5. Neodređeni integral

5.1. Definicija i osnovne osobine

Ako za funkciju $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ postoji funkcija $F:(a,b)\to\mathbb{R}$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom (a,b) i pri tom važi

$$F'(x)=f(x), x\in(a,b),$$

onda kažemo da je $F(x)$ **primitivna funkcija** funkcije $f(x)$ nad intervalom (a,b).

Definicija 5.1. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom (a,b) naziva se *neodređeni integral* funkcije $f(x)$ i označava se sa $\int f(x)\,dx$, odnosno

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C:\ C\in\mathbb{R}\},$$

što kraće pišemo

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C.}$$

U ovoj definiciji $f(x)$ se naziva podintegralna funkcija, $f(x)dx$ podintegralni izraz, a C je integraciona konstanta.

Teorema 5.2. *Ako je funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom (a,b) tada postoji primitivna funkcija $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ nad intervalom (a,b), tj. postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim intervalom.*

Osobine neodređenog integrala

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$,
2. $\int f'(x)dx=f(x)+C$,
3. $\int a\cdot f(x)dx=a\cdot\int f(x)dx,\ a\in\mathbb{R}$,
4. $\int \Big(f_1(x)+\ldots+f_n(x)\Big)dx=\int f_1(x)dx+\ldots+\int f_n(x)dx.$

5.2. Tablica integrala

$$\int dx=x+C$$

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C_1,\ a\neq0$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ a\neq0$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c,\ a\neq0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,\ a\neq0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C_1,\ a>0$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\ a>0$$

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$$

Podrazumeva se da date jednakosti važe nad onim intervalima nad kojima su podintegralne funkcije neprekidne.

Zadatak 5.3. Izračunati: a) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; b) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; c) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$.

Rešenje.

a) $$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1} + C = \frac{8}{15}\,x^{\frac{15}{8}} + C;$$

b) $$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C;$$

c) $$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

5.3. Integracija pomoću smene

Neka sirjekcija $\varphi : I_1 \to I \subset \mathbb{R}$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ postoji neodređeni integral nad intervalom I. Tada važi

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt,}$$

(pri tom se podrazumeva da se posle integracije desne strane stavi $t = \varphi^{-1}(x)$).

Zadatak 5.4. Izračunati: a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; b) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; c) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx$.

Rešenje.

a) $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C;$$

b) $$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \\ \sin x\,dx = -dt \end{array}\right] = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$$

c) $$\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} \\ 2dt = \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int t\,dt = \frac{t^2}{4} + C = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)^2 + C.$$

Zadatak 5.5. Izračunati $I = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \left[\begin{array}{ccc} t = \operatorname{arctg} x & \Rightarrow & dt = \frac{dx}{1+x^2} \\ s = \ln(1+x^2) & \Rightarrow & ds = \frac{2x\,dx}{1+x^2} \end{array}\right] = \int e^t\,dt + \frac{1}{2}\int s\,ds + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= e^t + \frac{s^2}{4} + \operatorname{arctg} x + C = e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2) + \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Zadatak 5.6. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \left[\begin{array}{ccc} \sqrt{1+\ln x} = t & \Rightarrow & 1+\ln x = t^2 \\ & \Rightarrow & \frac{dx}{x} = 2t\,dt \end{array}\right] \\
&= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = 2\frac{t^3}{3} - 2t + C \\
&= \frac{2}{3}\,t\,(t^2-3) + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+\ln x}\,(\ln x - 2) + C.
\end{aligned}$$

Zadatak 5.7. Izračunati $I = \displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $a>0$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ t = \arcsin\frac{x}{a} \end{array}\right] = \int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\cdot a\cos t\,dt \\
&= a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a}{2}x\sqrt{1-\sin^2 t} + C \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a}{2}x\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)} + C \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a}{2}x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.
\end{aligned}$$

5.4. Parcijalna integracija

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i pri tom važi jednakost

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Zadatak 5.8. Izračunati $I = \displaystyle\int \ln x\,dx$.

Rešenje.

$$I = \int \ln x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u = \ln x & \Rightarrow & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{array}\right] = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

Zadatak 5.9. Izračunati $I = \displaystyle\int x^5 e^{-x^2}\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int x^5 e^{-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} -x^2 = t \\ x\,dx = -\frac{1}{2}dt \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int t^2 e^t\,dt = \left[\begin{array}{c} u = t^2 \Rightarrow du = 2t\,dt \\ dv = e^t\,dt \Rightarrow v = e^t \end{array}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left(t^2e^t - 2\int te^t\,dt\right) = -\frac{1}{2}t^2e^t + \int te^t\,dt = \left[\begin{array}{c} u_1 = t \Rightarrow du_1 = dt \\ dv_1 = e^t\,dt \Rightarrow v_1 = e^t \end{array}\right] \\
&= -\frac{1}{2}t^2e^t + te^t - \int e^t\,dt = -\frac{1}{2}t^2e^t + te^t - e^t + C = -e^{-x^2}\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

Zadatak 5.10. Izračunati $I = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.
Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\cdot x\,dx \\ &= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\underbrace{\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\cdot x\,dx}_{I_1} \end{aligned}$$

Sada ćemo uvesti smenu kako bismo našli rešenje integrala I_1. Integral rešavamo parcijalnom integracijom na sledeći način

$$\begin{aligned} u &= x \;\Rightarrow\; du = dx, \\ dv &= \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} \;\Rightarrow\; v = \int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \begin{bmatrix} t = x^2+a^2 \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}, \end{aligned}$$

pa je

$$I_1 = \int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\cdot x\,dx = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + C.$$

Traženi integral je

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)}\right) + C \\ &= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + C. \end{aligned}$$

Zadatak 5.11. Izračunati $I = \int \cos^2(\ln x)dx$.
Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^2(\ln x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \cos^2(\ln x) & \Rightarrow & du = 2\cos(\ln x)\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} \\ &= x\cos^2(\ln x) + 2\int \cos(\ln x)\sin(\ln x)\,dx = x\cos^2(\ln x) + \int \sin(2\ln x)\,dx, \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili trigonometrijsku formulu $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Dalje, neka je

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin(2\ln x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \sin(2\ln x) & \Rightarrow & du = \frac{2}{x}\cos(2\ln x)dx \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} \\ &= x\sin(2\ln x) - 2\int \cos(2\ln x)\,dx = \begin{bmatrix} u_1 = \cos(2\ln x) & \Rightarrow & du_1 = -\sin(2\ln x)\frac{2dx}{x} \\ dv_1 = dx & \Rightarrow & v_1 = x \end{bmatrix} \\ &= x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x) - 4\underbrace{\int \sin(2\ln x)\,dx}_{I_1}, \end{aligned}$$

pa dobijamo da je

$$I_1 = \frac{1}{5}\Big(x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x)\Big) + C.$$

Konačno rešenje je

$$I = \int \cos^2(\ln x)dx = x\cos^2(\ln x) + \frac{1}{5}\Big(x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x)\Big) + C.$$

Napomena:

1. Integrale oblika $\int P_n(x)\sin(ax)\,dx$ i $\int P_n(x)\cos(ax)\,dx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena, rešavamo parcijalnom integracijom
$$\Big[u = P_n(x), dv = \sin(ax)\,dx\Big] \text{ odnosno } \Big[u = P_n(x), dv = \cos(ax)\,dx\Big]$$
i potrebno je uraditi n puta parcijalnu integraciju.

2. Integral oblika $\int P_n(x)\ln^m x\,dx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena i $m \in \mathbb{N}$, rešavamo parcijalnom integracijom
$$\Big[u = \ln^m x, dv = P_n(x)dx\Big]$$
i potrebno je uraditi m puta parcijalnu integraciju.

3. Integral oblika $\int P_n(x)e^{ax}\,dx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena i $a \in \mathbb{R}$, rešavamo parcijalnom integracijom
$$\Big[u = P_n(x)x, dv = e^{ax}dx\Big]$$
i potrebno je uraditi n puta parcijalnu integraciju.

5.5. Integrali sa kvadratnim trinomom

I Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ $(a \neq 0,\ b^2-4ac<0)$ rešavaju se na sledeći način:

a) $m = 0$
$$ax^2+bx+c = a\left[(x+k)^2+l\right],\ \ k,l = const.$$
$$\int \frac{n}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{n}{a}\int \frac{dx}{(x+k)^2+l};$$

b) $m \neq 0$
$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}\,dx\\ &= \frac{m}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx}_{[t=ax^2+bx+c\Rightarrow dt=2ax+b]} + \underbrace{\int \frac{n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}\,dx.}_{a)}\end{aligned}$$

Primetimo da je prva jednakost dobijena na osnovu ideje da se u brojiocu dobije izvod imenioca, kako bi se nakon toga uvela odgovarajuća smena.

Zadatak 5.12. Izračunati $I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.
Rešenje.
$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \begin{bmatrix} x+1=t \\ dx = dt\end{bmatrix}\\ &= \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\end{aligned}$$

Zadatak 5.13. Izračunati $I=\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx.$

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I&=\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-2+6}{x^2-4x+5}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx+4\int \frac{dx}{x^2-4x+5}\\
&=\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx+4\int \frac{dx}{(x-2)^2+1}=\left[\begin{array}{rcl} x^2-4x+5=t & \Rightarrow & (2x-4)\,dx=dt\\ x-2=s & \Rightarrow & dx=ds\end{array}\right]\\
&=\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t}+4\int \frac{ds}{s^2+1}=\frac{3}{2}\ln|t|+4\,\mathrm{arctg}\,s+C=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\,\mathrm{arctg}(x-2)+C.
\end{aligned}
$$

II Integrali oblika $\displaystyle\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ ($a\neq 0$, $b^2-4ac<0$) rešavaju se na sličan način kao integrali oblika I.

III Integrali oblika $\displaystyle\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ ($m\neq 0$, $a\neq 0$, $b^2-4ac<0$) se pomoću smene $mx+n=\dfrac{1}{t}$ svode na integrale oblika II.

Zadatak 5.14. Izračunati $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}.$

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I&=\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}=\left[\begin{array}{rcl} x+1=\frac{1}{t} & \Rightarrow & x=\frac{1-t}{t}\\ & \Rightarrow & dx=-\frac{1}{t^2}\,dt\end{array}\right]\\
&=-\int \frac{\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+2\frac{1-t}{t}}}=-\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{(1-t)^2+2t-2t^2}{t^2}}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\
&=-\arcsin t+C=-\arcsin\frac{1}{x+1}+C.
\end{aligned}
$$

IV Integrali oblika $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ($a\neq 0$, $b^2-4ac<0$) svode se na integrale oblika $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ i $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx$.

Zadatak 5.15. Izračunati $I=\displaystyle\int \sqrt{x-x^2}\,dx.$

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I&=\int \sqrt{x-x^2}\,dx=\left[x-x^2=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\\
&=\int \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx=\left[\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}=t\\ dx=dt\end{array}\right]\\
&=\int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}+\frac{\frac{1}{4}}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{1}{2}}+C\\
&=\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C.
\end{aligned}
$$

5.6. Integrali racionalnih funkcija

Racionalna funkcija je količnik dva polinoma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Prava racionalna funkcija je racionalna funkcija za koju važi $deg(P(x)) < deg(Q(x))$. Svaku nepravu racionalnu funkciju ($deg(P(x)) \geq deg(Q(x))$) možemo napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)},$$

gde je $T(x)$ polinom (količnik pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$), a $\frac{R_1(x)}{Q(x)}$ je prava racionalna funkcija ($R_1(x)$ je ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $Q(x)$, pa je $deg(R_1(x)) < deg(Q(x))$).

Posmatrajmo sada pravu racionalnu funkciju, neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n, a $Q(x)$ polinom oblika

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{\ell_1} \cdots (x^2+b_qx+c_q)^{\ell_q},$$

gde je $k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2(\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_q) = n$, n je stepen polinoma $Q(x)$, a_i, b_j i c_j su realni brojevi za koje važi $b_j^2 - 4c_j < 0$, $i = 1,\ 2, ..., p$, $j = 1,\ 2, ..., q$ (drugim rečima, polinom $Q(x)$ je faktorisan nad poljem $\mathbb{R}$).

Tada se $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ može napisati u obliku

$$\begin{aligned} R(x) = &\left(\frac{A_{11}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right) + \ldots + \left(\frac{A_{p1}}{x-a_p} + \ldots + \frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right) \\ &+ \left(\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + \frac{B_{1\ell_1}x + C_{1\ell_1}}{(x^2+b_1x+c)^{\ell_1}}\right) + \ldots + \left(\frac{B_{q1}x + C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q} + \ldots + \frac{B_{q\ell_q}x + C_{q\ell_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{\ell_q}}\right). \end{aligned}$$

Nepoznati koeficijenti A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} određuju se tako što se gornja jednakost pomnoži sa $Q(x)$, što nam daje jednakost polinoma, te izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo sistem jednačina.

Razlomci oblika $\frac{A}{(x-a)^k}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\ell}$ nazivaju se prosti ili parcijalni razlomci.

Zadatak 5.16. Izračunati $I = \int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}dx.$

Rešenje.
Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija. Međutim, za rastavljanje na sumu parcijalnih razlomaka prvo je potrebno faktorisati polinom u imeniocu, tj.

$$\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}.$$

Nakon množenja cele jednakosti sa $(x-1)^2(x-2)^2$ sledi

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x-1)^2(x-2) + D(x-1)^2 \\ &= x^3(A+C) + x^2(-5A+B-4C+D) + x(8A-4B+5C-2D) + (-4A+4B-2C+D) \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene dobija se sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} A & & & + & C & & & = & 0 \\ -5A & + & B & - & 4C & + & D & = & 1 \\ 8A & - & 4B & + & 5C & - & 2D & = & 0 \\ -4A & + & 4B & - & 2C & + & D & = & 0 \end{array}$$

čijim rešavanjem se dobija $A = 4$, $B = 1$, $C = -4$ i $D = 4$. Otuda je

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{(x^3-3x+2)^2}\,dx = \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx \\
&= 4\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 4\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2} \\
&= \left[\begin{array}{lll} x-1=t & \Rightarrow & dx=dt \\ x-2=s & \Rightarrow & dx=ds \end{array} \right] = 4\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} - 4\int \frac{ds}{s} + 4\int \frac{ds}{s^2} \\
&= 4\ln|t| - \frac{1}{t} - 4\ln|s| - \frac{4}{s} + C = 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + C \\
&= \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4 - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + C.
\end{aligned}$$

Zadatak 5.17. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2+3x+4}{x^4+x^3-x-1}\,dx.$

Rešenje.

Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija. Faktorisaćemo najpre polinom u imeniocu

$$x^4+x^3-x-1 = x^3(x+1)-(x+1) = (x+1)(x^3-1) = (x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Rastavimo sad podintegralnu funkciju na sumu parcijalnih razlomaka

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3+3x^2+3x+4}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \\
&= \frac{A(x-1)(x^2+x+1) + B(x+1)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{A(x^3-1) + B(x^3+2x^2+2x+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}.
\end{aligned}$$

Otuda je

$$2x^3+3x^2+3x+4 = (A+B+C)x^3 + (2B+D)x^2 + (2B-C)x - A + B - D,$$

pa dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
A & + & B & + & C & & & = & 2 \\
 & & 2B & & & + & D & = & 3 \\
 & & 2B & - & C & & & = & 3 \\
-A & + & B & & & - & D & = & 4
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcr}
A & = & -1 \\
B & = & 2 \\
C & = & 1 \\
D & = & -1
\end{array}$$

Sada imamo

$$I = -\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + I_1.$$

Izračunajmo integral I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= \left[\begin{array}{rll} x^2+x+1=t & \Rightarrow & (2x+1)\,dx=dt \\ x+\frac{1}{2}=s & \Rightarrow & dx=ds \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2}\int \frac{ds}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2s}{\sqrt{3}} + C_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1.
\end{aligned}$$

Prema tome polazni integral je

$$\begin{aligned}
I &= -\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}{|x+1|} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

5.7. Integrali iracionalnih funkcija

I tip: Integral oblika $\displaystyle\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right]dx.$

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od x i od različitih stepena izraza $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, pri čemu je $ad-bc\neq 0$ (inače se izraz svodi na konstantu).

Neka je s najmanji zajednički sadržalac imenilaca racionalnih eksponenata $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Tada se smenom $\dfrac{ax+b}{px+q}=t^s$ polazni integral svodi na integral racionalne funkcije.

Zadatak 5.18. Izračunati $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$.

Rešenje.

Primetimo da je podintegralna funkcija racionalna funkcija po x i da se javlja izraz $x+1$ na stepene redom $\dfrac{2}{3}$ i $\dfrac{1}{2}$. Kako je $NZS\{2,3\}=6$, smena koja se uvodi je $x+1=t^6$.

$$\begin{aligned} I&=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}=\begin{bmatrix} x+1=t^6\\ dx=6t^5\,dt\end{bmatrix}\\ &=\int\frac{6t^5}{t^4-t^3}\,dt=6\int\frac{t^5}{t^3(t-1)}\,dt=6\int\frac{t^2}{t-1}\,dt.\end{aligned}$$

U poslednjem integralu podintegralna funkcija je neprava racionalna funkcija. Potrebno je podeliti t^2 sa $t-1$. Može se izvršiti klasično deljenje polinoma, međutim oduzimanjem i dodavanjem broja 1 brojiocu brže ćemo izvršiti deljenje.

$$\begin{aligned} I&=6\int\frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt=6\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}\,dt=6\int(t+1)\,dt+6\int\frac{dt}{t-1}\\ &=3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+C.\end{aligned}$$

Zadatak 5.19. Izračunati $I=\displaystyle\int\sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}}\,dx.$

Rešenje.

Uvodimo smenu $\sqrt{\dfrac{2x+2}{2x+1}}=t$, odnosno $\dfrac{2x+2}{2x+1}=t^2$. Sada treba izraziti x:

$$2x+2=t^2(2x+1)\quad\Leftrightarrow\quad 2x-t^2 2x=t^2-2\quad\Leftrightarrow\quad 2x(1-t^2)=t^2-2\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{t^2-2}{2(1-t^2)}.$$

Odavde je

$$dx=\frac{4t(1-t^2)-(t^2-2)(-4t)}{4(1-t^2)^2}\,dt=\frac{4t-4t^3+4t^3-8t}{4(1-t^2)^2}\,dt=\frac{-t}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Tada je

$$I=\int t\cdot\frac{-t}{(1-t^2)^2}\,dt=\int\frac{-t^2}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Podintegralna funkcija je racionalna funkcija, pa ćemo je rastaviti na zbir pracijalnih razlomaka

$$\frac{-t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{-t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{(1+t)^2}.$$

Otuda je

$$\begin{aligned} -t^2&=A(1-t)(1+t)^2+B(1+t)^2+C(1+t)(1-t)^2+D(1-t)^2\\ &=A(1+t-t^2-t^3)+B(1+2t+t^2)+C(1-t-t^2+t^3)+D(1-2t+t^2)\\ &=(-A+C)t^3+(-A+B-C+D)t^2+(A+2B-C-2D)t+A+B+C+D,\end{aligned}$$

što nam daje sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -A & & & + & C & & & = & 0 \\ -A & + & B & - & C & + & D & = & -1 \\ A & + & 2B & - & C & - & 2D & = & 0 \\ A & + & B & + & C & + & D & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcr} A & = & \frac{1}{4} \\ B & = & -\frac{1}{4} \\ C & = & \frac{1}{4} \\ D & = & -\frac{1}{4} \end{array}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{-\frac{1}{4}}{(1-t)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{-\frac{1}{4}}{(1+t)^2} \right) dt = \frac{1}{4} \left(\int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{(1-t)^2} + \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{(1+t)^2} \right) \\ &= \left[\begin{array}{ccc} 1-t=z & \Rightarrow & dt=-dz \\ 1+t=m & \Rightarrow & dt=dm \end{array} \right] = \frac{1}{4} \left(-\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z^2} + \int \frac{dm}{m} - \int \frac{dm}{m^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(-\ln|z| - \frac{1}{z} + \ln|m| + \frac{1}{m} \right) + C = \frac{1}{4} \left(-\ln|1-t| - \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| + \frac{1}{1+t} \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \frac{|1+t|}{|1-t|} - \frac{2t}{1-t^2} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{|1+\sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}}|}{|1-\sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}}|} - \frac{2\sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}}}{1-\frac{2x+2}{2x+1}} \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+2}} \right| + 2\sqrt{(2x+1)(2x+2)} \right) + C. \end{aligned}$$

II tip: Integrali binomnog diferencijala

Integral binomnog diferencijala je integral oblika $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, gde su m, n i p racionalni brojevi $(n, p \neq 0)$, a a i b realni brojevi različiti od nule. Uvođenjem pomoćne smene

$$x^n = t, \quad \text{tj.} \quad x = t^{\frac{1}{n}},$$

odakle je

$$dx = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

integral se svodi na

$$\frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt = \frac{1}{n} \int t^q (a+bt)^p\,dt,$$

gde je $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ takođe racionalan broj.

Uvođenje naredne smene zavisi od vrednosti p i q. Razlikujemo tri slučaja:

1. $p \in \mathbb{Z}$, $q = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.
   Tada je $\int t^{\frac{r}{s}}(a+bt)^p\,dt = \int R(t,\ t^{\frac{r}{s}})\,dt$, koji se smenom $t = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.
2. $q \in \mathbb{Z}$, $p = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.
   Tada je $\int t^q(a+bt)^{\frac{r}{s}}\,dt = \int R(t,\ (a+bt)^{\frac{r}{s}})\,dt$, koji se smenom $a + bt = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.
3. $p + q \in \mathbb{Z}$ i neka je $p = \dfrac{r}{s}$.
   Tada je $\int t^q(a+bt)^p\,dt = \int t^{p+q}\left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^p dt = \int R\left[t, \left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dt$, pri čemu se poslednji integral smenom $\dfrac{a+bt}{t} = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

Naredna tri zadatka će ilustrovati redom navedene slučajeve.

Zadatak 5.20. Izračunati $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})}$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})} = \int x^{-\frac{1}{2}}(4-x^{\frac{1}{3}})^{-1}\,dx = \left[\begin{array}{lll} x^{\frac{1}{3}} = t & \Rightarrow & x = t^3 \\ & \Rightarrow & dx = 3t^2\,dt \end{array}\right] \\
&= 3\int t^{-\frac{3}{2}}(4-t)^{-1}t^2\,dt = 3\int t^{\frac{1}{2}}(4-t)^{-1}\,dt = \left[\begin{array}{c} t = z^2 \\ dt = 2z\,dz \end{array}\right] \\
&= 6\int z(4-z^2)^{-1}z\,dz = 6\int \frac{z^2}{4-z^2}\,dz = -6\int \frac{z^2-4+4}{z^2-4}\,dz \\
&= -6\int dz - 24\int \frac{dz}{z^2-2^2} = -6z - 24\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + C \\
&= -6t^{\frac{1}{2}} - 6\ln\left|\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}+2}\right| + C = -6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right| + C.
\end{aligned}
$$

Zadatak 5.21. Izračunati $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\begin{array}{lll} x^{\frac{1}{3}} = t & \Rightarrow & x = t^3 \\ & \Rightarrow & dx = 3t^2\,dt \end{array}\right] \\
&= 3\int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{2}}t^2\,dt = 3\int (1+t)^{\frac{1}{2}}\,dt = \left[\begin{array}{c} 1+t = z^2 \\ dt = 2z\,dz \end{array}\right] \\
&= 6\int z^2\,dz = 6\cdot\frac{z^3}{3} + C = 2\cdot(\sqrt{1+t})^3 + C = 2\cdot(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}
$$

Drugi način:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{c} 1+x^{\frac{1}{3}} = t^2 \\ \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 6t\,dt \end{array}\right] = \int t\cdot 6t\,dt \\
&= 6\int t^2\,dt = 6\cdot\frac{t^3}{3} + C = 2\cdot(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}
$$

Zadatak 5.22. Izračunati $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \left[\begin{array}{lll} x^2 = t & \Rightarrow & x = t^{\frac{1}{2}} \\ & \Rightarrow & dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int t^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot\frac{(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{t^{-\frac{3}{2}}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int t^{-3}\cdot\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}\,dt = \left[\begin{array}{lll} \frac{1+t}{t} = z^2 & \Rightarrow & t = \frac{1}{z^2-1} \\ & \Rightarrow & dt = \frac{-2z}{(z^2-1)^2}\,dz \end{array}\right] \\
&= -\int \frac{(z^2-1)^3}{z^3}\cdot\frac{z}{(z^2-1)^2}\,dz = -\int \frac{z^2-1}{z^2}\,dz = -z - \frac{1}{z} + C \\
&= -\sqrt{\frac{1+t}{t}} - \sqrt{\frac{t}{1+t}} + C = -\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + C.
\end{aligned}
$$

III tip: Integrali oblika $\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$

Neka je dat integral $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, $a \neq 0$, gde je R racionalna funkcija od x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije primenom jedne od Ojlerovih smena.

1) $a > 0 \rightsquigarrow$ smena: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$ (prva Ojlerova smena);
2) $c > 0 \rightsquigarrow$ smena: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ (druga Ojlerova smena);
3) $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \rightsquigarrow$ smena: $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)\cdot t$ (treća Ojlerova smena).

Zadatak 5.23. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{2\,dx}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}$.
Rešenje.
Kako je $a > 0$ koristimo prvu Ojlerovu smenu:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x+3} = t-x \ \Rightarrow\ x^2+2x+3 = t^2-2xt+x^2 \ \Rightarrow\ x = \frac{t^2-3}{2t+2}\\ \Rightarrow\ dx = \frac{2t(2t+2)-(t^2-3)2}{4(t+1)^2}\,dt = \frac{t^2+2t+3)}{2(t+1)^2}\,dt\\ \Rightarrow\ x+1+\sqrt{x^2+2x+3} = t+1.\end{aligned}$$

Sada je

$$I = \int \frac{2\,dx}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{2\cdot\frac{t^2+2t+3)}{2(t+1)^2}\,dt}{t+1} = \int \frac{t^2+2t+3)}{(t+1)^3}\,dt.$$

Rastavljamo podintegralnu funkciju na zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{t^2+2t+3}{(t+1)^3} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} = \frac{A(t+1)^2+B(t+1)+C}{(t+1)^2},$$

$$t^2+2t+3 = At^2+(2A+B)t+A+B+C.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} A & & & & & = & 1\\ 2A & + & B & & & = & 2\\ A & + & B & + & C & = & 3\end{array}$$

dobija se da je $A = 1$, $B = 0$ i $C = 2$, odakle je

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{t+1} + 2\int \frac{dt}{(t+1)^3} = \begin{bmatrix} t+1 = s\\ dt = ds\end{bmatrix} = \int \frac{ds}{s} + 2\int \frac{ds}{s^3}\\ &= \ln|s| + 2\cdot\frac{s^{-2}}{-2} + C = \ln|t+1| - \frac{1}{(t+1)^2} + C,\end{aligned}$$

gde je $t = x+\sqrt{x^2+2x+3}$.

Zadatak 5.24. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.
Rešenje.
Kako je $c > 0$ koristimo drugu Ojlerovu smenu:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1 \ \Rightarrow\ 1-2x-x^2 = x^2t^2-2xt+1 \ \Rightarrow\ x = \frac{2t-2}{t^2+1}\\ \Rightarrow\ dx = \frac{2(t^2+1)-(2t-2)2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{-2(t^2-2t-1)}{(t^2+1)^2}\,dt\\ \Rightarrow\ 1+\sqrt{1-2x-x^2} = xt = \frac{2(t^2-t)}{t^2+1}.\end{aligned}$$

Sada je

$$I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{\frac{-2(t^2-2t-1)}{(t^2+1)^2}\,dt}{\frac{2(t^2-t)}{t^2+1}} = -\int \frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt.$$

Dakle, polazni integral smo sveli na integral prave racionalne funkcije, koju je potrebno rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka

$$\begin{aligned}\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}\\ &= \frac{A(t-1)(t^2+1) + Bt(t^2+1) + (Ct+D)t(t-1)}{t(t-1)(t^2+1)}\end{aligned}$$

Otuda je

$$t^2-2t-1 = (A+B+C)t^3 + (-A-C+D)t^2 + (A+B-D)t - A.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} A & + & B & + & C & & & = & 0\\ -A & & & - & C & + & D & = & 1\\ A & + & B & & & - & D & = & -2\\ -A & & & & & & & = & -1 \end{array}$$

dobija se da je $A=1$, $B=-1$, $C=0$ i $D=2$.

Konačno,

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1}\\ &= -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C\\ &= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C, \end{aligned}$$

gde je $t = \dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

Zadatak 5.25. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{2x-x^2}}$.

Rešenje.

Kako je $a=0$, $c<0$ i $2x-x^2 = x(2-x)$, koristićemo treću Ojlerovu smenu

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-x^2} = xt \;&\Rightarrow\; 2x-x^2 = x^2t^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{1+t^2}\\ &\Rightarrow\; dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt\\ &\Rightarrow\; x+1+\sqrt{2x-x^2} = \frac{2}{1+t^2} + 1 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{t^2+2t+3}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Sada je

$$I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt}{\frac{t^2+2t+3}{1+t^2}} = \int \frac{-4t}{(t^2+1)(t^2+2t+3)}\,dt.$$

Potrebno je napisati podintegralnu funkciju u obliku zbira parcijanih razlomaka

$$\frac{-4t}{(t^2+1)(t^2+2t+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+2t+3} = \frac{(At+B)(t^2+2t+3) + (Ct+D)(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+2t+3)},$$

$$-4t = (A+C)t^3 + (2A+B+D)t^2 + (3A+2B+C)t + 3B+D.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} A & & & + & C & & & = & 0 \\ 2A & + & B & & & + & D & = & 0 \\ 3A & + & 2B & + & C & & & = & -4 \\ & & 3B & & & + & D & = & 0 \end{array}$$

dobija se da je $A=-1$, $B=-1$, $C=1$ i $D=3$. Otuda je

$$I=-\int\frac{t+1}{t^2+1}\,dt+\int\frac{t+3}{t^2+2t+3}\,dt=-\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt-\int\frac{dt}{t^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2t+2}{t^2+2t+3}\,dt+2\int\frac{dt}{(t+1)^2+2}$$

$$=\left[\begin{array}{rcl} t^2+1=s & \Rightarrow & 2t\,dt=ds \\ t^2+2t+3=z & \Rightarrow & (2t+2)\,dt=dz \\ t+1=m & \Rightarrow & dt=dm \end{array}\right]=-\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s}-\int\frac{dt}{t^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}+2\int\frac{dm}{m^2+2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|s|-\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{m}{\sqrt{2}}+C=\ln\sqrt{\frac{t^2+2t+3}{t^2+1}}-\operatorname{arctg}t+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C,$$

gde je $t=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$.

Ojlerove smene u većini slučajeva dovode do integrala prilično glomaznih racionalnih funkcija, pa se preporučuje da se one koriste samo u slučajevima kada nema drugih mogućnosti integracije. Razmotrićemo zbog toga neke specijalne slučajeve integrala $\displaystyle\int R(x,\,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ za koje postoje metodi rešavanja pogodniji od Ojlerovih smena.

a) Metod Ostrogradskog.

Integral oblika $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $a\neq 0$, gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena od x ($n\geq 1$), rešava se primenom identiteta

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a λ neodređena (nepoznata) konstanta. Nađemo izvod leve i desne strane poslednje jednakosti i sređivanjem po stepenima od x, određuju se koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i λ, rešavanjem sistema od $n+1$ nepoznatih.

Zadatak 5.26. Izračunati $I=\displaystyle\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$

Rešenje.

Kako je polinom u brojiocu drugog stepena, primenjujemo gore navedeni identitet za $n=2$, dakle $Q_1(x)=Ax+B$, odnosno

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Diferenciranjem ove jednakosti dobija se

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=A\sqrt{x^2+x+1}+(Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Nakon množenja cele poslednje jednakosti sa $2\sqrt{x^2+x+1}$, sledi

$$\begin{aligned} 2x^2+2&=2A(x^2+x+1)+2Ax^2+2Bx+Ax+B+2\lambda \\ &=4Ax^2+(3A+2B)x+2A+B+2\lambda \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina:

$$\begin{array}{ccccccc} 4A & & & & & = & 2 \\ 3A & + & 2B & & & = & 0 \\ 2A & + & B & + & 2\lambda & = & 2 \end{array}$$

dobija se $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{4}$ i $\lambda = \frac{7}{8}$, odakle je

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx &= \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} \\ &= \frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8}\ln\left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

Zadatak 5.27. Izračunati $I = \int \sqrt{x^2+a}\, dx$.

Rešenje.

Podintegralnu funkciju možemo zapisati u obliku $\sqrt{x^2+a} = \dfrac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}$, pa imamo

$$\int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}\, dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+a} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Diferenciranjem ove jednakosti dobija se

$$\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}} = A\sqrt{x^2+a} + (Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Nakon množenja poslednje jednakosti sa $\sqrt{x^2+a}$, sledi

$$\begin{aligned} x^2+a &= A(x^2+a) + (Ax+B)x + \lambda \\ &= 2Ax^2 + Bx + Aa + \lambda \end{aligned}$$

odakle je $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$ i $\lambda = \frac{a}{2}$, pa imamo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+a}\, dx &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C. \end{aligned}$$

b) Integral oblika $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, svodi se na integral prethodnog tipa uvođenjem smene $x - \alpha = \frac{1}{t}$.

Zadatak 5.28. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} &= \left[\begin{array}{l} x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} \\ x^2+2x = \frac{(1-t)^2}{t^2} + \frac{2-2t}{t} = \frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{t^2} = \frac{1-t^2}{t^2} \end{array}\right] \\ &= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = \int \frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \sqrt{1-t^2}dt - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t - \arcsin t + C \\ &= \frac{1}{2(x+1)}\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

5.8. Integrali trigonometrijskih funkcija

I tip: Integrali oblika $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$, $\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$, $\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$, gde su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, rešavaju se primenom trigonometrijskih identiteta:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right]\\
\sin(\alpha x)\sin(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right]\\
\cos(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right].
\end{aligned}$$

Zadatak 5.29. Izračunati $I = \int \cos x\cos(2x)\cos(3x)\;dx$.
Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos x\cos(2x)\cos(3x)\;dx = \frac{1}{2}\int \cos x\left[\cos x + \cos(5x)\right]\;dx\\
&= \frac{1}{2}\int \cos x\cos x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos x\cos(5x)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int \left[1+\cos(2x)\right]\;dx + \frac{1}{4}\int \left[\cos(4x)+\cos(6x)\right]\;dx\\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{1}{24}\sin(6x) + C.
\end{aligned}$$

II tip: Integrali oblika $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od $\sin x$ i $\cos x$. Svaki ovakav integral može se svesti na integral racionalne funkcije po novoj promenljivoj, tzv. univerzalnom trigonometrijskom smenom $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Otuda je $x = 2\operatorname{arctg} t$, odnosno $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Koristeći poznate trigonometrijske identitete dobijamo

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{i} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Sledi da je

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

gde je R_1 nova racionalna funkcija.

Zadatak 5.30. Izračunati $I = \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$.
Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right] = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3}\,dt\\
&= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2dt}{2(t^2+2t+2)} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1}\\
&= \operatorname{arctg}(t+1) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1) + C.
\end{aligned}$$

Smena $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ često dovodi do integrala glomaznih racionalnih funkcija, pa je preporučljivo izbegavati je onda kada je to moguće. Navešćemo neke od specijalnih slučajeva integrala racionalne funkcije od $\sin x$ i $\cos x$, u kojima je pogodnije uvesti neku drugu smenu.

1) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \rightsquigarrow$ smena: $\sin x = t$ $(\cos x\, dx = dt)$;

2) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \rightsquigarrow$ smena: $\cos x = t$ $(-\sin x\, dx = dt)$;

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \rightsquigarrow$ smena: $\operatorname{tg} x = t$ $\left(dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$.

Zadatak 5.31. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \sin(2x)}$.
Rešenje.
Koristeći trigonomertijske identitete $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, sledi

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \sin(2x)} = \int \frac{dx}{2\sin x \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}\, dx.$$

Podintegralna funkcija je

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)},$$

kako je

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)} = -R(\sin x, \cos x),$$

uvodimo smenu $\sin x = t,\ \cos x\ dx = dt$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}\, dt = \frac{1}{2}\int t^{-2}\, dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} \\ &= -\frac{1}{2t} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C. \end{aligned}$$

Zadatak 5.32. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$.
Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x} \sin x\, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x} \sin x\, dx \\ &= \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{bmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}\, dt = -\int \frac{t^4-2t^2+1}{t^4}\, dt \\ &= -\int dt + 2\int t^{-2}\, dt - \int t^{-4}\, dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C \\ &= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C. \end{aligned}$$

Zadatak 5.33. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.
Rešenje.
Prisetimo se trigonometrijskih identiteta: $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ i $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t,\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C. \end{aligned}$$

Zadatak 5.34. Izračunati integral $I = \displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$.

Rešenje.

Deljenjem brojioca i imenioca podintegralne funkcije sa $\cos x$, dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 2} dx = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t, \ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{bmatrix} \\ &= \int \frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t-1}{(t+2)(t^2+1)} dt. \end{aligned}$$

Polazni integral smo sveli na integral prave racionalne funkcije, pa je podintegralnu funkciju potrebno rastaviti na sumu parcijalnih razlomka.

$$\frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Ct + 2Bt + 2C}{(t+2)(t^2+1)}$$

$$t - 1 = (A+B)t^2 + (2B+C)t + A + 2C$$

Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & B & & & = & 1 \\ & & 2B & + & C & = & 1 \\ A & + & & & 2C & = & -1 \end{array}$$

dobijamo da je $A = -\dfrac{3}{5}$, $B = \dfrac{3}{5}$ i $C = -\dfrac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} I &= -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5}\int \frac{3t-1}{t^2+1} dt \\ &= -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{3}{10}\int \frac{2t}{t^2+1} dt - \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= -\frac{3}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{10}\ln\left|t^2+1\right| - \frac{1}{5}\operatorname{arctg} t + C \\ &= -\frac{3}{5}\ln|\operatorname{tg} x + 2| - \frac{3}{10}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| - \frac{1}{5}x + C. \end{aligned}$$

III tip: Integrali oblika $\displaystyle\int (\sin(\alpha x))^m (\cos(\beta x))^n\,dx,\ m, n \in \mathbb{N}$ rešavaju se pomoću Ojlerovih formula:

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x i} - e^{-\alpha x i}}{2i}, \quad \cos(\beta x) = \frac{e^{\beta x i} + e^{-\beta x i}}{2}$$

Zadatak 5.35. Izračunati $I = \displaystyle\int \sin^3 x \cos^2(3x)\,dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cos^2(3x) &= \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} - e^{-3xi}}{-8i} \cdot \frac{e^{6xi} + 2 + e^{-6xi}}{4} \\ &= -\frac{1}{32i}\Big(e^{9xi} + 2e^{3xi} + e^{-3xi} - 3e^{7xi} - 6e^{xi} - 3e^{-5xi} \\ &\quad + 3e^{5xi} + 6e^{-xi} + 3e^{-7xi} - e^{3xi} - 2e^{-3xi} - e^{-9xi}\Big) \\ &= -\frac{1}{16} \cdot \frac{e^{9xi} - e^{-9xi}}{2i} + \frac{3}{16} \cdot \frac{e^{7xi} - e^{-7xi}}{2i} - \frac{3}{16} \cdot \frac{e^{5xi} - e^{-5xi}}{2i} \\ &\quad - \frac{1}{16} \cdot \frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i} + \frac{6}{16} \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \\ &= -\frac{1}{16}\sin 9x + \frac{3}{16}\sin 7x - \frac{3}{16}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{6}{16}\sin x \end{aligned}$$

Sada rešavamo polazni integral

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{16}\int \sin 9x\,dx + \frac{3}{16}\int \sin 7x\,dx - \frac{3}{16}\int \sin 5x\,dx - \frac{1}{16}\int \sin 3x\,dx + \frac{6}{16}\int \sin x\,dx \\ &= \frac{1}{144}\cos 9x - \frac{3}{112}\cos 7x + \frac{3}{80}\cos 5x + \frac{1}{48}\cos 3x - \frac{3}{8}\cos x + C. \end{aligned}$$

IV tip: Integral oblika

$$I = \int \Big(P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) + Q_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)\Big)\,dx,$$

gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, $Q_m(x)$ polinom m-tog stepena, a α i β proizvoljne konstante, rešava se primenom identiteta

$$I = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) + T_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C,$$

gde su $R_k(x)$ i $T_k(x)$ polinomi k-tog stepena sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a $k = \max\{m, n\}$. Diferenciranjem leve i desne strane, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x i rešavanjem sistema od $2k+2$ jednačina sa $2k+2$ nepoznatih, dobijaju se koeficijenti polinoma $R_k(x)$ i $T_k(x)$.

Zadatak 5.36. Izračunati $I = \displaystyle\int \Big((x^2-2)e^{2x}\sin x + xe^{2x}\cos x\Big)\,dx$.

Rešenje.

U ovom slučaju stepeni polinoma su $n = 2$, $m = 1$, pa je $k = \max\{2, 1\} = 2$. Nepoznati polinomi su $R_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ i $S_2(x) = Dx^2 + Ex + F$. Primenjujemo gore navedeni identitet.

$$\begin{aligned} &\int \Big((x^2-2)e^{2x}\sin x + xe^{2x}\cos x\Big)\,dx \\ &\qquad = \big[Ax^2+Bx+C\big]\,e^{2x}\sin x + \big[Dx^2+Ex+F\big]\,e^{2x}\cos x + C \Big/{}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^2-2)&e^{2x}\sin x + xe^{2x}\cos x = \\ &= [2Ax+B]\,e^{2x}\sin x + \big[Ax^2+Bx+C\big]\,e^{2x}(2\sin x + \cos x) \\ &\quad + [2Dx+E]\,e^{2x}\cos x + \big[Dx^2+Ex+F\big]\,e^{2x}(2\cos x - \sin x) \\ &= e^{2x}\sin x\,\big[2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C - Dx^2 - Ex - F\big] \\ &\quad + e^{2x}\cos x\,\big[Ax^2 + Bx + C + 2Dx + E + 2Dx^2 + 2Ex + 2F\big] \\ &= \big[(2A-D)x^2 + (2A+2B-E)x + B + 2C - F\big]\,e^{2x}\sin x \\ &\quad + \big[(A+2D)x^2 + (B+2D+2E)x + C + E + 2F\big]\,e^{2x}\cos x. \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{cccccccc} 2A & & & -D & & & = & 1 \\ 2A & +2B & & & -E & & = & 0 \\ & B & +2C & & & -F & = & -2 \\ A & & & +2D & & & = & 0 \\ & B & & +2D & +2E & & = & 1 \\ & & C & & +E & +2F & = & 0 \end{array}$$

dobijamo $A = \frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{25}$, $C = -\frac{116}{125}$, $D = -\frac{1}{5}$, $E = \frac{18}{25}$ i $F = \frac{13}{125}$.

Dakle,

$$I = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{116}{125}\right)e^{2x}\sin x + \left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{13}{125}\right)e^{2x}\cos x + C.$$

5.9. Integrali eksponencijalne funkcije

Integral oblika $\int R(e^x)\,dx$, gde je R racionalna funkcija od e^x, rešava se smenom $e^x = t$. Tada je $x = \ln t$, odakle je $dx = \frac{dt}{t}$, pa je $\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\frac{dt}{t}$, što znači da se integral svodi na integral racionalne funkcije od t.

Zadatak 5.37. Izračunati $I = \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx = \left[\begin{array}{c} e^{\frac{x}{2}} = t \quad \Rightarrow \quad x = 2\ln t \\ dx = \frac{2}{t}\,dt \end{array}\right] \\
&= 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{t} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2(1+t^2)}\,dt \\
&= \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow & du = \frac{dt}{1+t^2} \\ dv = \frac{dt}{t^2(t^2+1)} \quad \Rightarrow & v = \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)}\,dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \end{array}\right] \\
&= 2\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}^2 t + \underbrace{\int \frac{dt}{t(1+t^2)}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,dt}_{I_2}\right)
\end{aligned}
$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{1+t^2}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C_1, \\
I_2 &= \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}dt = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} t = z \\ \frac{dt}{1+t^2} = dz \end{array}\right] = \int z\,dz = \frac{z^2}{2} + C_2 = \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2} + C_2.
\end{aligned}
$$

Konačno,

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{2\operatorname{arctg} t}{t} - 2\operatorname{arctg}^2 t + 2\ln|t| - \ln\left|1+t^2\right| + \operatorname{arctg}^2 t + C \\
&= -\frac{2\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} - \operatorname{arctg}^2 e^{\frac{x}{2}} + \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C.
\end{aligned}
$$

5.10. Zadaci za samostalan rad

Izračunati sledeće integrale:

1. $\int \frac{dx}{7x^2-8}$
2. $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$
3. $\int (x^2+1)\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$
4. $\int \arcsin x\ \ln x\,dx$
5. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$
7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$
8. $\int \frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$
9. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$
10. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt[6]{x})}$
12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$
13. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$
14. $\int \sin(6x)\cos(7x)dx$
15. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$
16. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^{3x}}\,dx$