\pi}{4}$ negativno orijentisan.

# Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja

## Definicija (Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja)

*Glavna vrednost agrumenta kompleksnog broja $z$, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.*




## Napomena

*Poluprava $00$ nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja $0$ nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).*

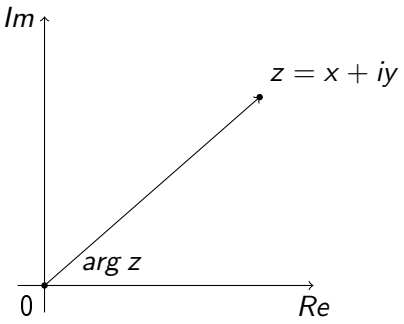
## Primer

$arg(0) =$ , $arg(2) =$ , $arg(-3) =$ , $arg(1+i) =$ , $arg(-1-i\sqrt{3}) =$ .

# Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja

## Definicija (Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja)

*Glavna vrednost agrumenta kompleksnog broja $z$, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.*




## Napomena

*Poluprava $00$ nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja $0$ nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).*

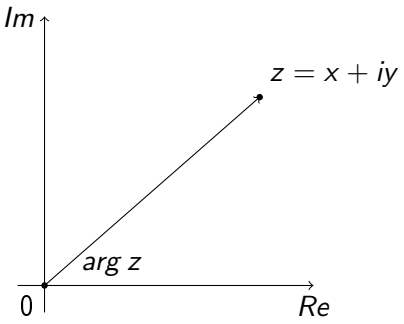
## Primer

$\arg(0) =$ *nije def.*, $\arg(2) =$ , $\arg(-3) =$ , $\arg(1+i) =$ , $\arg(-1-i\sqrt{3}) =$ .

# Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja

## Definicija (Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja)

*Glavna vrednost agrumenta kompleksnog broja $z$, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.*




## Napomena

*Poluprava $00$ nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja $0$ nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).*

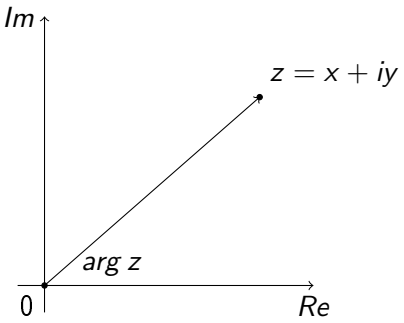
## Primer

$arg(0) = nije\ def.,\ \ arg(2) = 0,\ \ arg(-3) = \quad ,\ \ arg(1+i) = \quad ,\ \ arg(-1-i\sqrt{3}) = \quad .$

# Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja

## Definicija (Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja)

*Glavna vrednost agrumenta kompleksnog broja $z$, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.*




## Napomena

*Poluprava $00$ nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja $0$ nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).*

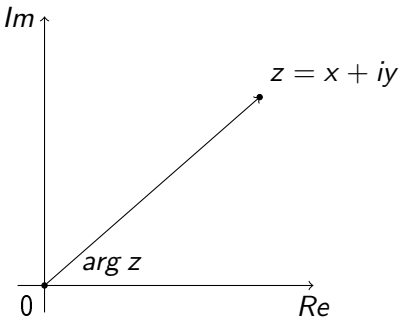
## Primer

$\arg(0) =$ *nije def.*, $\arg(2) = 0$, $\arg(-3) = \pi$, $\arg(1+i) =$ , $\arg(-1-i\sqrt{3}) =$ .

# Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja

## Definicija (Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja)

*Glavna vrednost agrumenta kompleksnog broja $z$, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.*




## Napomena

*Poluprava $00$ nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja $0$ nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).*

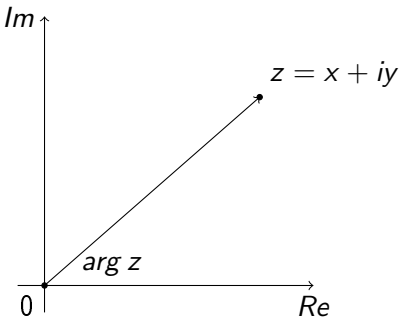
## Primer

$arg(0) = nije\ def.,\ \ arg(2) = 0,\ \ arg(-3) = \pi,\ \ arg(1+i) = \frac{\pi}{4},\ \ arg(-1-i\sqrt{3}) =$ .

# Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja

## Definicija (Glavna vrednost argumenta kompleksnog broja)

*Glavna vrednost agrumenta kompleksnog broja $z$, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.*




## Napomena

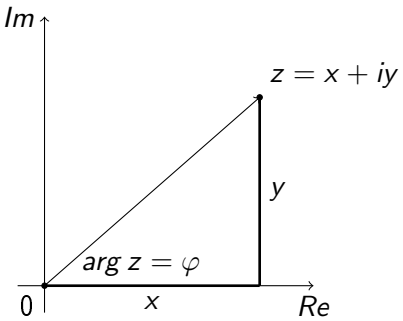
*Poluprava $00$ nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja $0$ nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).*

## Primer

$arg(0) = nije\ def.,\ \ arg(2) = 0,\ \ arg(-3) = \pi,\ \ arg(1+i) = \frac{\pi}{4},\ \ arg(-1-i\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}.$

# Računanje (glavne vrednosti) agrumenta

Neka je $\arg(z) = \varphi$. Iz definicije i pravouglog trougla desno vidimo da je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. Odatle imamo $arg\ z = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, mada je ovo tačno samo ako je $x > 0$. Generalno, imamo sledeće tvrđenje.




## Teorema

*Neka je $z = x + iy$. Glavna vrednost argumenta je funkcija $arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \xrightarrow{na} (-\pi, \pi]$ za koju važi*

$$arg\ z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

# Osobine

## Zadatak

*Odrediti skupove tačaka u kompleksnoj ravni određene jednačinama:*

1. $\arg z = 0$
2. $arg\, z > 0$
3. $arg\, z \geq 0$
4. $-\frac{\pi}{2} < arg\, z < \frac{\pi}{2}$
5. $-\frac{\pi}{2} \leq arg\, z \leq \frac{\pi}{2}$

*Rešenje.* Uputstvo: Nacrtati skupove u kompleksnoj ravni.

## Primeri

Za svaki komleksni broj $z$ tačno je

(a) $arg\, z > 0 \Leftrightarrow Im(z) > 0$
(b) $arg\, z > 0 \Rightarrow Im(z) > 0$
(c) $arg\, z > 0 \Rightarrow Im(z) \in \mathbb{R}$
(d) $arg\, z \geq 0 \Leftrightarrow Im(z) \geq 0$
(e) $arg\, z \geq 0 \Leftrightarrow \big(Im(z) \geq 0 \wedge z \neq 0\big)$

*Rešenje.* Nacrtati skupove u kompleksnoj ravni.

# Primeri

Za svaki komleksni broj $z$ tačno je

(a) $arg\, z > 0 \Leftrightarrow Im(z) > 0$

(b) $arg\, z > 0 \Rightarrow Im(z) > 0$

(c) $arg\, z > 0 \Rightarrow Im(z) \in \mathbb{R}$

(d) $arg\, z \geq 0 \Leftrightarrow Im(z) \geq 0$

(e) $arg\, z \geq 0 \Leftrightarrow (Im(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$

*Rešenje.* Nacrtati skupove u kompleksnoj ravni.

# Homotetija

## Definicija (Homotetija)

*Funkcija koja proizvoljnu tačku iz ravni $A$ preslikava u tačku $A'$ tako da je $\overrightarrow{0A} = k \cdot \overrightarrow{0A'}$ zove se homotetija sa centrom u $0$ i koeficijentom $k \in \mathbb{R}$, i obeležava $H_{0,k}$.*

## Teorema

*Za $z_1 \neq w, z_2 \neq w, z_1 \neq 0$ i $z_2 \neq 0$ važi:*

1. $arg\, z_1 = arg\, z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+)\, \overrightarrow{0z_1} = k \cdot \overrightarrow{0z_2}$
2. **Množenjem kompleksnog broja realnim pozitivnim brojem argument se ne menja.**
3. **Kompleksni brojevi koji pripadaju istoj polupravoj koja ishodi iz koordinatnog početka imaju jednake argumente.**
4. *Množenje kompleksnog broja $z$ realnim brojem $k$ je homotetija $H_{0,k}$.*

# Šta smo danas radili

- Algebrski oblik
- Kompleksna ravan
- Modul
- Argument