6. Određeni integral

6.1. Definicija i osnovne osobine

Uočimo zatvoren interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Konačan skup tačaka $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, takav da je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, zovemo *podela intervala* $[a, b]$. Sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n$ označimo dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Parametar podele P je maksimalna dužina intervala podele P, tj.

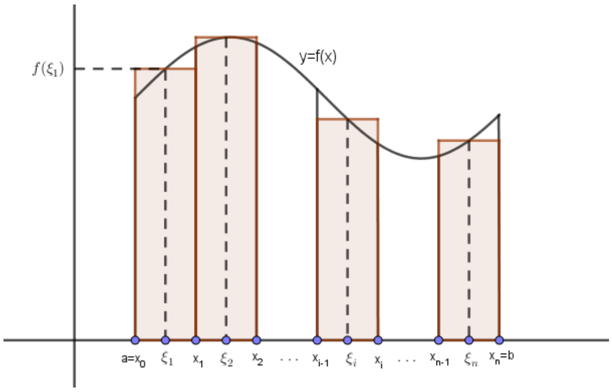
$$\lambda(P) = \max_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i.$$

Na svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$ izaberemo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Na ovaj način dobija se podela intervala $[a, b]$ sa izabranom tačkom koju označavamo sa (P, ξ).

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i neka je (P, ξ) podela sa izabranom tačkom intervala $[a, b]$. Zbir

$$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

se naziva integralna ili Rimanova suma funkcije $f(x)$ za datu podelu (P, ξ).



Primetimo da je $f(\xi_i)\Delta x_i$ jednako površini pravougaonika sa stranicama $f(\xi_i)$ i Δx_i, što nam govori da će nam integralna suma (odnosno određeni integral) koristiti da izračunamo površinu dvodimenzionalnih figura.

Definicija 6.1. Za broj I kažemo da je limes (granična vrednost) integralnih suma $S(f, P, \xi)$ funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, za $\lambda(P) \to 0$ i pišemo $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f, P, \xi)$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za svaku podelu P i svaku izabranu tačku $\xi \in \xi(P)$, kada $\lambda(P) < \delta$, važi nejednakost $|S(f, P, \xi) - I| < \varepsilon$. Ako postoji $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f, P, \xi) = I$, onda se kaže da je $f(x)$ integrabilna u Rimanovom smislu nad intervalom $[a, b]$. Broj I se naziva **Rimanov ili određeni integral** funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ i piše se

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Pri tom se a i b nazivaju donja odnosno gornja granica integrala, respektivno.

Podela intervala $[a, b]$ na n jednakih delova se naziva ekvidinstantna podela i zbog jednostavnijeg zapisa samo ćemo nju koristiti kod zadataka. Za nju važi da su dužine svih podintervala

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n},\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zbog lakšeg zapisa ćemo takođe umesto $S(f, P, \xi)$ koristiti oznaku S_n, gde je n broj delova na koliko je podeljen interval $[a, b]$.

- **Njutn-Lajbnicova formula**

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ i ako $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a,b]$, tada je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ova formula i znanje iz rešavanja neodređenog integrale će nam koristiti da rešavamo i određeni integral.

- **Smena promenljive**

Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, a funkcija $\varphi : [\alpha_0, \beta_0] \to [a,b]$ ima neprekidan izvod. Ako je $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0], \beta \in [\alpha_0, \beta_0], a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, onda važi jednakost

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Voditi računa da se sa smenom menjaju i granice integrala.

- **Parcijalna integracija**

Neka funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju neprekidne izvode nad intervalom $[a,b]$. Tada važi jednakost

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx,$$

ili kraće

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

- **Osobine određenog integrala**

1. Ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a onda je $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

2. Ako je $a < b$ i $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ postoji, onda je $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

3. $\int\limits_a^b \Big(f(x) \pm g(x)\Big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

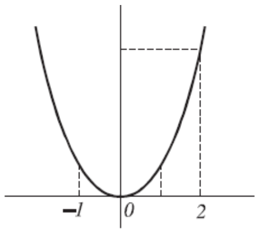
4. $\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

5. Neka tačke a, b i $c \in \mathbb{R}$ predstavljaju krajeve za tri zatvorena intervala. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na najvećem od ovih intervala, onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi jednakost
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

6. Ako je funkcija $f(x)$ parna, tada je $\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$, a ako je neparna, tada $\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

Zadatak 6.2. Izračunati po definiciji $\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx$.

Rešenje.



Interval $[-1,2]$ podelimo na n jednakih delova. Tada je $\Delta x_i = \dfrac{2-(-1)}{n} = \dfrac{3}{n}$, a za tačke ξ_i izaberimo desne krajeve intervala $[x_{i-1}, x_i]$, tj. $\xi_i = x_i$. Izvedimo izraz za x_i. Kako je $x_1 = -1 + \dfrac{3}{n}, x_2 = x_1 + \dfrac{3}{n} = -1 + 2\cdot\dfrac{3}{n}, \ldots$ vidimo da je $x_k = -1 + \dfrac{3k}{n},\ k = 1, 2, \ldots, n$. Dakle,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2\cdot\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right)\\
&= \frac{3}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\
&= \frac{3}{n}\left(n - \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= 3 - 9\frac{n^2+n}{n^2} + \frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\\
&= 3 + \frac{-19n^2-18n+18n^2+27n+9}{2n^2} = 3 + \frac{9(n+1)}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Konačno,

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{9(n+1)}{2n^2}\right) = 3.$$

Napomena 6.3. Koristeći Njutn-Lajbnicovu formulu dobijamo

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Zadatak 6.4. Primenom određenog integrala odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ako je

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

Rešenje. Zapišimo

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\left(=\Delta x_i\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right).$$

Dobili smo integralnu sumu funkcije $f(x) = x$ nad intervalom $[0,1]$ sa podelom $P = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\}$, $\xi_i = x_i = \dfrac{i}{n}$ i $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int\limits_{0}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

Napomena 6.5. Kod ovih zadataka obično se izraz zapiše kao suma, a zatim ispred sume izvuče $\frac{1}{n}$ (ili $\frac{2}{n}$ ili $\frac{k}{n}$ za neki pozitivan broj k) što bi predstavljalo dužinu podintervala Δx_i kod ekvidistante podele. Onda se opšti član sume zapiše tako da se u tom izrazu pojavljuju i i n zajedno i to u obliku $\frac{i}{n}$ (ili $\frac{k\cdot i}{n}$ za neko k) tako da se dobije $x_i = \frac{i}{n}$, a granice integrala su i granice intervala $[a, b]$, pa je $a = x_0 = \frac{0}{n} = 0$ i $b = x_n = \frac{n}{n} = 1$ (ili ako je $x_i = \frac{k\cdot i}{n}$ onda je $b = x_n = \frac{k\cdot n}{n} = k$ za neko k). Kada to sredimo, opšti član sume posmatramo kao $f(\frac{i}{n})$, tj. od njega dobijamo podintegralnu funkciju $f(x)$.

Zadatak 6.6. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ako je

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

Rešenje. Traženu graničnu vrednost ćemo odrediti pomoću određenog integrala i Njutn-Lajbnicove formule.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \\ &= \frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}. \end{aligned}$$

Vidimo da je to integralna suma za funkciju $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ nad $[0,1]$ sa ekvidistantnom podelom $P = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\}$, $\xi_i = x_i = \dfrac{i}{n}$ i $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Zadatak 6.7. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ako je

$$b_n = n^2\left(\frac{1}{(n+1)(n^2+1)} + \frac{1}{(n+2)(n^2+2^2)} + \cdots + \frac{1}{4n^3}\right).$$

Rešenje. Vidimo da ima n sabiraka zato što je $4n^3 = (n+n)(n^2+n^2)$. Slično kao u prethodnim zadacima imamo $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2}{(n+i)(n^2+i^2)}$, a kada podelimo i imenilac i brojilac sa n^3 dobijamo

$$b_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+i}{n}\cdot\frac{n^2+i^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+(\frac{i}{n})^2)}.$$

Vidimo da je b_n jednako integralnoj sumi funkcije $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}$ nad $[0,1]$ sa istom podelom kao u prethodnim zadacima. Tako da je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}.$$

Iz $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \dfrac{A}{1+x} + \dfrac{Bx+C}{1+x^2}$ dobija se da je $A = C = \dfrac{1}{2}$ i $B = -\dfrac{1}{2}$.

Konačno,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{-x+1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+x|\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.8. Izračunati određeni integral $\int\limits_{-2}^{3} |x|\,dx$.

Rešenje. Koristićemo Njutn-Lajbnicovu formulu, tako da nam treba neodređeni integral od $|x|$. Kako je $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ sledi da se početni integral rastavlja na dva integrala

$$\begin{aligned} \int\limits_{-2}^{3} |x|\,dx &= -\int\limits_{-2}^{0} x\,dx + \int\limits_{0}^{3} x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3} \\ &= -\frac{1}{2}(0^2 - (-2)^2) + \frac{1}{2}(3^2 - 0^2) = \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.9. Izračunati određeni integral $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$.

Rešenje. Slično kao u prethodnom zadatku imamo da je

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \ln x \geq 0 \quad \text{tj. } x \geq 1, \\ -\ln x, & \ln x < 0 \quad \text{tj. } 0 < x < 1, \end{cases}$$

pa je

$$\begin{aligned} \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx &= -\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\,dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} \\ &= -\left(x \ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} dx \right) + x\ln x\Big|_{1}^{e} - \int\limits_{1}^{e} dx \\ &= -\left(0 - \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} \right) + e - 0 - x\Big|_{1}^{e} \\ &= -\left(\frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right) + e - (e-1) = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.10. Izračunati određeni integral $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$.

Rešenje. Izračunajmo ovaj integral pomoću smene

$$\begin{aligned} \int\limits_{1}^{e^3} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx &= \begin{bmatrix} 1 + \ln x = t^2 & \Rightarrow & \frac{dx}{x} = 2t\,dt \\ x = 1 & \Rightarrow & t = 1 \\ x = e^3 & \Rightarrow & t = 2 \end{bmatrix} = 2\int\limits_{1}^{2} t^2\,dt \\ &= \frac{2}{3}t^3\Big|_{1}^{2} = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

6.2. Površina ravnih likova

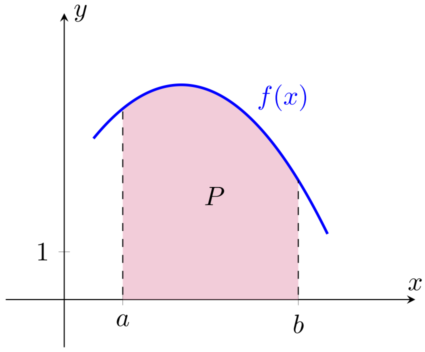
Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$.

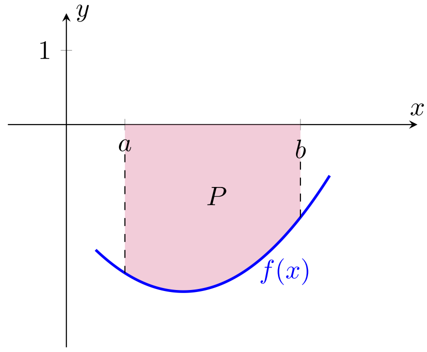
Ako sa P označimo merni broj površine krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $y = f(x) \geq 0$, x-osom i pravim $x = a$ i $x = b$, onda važi

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako je funkcija $f(x) \leq 0$, onda se merni broj površine ograničene krivom $y = f(x)$, x-osom i pravim $x = a$ i $x = b$ može izračunati kao

$$P = -\int_a^b f(x)\,dx.$$





Ako je $c \in (a, b)$ i za neprekidnu funkciju $f(x)$ važi da je

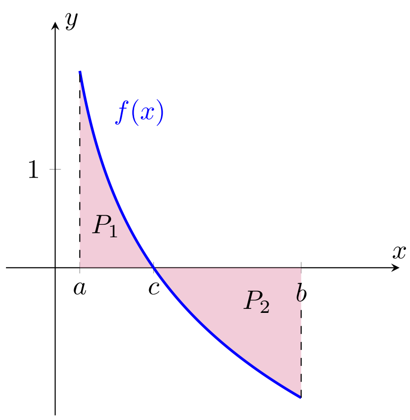
$$f(x) \geq 0 \text{ za } x \in [a, c] \quad \text{i} \quad f(x) \leq 0 \text{ za } x \in [c, b],$$

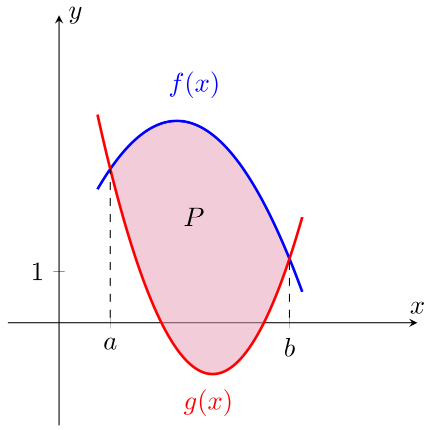
merni broj površine ograničene krivom $y = f(x)$, x-osom i pravim $x = a$ i $x = b$ može se izračunati kao

$$P = P_1 + P_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ako za neprekidne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ važi $f(x) \geq g(x)$, tada je merni broj površine ograničene krivim $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i pravim $x = a$ i $x = b$ moguće izračunati kao

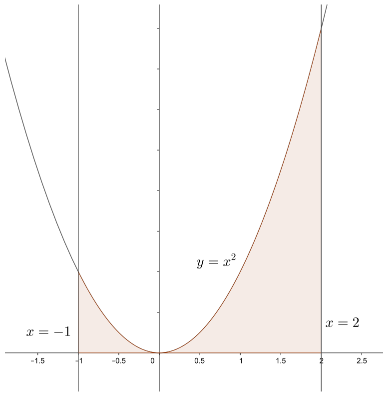
$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$





Zadatak 6.11. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y = x^2$, i pravim $x = -1$, $x = 2$ i $y = 0$.

Rešenje.



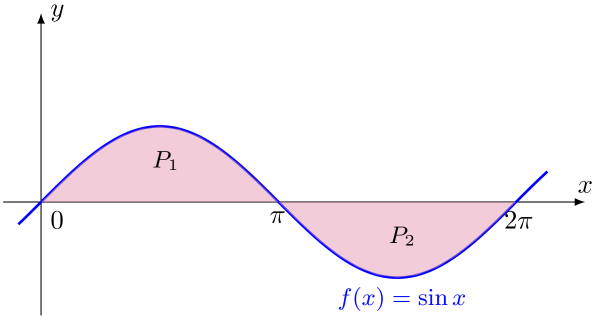
Primetimo, traži se površina koju funkcija $y = x^2$ zahvata sa x-osom, na intervalu $-1 \leq x \leq 2$. Po definiciji određenog integrala, da bi došli do tražene površine, potrebno je izračunati integral date funkcije na tom intervalu, tj.

$$P = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{-1}{3} = 3.$$

Zadatak 6.12. Izračunati površinu koju sinusoida $y = \sin x$ zahvata na intervalu $[0, 2\pi]$ sa x-osom.

Rešenje.

Funkcija $f(x) = \sin x$ menja znak u $x = \pi$, tj. na intervalu $(0, \pi)$ je pozitivna, a na intervalu $(\pi, 2\pi)$ je negativna.



- *Prvi način:*

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$= -(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) = -(-1-1) + (1-(-1)) = 4.$$

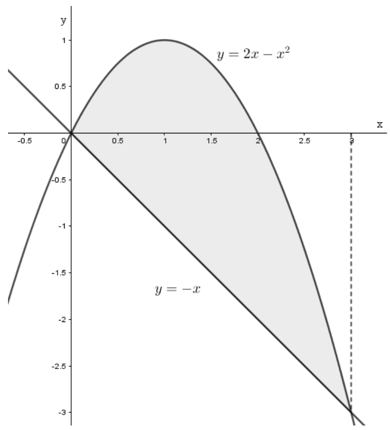
- *Drugi način:*
  Površine P_1 i P_2 su jednake, pa traženu površinu možemo izračunati i na sledeći način

$$P = 2P_1 = 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} = -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = 4.$$

Zadatak 6.13. Izračunati površinu figure ograničene parabolom $y = 2x - x^2$ i pravom $x + y = 0$.

Rešenje.

Prvo je potrebno naći presek datih krivih, tj. tražimo x i y takve da zadovoljavaju $y = 2x - x^2$ i $x + y = 0$. Dobijamo da je $2x - x^2 = -x$, tj. $x(3 - x) = 0$. Imamo dva rešenja $x = 0$ i $x = 3$.



Sa slike se vidi da je $y = 2x - x^2$ gornja, a da je $y = -x$ donja funkcija. Tako da je površina ograničene oblasti jednaka

$$P = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3$$
$$= \frac{3}{2} \cdot 9 - \frac{27}{3} - 0 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.$$

Zadatak 6.14. Izračunati površinu figure ograničene krivim $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ i $y = 2x$.

Rešenje.

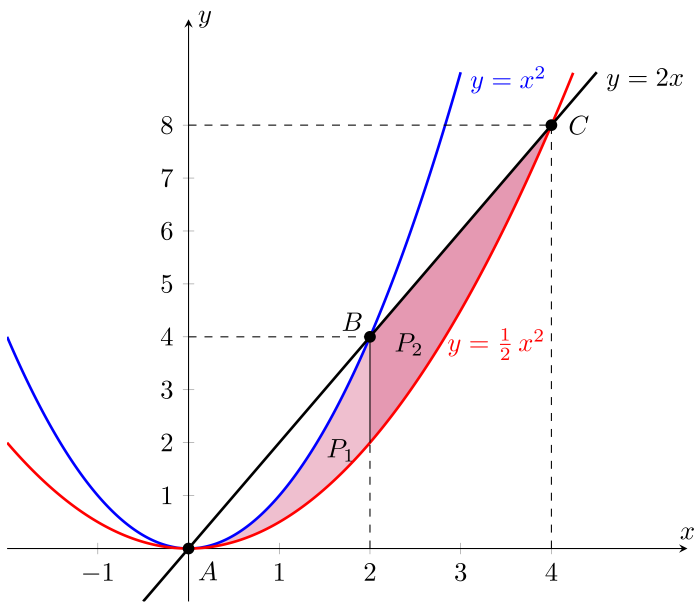
Parabole $y = x^2$ i $y = \frac{1}{2}x^2$ se dodiriju u tački $A(0, 0)$.

Tačke preseka parabole $y = x^2$ i prave su

$$\begin{aligned} x^2 = 2x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 2 \quad \Rightarrow \quad A(0,0),\ B(2,4), \end{aligned}$$

a tačke preseka parabole $y = \dfrac{1}{2}x^2$ i prave su

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 = 2x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 4 \quad \Rightarrow \quad A(0,0),\ C(4,8). \end{aligned}$$



Sa slike vidimo da je tražena oblast na intervalu $(0,2)$ ograničena parabolama, a na intervalu $(2,4)$ pravom i parabolom $y=\frac{1}{2}x^2$.

Otuda je

$$
\begin{aligned}
P = P_1 + P_2 &= \int\limits_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \int\limits_2^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2\,dx + \int\limits_2^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 + \left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_2^4 \\
&= \frac{8}{6} - 0 + 16 - \frac{64}{6} - 4 + \frac{8}{6} = 4.
\end{aligned}
$$

Zadatak 6.15. Izračunati površinu figure ograničene kružnicom $x^2+y^2=8$ i parabolama $y^2=7x$ i $y=x^2-x$, tako da tačka $(1,1)$ pripada datoj figuri.

Rešenje.

Da bismo mogli da skiciramo crtež potrebno je odrediti presečne tačke. U ovom primeru će dovoljno biti da odredimo presečne tačke kružnice sa parabolama.

Nađimo presek kružnice i parabole $y^2=7x$.

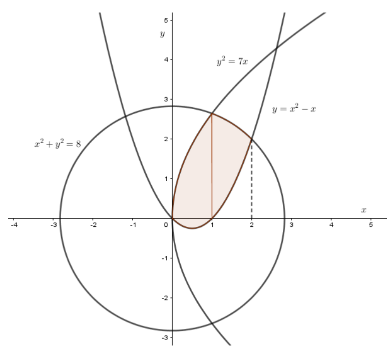
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2=8 \wedge y^2=7x \quad &\Rightarrow \quad x^2+7x-8=0 \\
&\Rightarrow \quad (x+8)(x-1)=0 \\
&\Rightarrow \quad x=-8 \vee x=1
\end{aligned}
$$

Kako x mora biti pozitivno zbog jednačine parabole $y^2=7x$, sledi da se parabola i prava seku u tačkama $(1,\sqrt{7})$ i $(1,-\sqrt{7})$.

Nađimo presek kružnice i parabole $y=x^2-x$.

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2=8 \wedge y=x^2-x \quad &\Rightarrow \quad x^2+(x^2-x)^2=8 \quad \Rightarrow \quad x^4-2x^3+2x^2-8=0 \\
&\Rightarrow \quad x^3(x-2)+2(x-2)(x+2)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x^3+2x+4)=0
\end{aligned}
$$

Možemo uočiti da je jedno rešenje ove jednačine $x=2$ i to je zapravo traženo x, drugo x je negativno što zaključujemo iz oblika parabole.



Kako nama treba oblast u kojoj je tačka $(1,1)$ u unutrašnjosti kružnice i pošto tačke $(1,\sqrt{7})$ i $(1,0)$ pripadaju prvoj, odnosno drugoj paraboli, iz odnosa njihovih y-koordinata $0<1<\sqrt{7}$ sledi da je tražena oblast baš osenčena oblast sa slike. Konačno,

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^1 \left(\sqrt{7x} - (x^2 - x)\right) dx + \int_1^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - (x^2 - x)\right) dx \\
&= \left(\sqrt{7} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{8 - x^2} + \frac{8}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + 4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + 4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(4-3)\sqrt{7}}{6} + \frac{13}{6} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} - 4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{6} + \frac{4}{3} + \pi - 4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Napomena 6.16. Morali smo da podelimo oblast (a onda i integral) na dva dela zato što gonja funkcija nije ista na intervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$. Generalno, čim se negde promeni donja ili gornja funkcija koja ograničava oblast, potrebno je u toj tački promene podeliti oblast, a samim tim moramo i više integrala računati.

Takođe, voditi računa da parabola $y^2 = 7x$ ima dva kraka $y = \sqrt{7x}$ i $y = -\sqrt{7x}$, ali nama je u ovom zadatku bio potreban samo krak $y = \sqrt{7x}$.

6.3. Dužina luka krive

Pretpostavimo da je u ravni definisana kriva sa $y = f(x)$, $a \le x \le b$, gde funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod $f'(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Dužina luka krive $y = f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ je

$$
l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.
$$

Zadatak 6.17. Izračunati dužinu luka krive $y = \ln\cos x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Rešenje. Za funkciju $y = \ln\cos x$ je $y' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, te je na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dužina luka krive

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 6.18. Naći dužinu luka krive $y^2 - 2\ln y - 4x = 0$ od $x = \dfrac{1}{4}$ do $x = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{1}{2}$.

Rešenje. Pošto je teško ovu krivu izraziti kao $y = y(x)$, izrazićemo je kao $x = x(y)$, tj. $x = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln y}{2}$. Znači, x i y će zameniti uloge. Treba nam i $x' = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{2y} = \dfrac{y^2 - 1}{2y}$.

Za $x = \dfrac{1}{4}$ imamo $y^2 - 2\ln y = 1 \;\Rightarrow\; y = 1$.

Za $x = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{1}{2}$ imamo $y^2 - 2\ln y = e^2 - 2 \;\Rightarrow\; y = e$.

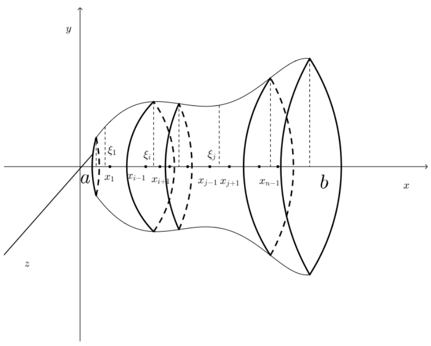
Kako iz izvoda inverzne fukcije znamo $y' = \dfrac{1}{x'}$, sledi $dx = x'dy$, odnosno

$$
\sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{(x')^2}}\; x'\, dy = \sqrt{1 + (x')^2}\, dy.
$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
l &= \int_1^e \sqrt{1+(x')^2}dy = \int_1^e \sqrt{1+\Big(\frac{y^2-1}{2y}\Big)^2}dy = \int_1^e \sqrt{\frac{4y^2+y^4-2y^2+1}{4y^2}} \\
&= \int_1^e \sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{(2y)^2}}dy = \int_1^e \frac{y^2+1}{2y}dy = \frac{1}{2}\int_1^e ydy + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{dy}{y} \\
&= \frac{1}{4}y^2\Big|_1^e + \frac{1}{2}\ln|y|\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2-1) + \frac{1}{2}(1-0) = \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

6.4. Zapremina obrtnih tela



Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom $[a,b]$. Ako je krivolinijski trapez, čije stranice su interval $[a,b]$, delovi pravih $x=a$ i $x=b$ i kriva $y=f(x), a \le x \le b$, obrće oko x-ose, dobija se obrtno telo.

Zapremina tela dobijenog obrtanjem krive $y=f(x)$ oko x-ose nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ je

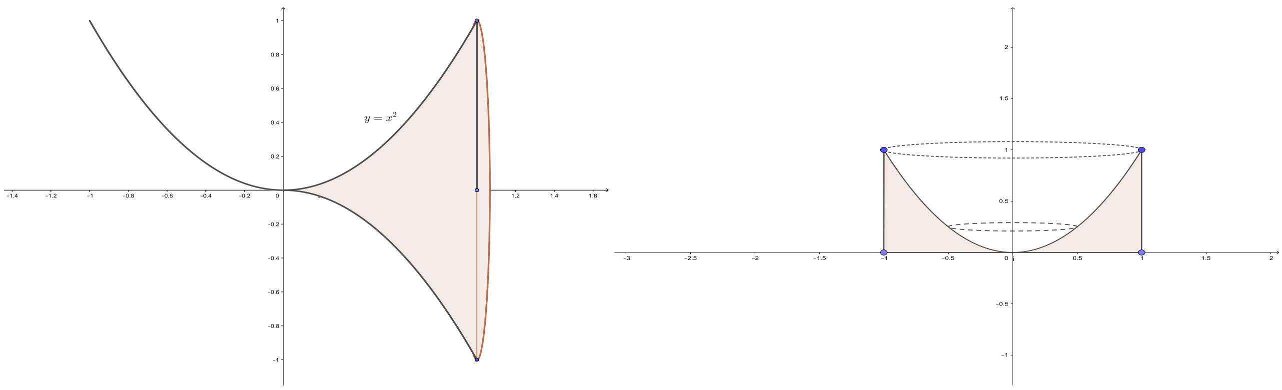
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Zadatak 6.19. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure ograničene parabolom $y=x^2$, i pravim $x=0$, $x=1$, $y=0$,

a) oko x-ose,

b) oko y-ose.

Rešenje.



(a) oko x-ose

(b) oko y-ose

Telo, predstavljeno na slici pod a), ima zapreminu jednaku,

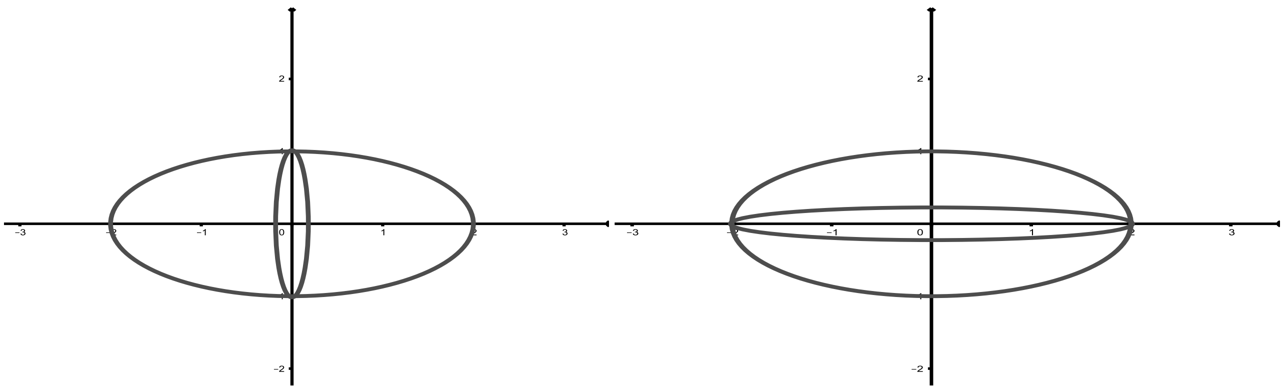
$$V = \pi\int_0^1 (f(x))^2dx = \pi\int_0^1 x^4dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}-0\right) = \frac{\pi}{5}.$$

S obzirom da je posmatrano telo određeno rotacijom figure oko y-ose neophodno je prethodno odrediti inverznu funkciju funkcije $y=x^2$. Tako za $y(x)=x^2 : [0,1] \to [0,1]$, imamo $x=\sqrt{y} : [0,1] \to [0,1]$.

Dalje, kao što se sa slike može uočiti, tražena zapremina predstavlja razliku zapremina tela koja nastaju rotacijom prave $x = 1$ i krive $x = \sqrt{y},\ y \in [0, 1]$ oko y-ose, te imamo

$$\begin{aligned} V = V_1 - V_2 &= \pi \int_0^1 1^2\, dy - \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2\, dy = \pi \left(y\Big|_0^1 - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \right) \\ &= \pi \left(1 - 0 - \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.20. Izračunati zapreminu tela koja nastaju rotacijom elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, oko x-ose, i oko y-ose.



(a) oko x-ose

(b) oko y-ose

a) Da bismo odredili zapreminu posmatranog tela, odnosno elipsoida neophodno je prethodno jednačinu elipse predstaviti kao familju odgovarajućih krivih odredenih na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 = b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)} \end{aligned}$$

gde $y = +\sqrt{b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)}$ i $y = -\sqrt{b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)}$, određuju gornju tj. pozitivnu, i donju tj. negativnu granu elipse. Posmatrani elipsoid je tada određen rotacijom bilo koje od dve pomenute grane. Takođe, s obzirom da je elipsa simetrična u odnosu na y-osu, traženu zapreminu možemo dobiti na sledeći način,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} (y(x))^2\, dx = 2\pi \int_0^a (y(x))^2\, dx \\ &= 2\pi \int_0^a b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)\, dx = 2b^2\pi \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Bigg|_0^a \\ &= 2b^2\pi \left(a - \frac{a^3}{3a^2} \right) = 2b^2\pi \cdot \frac{2a}{3} = \frac{4}{3}ab^2\pi. \end{aligned}$$

b) Za razliku od zadatka pod a), sada je potrebno najpre izraziti x preko y, na sledeći način,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = a^2\Big(1 - \frac{y^2}{b^2}\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{a^2\Big(1 - \frac{y^2}{b^2}\Big)}. \end{aligned}$$

Primetimo, $x = +\sqrt{a^2\Big(1-\dfrac{y^2}{b^2}\Big)}$ i $x = -\sqrt{a^2\Big(1-\dfrac{y^2}{b^2}\Big)}$, određuju desnu tj. pozitivnu, i levu tj. negativnu granu elipse. Posmatrani elipsoid je tada određen rotacijom bilo koje od dve pomenute grane, a pošto je elipsa simetrična u odnosu na x-osu, traženu zapreminu možemo dobiti na sledeći način,

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-b}^{b}(x(y))^2\,dy = 2\pi\int_0^b (x(y))^2\,dy \\ &= 2\pi\int_0^b a^2\Big(1-\frac{y^2}{b^2}\Big)\,dy = 2a^2\pi\left(x-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b \\ &= 2a^2\pi\left(b-\frac{b^3}{3b^2}\right) = 2a^2\pi\cdot\frac{2b}{3} = \frac{4}{3}a^2b\pi. \end{aligned}$$

Zadatak 6.21. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem oko x-ose figure između krivih $y=(x-1)^2$ i $y=x+1$.

Rešenje.

Odredimo najpre presek datih krivih

$$x^2-2x+1 = x+1 \quad\Rightarrow\quad x^2-3x=0 \quad\Rightarrow\quad x(x-3)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0\ \vee\ x=3.$$

Primetimo da su na intervalu $[0,3]$ obe krive iznad x-ose. Traženu zapreminu V ćemo odrediti kao razliku zapremine V_1 tela dobijenog obrtanjem prave $y=x+1$ oko x-ose i zapremine V_2 tela dobijenog obrtanjem parabole $y=(x-1)^2$ oko x-ose.

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi\int_0^3 (x+1)^2\,dx - \pi\int_0^3 (x-1)^4\,dx \\ &= \left[\begin{array}{c} x+1=t \ \Rightarrow\ dx=dt \\ x=0\to t=1;\ x=3\to t=4 \\ x-1=z\ \Rightarrow\ dx=dz \\ x=0\to z=-1;\ x=3\to z=2 \end{array}\right] \\ &= \pi\int_1^4 t^2\,dt - \pi\int_{-1}^2 z^4\,dz = \pi\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^4 - \pi\cdot\frac{z^5}{5}\Bigg|_{-1}^2 \\ &= \frac{\pi}{3}(4^3-1^3) - \frac{\pi}{5}(2^5-(-1)^5) = \frac{72\pi}{5}. \end{aligned}$$

6.5. Površina omotača obrtnih tela

Definišimo površinu omotača obrtnog tela, koje se dobija obrtanjem krivolinijskog trapeza, čije stranice su interval $[a,b]$, delovi pravih $x=a$ i $x=b$ i kriva $y=f(x)$, $a\le x\le b$, oko x-ose. Funkcija $f(x)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Površina M omotača obrtnog tela je

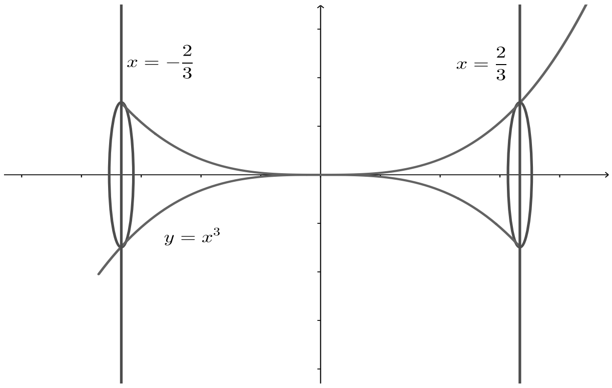
$$M = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

Zadatak 6.22. Izračunati površinu omotača tela koje nastaje rotacijom figure ograničene sledećim krivim:

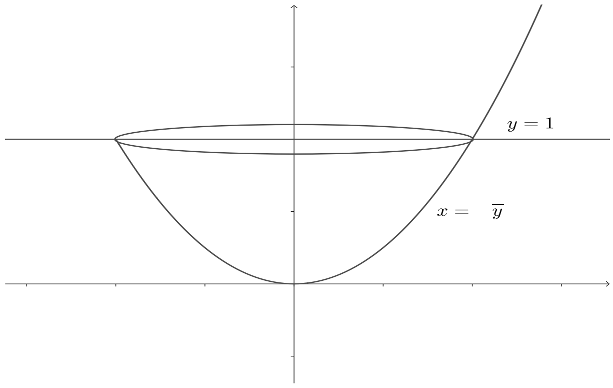
a) krivom $y=x^3$ i pravama $x=-\dfrac{2}{3}$ i $x=\dfrac{2}{3}$, oko x-ose.

b) krivom $x=\sqrt{y}$ i pravom $y=1$, oko y-ose.

Rešenje.



(a)



(b)

(a) Primetimo prvo da je telo koje se dobija rotacijom oko x-ose dela krive $y = x^3$ za $x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ osno-simetrično u odnosu na y-osu. Tada tražena površina omotača tela $M = 2 \cdot M_1$, gde M_1 predstavlja površinu omotača tela određenog rotacijom dela posmatranog luka krive $y = x^3$ koji se nalazi u prvom kvadrantu. Otuda, imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
M &= 2 \cdot M_1 = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{2}{3}} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \\
&= 4\pi \int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1 + 9x^4}\, dx = \left[\begin{array}{rcl} 1 + 9x^4 = t^2 & \Rightarrow & 36x^3\, dx = 2t\, dt \\ x = 0 & \Rightarrow & t = 1 \\ x = \frac{2}{3} & \Rightarrow & t = \frac{5}{3} \end{array}\right] \\
&= 4\pi \int_1^{\frac{5}{3}} t \cdot \frac{t\, dt}{18} = \frac{2}{9}\pi \int_1^{\frac{5}{3}} t^2\, dt = \frac{2\pi}{9} \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\frac{5}{3}} = \frac{2\pi}{27}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 1^3\right) \\
&= \frac{2\pi}{27} \cdot \frac{98}{27} = \frac{196\pi}{729}.
\end{aligned}$$

(b) Kako je $x' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
M &= 2\pi \int_0^1 x(y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}\, dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y + \frac{1}{4}}\, dy \\
&= \left[\begin{array}{rcl} y + \frac{1}{4} = t^2 & \Rightarrow & dy = 2t\, dt \\ y = 0 & \Rightarrow & t = \frac{1}{2} \\ y = 1 & \Rightarrow & t = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right] = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} t \cdot 2t\, dt \\
&= 4\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} t^2\, dt = 4\pi \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}$$

Zadatak 6.23. Izračunati površinu omotača tela koje nastaje rotacijom figure ograničene kružnicom $x^2 + y^2 = a^2$ i pravom $y = a - x$ (koja se nalazi u prvom kavdrantu) oko x-ose.

Rešenje.

Nađimo presek kružnice i prave

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = a^2 \ \wedge \ y = a - x \quad &\Rightarrow \quad x^2 + (a - x)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = a^2 \\
&\Rightarrow \quad 2x(x - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = a.
\end{aligned}$$

U prvom kvadrantu jednačina kružnice je

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = a^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Traženu površinu M određujemo kao zbir površine omotača M_1 tela koje nastaje obrtanjem krive $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (u prvom kvadrantu) oko x-ose i površine omotača M_2 tela koje nastaje obrtanjem prave $y = a - x$ (u prvom kvadrantu) oko x-ose. Kako je

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2},$$

imamo

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\pi \int_0^a y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^a a\, dx = 2a\pi \cdot x\Big|_0^a = 2a^2\pi. \end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} M_2 &= 2\pi \int_0^a y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \int_0^a (a - x)\sqrt{1 + (-1)^2}\, dx \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left(ax - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^a = 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{a^2}{2} = a^2\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Sada je

$$M = M_1 + M_2 = 2a^2\pi + a^2\pi\sqrt{2} = a^2\pi(2 + \sqrt{2}).$$

Napomena 6.24. Površina M_1 je površina polusfere poliprečnika $r = a$, pa je $M_1 = \frac{1}{2} \cdot 4r^2\pi = 2a^2\pi$, a površina M_2 je površina omotača kupe poluprečnika osnove $r = a$ i izvodnice $s = a\sqrt{2}$, pa je $M_2 = rs\pi = a^2\pi\sqrt{2}$.

6.6. Zadaci za samostalni rad

1. Koristeći integralnu sumu izračunati $\displaystyle\int_0^1 2^x dx$.

2. Primenom određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{a_n\}$, gde je

$$a_n = n\Big(\frac{1}{1^2 + 4n^2} + \frac{1}{2^2 + 4n^2} + \frac{1}{3^2 + 4n^2} + \ldots + \frac{1}{5n^2} \Big).$$

3. Naći površinu ograničenu krivim $y = x^2 - 2x - 1$ i $y = -x^2 + 3$.

4. Izračunati površinu između pravih $x = a,\ (0 < a < 1)$ i $x = 1$, koju ograničavaju kriva $y = \sqrt{x}\ln^2 x$ i x-osa.

5. Naći dužinu astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$.

6. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure F oko x-ose, ako je figura F oblast ograničena krivim $y = e^x - 1,\ y = \dfrac{x}{2}$ i pravom $x = 2$.

7. Naći površinu torusa nastalog rotacijom kružnice $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ oko x-ose $(a > b)$.