

Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 1

O kursu

Opšti podaci

- Naziv kursa: Algebra
- Smer: Energetika, elektronika i telekomunikacije, prvi semestar
- Predavač: Ivan Prokić, vanredni profesor, email: prokic@uns.ac.rs
- Asistenti:
 - Katarina Vidojević, asistent master, email: vidojevic9@uns.ac.rs
 - Maria Kiš, aistent master, email: kiss_maria@uns.ac.rs
 - Ivan Prokić
- Broj ESPB bodova: 9
 - Pojašnjenje: 9 ESPB znači 270 sati ukupnog rada studenta, uključujući predavanja i vežbe
 - Zaključak: narednih 15 sedmica potrebno je da 18 **sati sedmično posvetite Algebru**

Sadržaj kursa

Prvi deo

1. Relacije
2. Funkcije
3. Grupoidi, grupe, prsteni i polja
4. Bulove algebre
5. Kompleksni brojevi
6. Polinomi nad proizvoljnim poljima
7. Konstrukcija polja

Drugi deo

1. Algebra matrica
2. Sistemi linearnih jednačina
3. Slobodni vektori
4. Analitička geometrija
5. Vektorski prostori
6. Linearne transformacije
7. Karakteristični koreni i vektori

Način polaganja

- U toku semestra:
 - Polažu se 2 kolokvijuma (drugi u januarskom ispitnom roku). Svaki od kolokvijuma sastoji se od zadataka (pismeni deo) i testova (usmeni deo). Zadaci i testovi nose po 25 bodova, minimum za prolaz je 13 bodova po delu.
- U ispitnim rokovima:
 - Student polaže pismeni deo iz 2 dela zadataka (onaj deo/delove koji/koje nije položio na kolokvijumima i prethodnim ispitnim rokovima). Zadaci se i u ispitnim rokovima mogu polagati parcijalno
 - Student koji položi pismeni deo ispita stiče uslov da izađe na usmeni na kom:
 1. ako je položio oba testa na kolokvijumima upisuje ocenu
 2. ako je položio samo jedan test na kolokvijumima odgovara usmeno deo gradiva koji nije položio
 3. ako nije položio nijedan test na kolokvijumima odgovara usmeno celo gradivo
- Položeni deo važi do kraja školske godine, odnosno do poslednjeg oktobarskog roka
- Stari studenti koji žele da polažu preko kolokvijuma (tj. parcijalno) moraju se prijaviti na studentskoj službi
- Upis ocena je i usmeni i student mora doći lično
- Prepisivanje je strogo zabranjeno i kažnjivo

Literatura

- Ovi slajdovi i materijal sa vežbi
- M. Nedović, J. Čolić Oravec, I. Prokić, S. Buhmiller, *Inženjerski vodič kroz algebru*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- R. Doroslovački, *Algebra*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- R. Doroslovački, Lj. Nedović, *Testovi iz algebre*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- R. Doroslovački, Lj. Nedović, *Metodička zbirka zadataka iz algebre*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- M. Nedović, D. Arsić, I. Prokić, M. Kiš, I. Mišćević, *Zbirka rešenih zadataka iz algebre - prvi deo*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Osnovni pojmovi iz logike

Iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$
2. $2 + 4 = 7$
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo*
5. *Ova rečenica je netačna*

Iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ (*Tačan iskaz*)
2. $2 + 4 = 7$
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo*
5. *Ova rečenica je netačna*

Iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ (Tačan iskaz)
2. $2 + 4 = 7$ (Netačan iskaz)
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo*
5. *Ova rečenica je netačna*

Iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ (Tačan iskaz)
2. $2 + 4 = 7$ (Netačan iskaz)
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
(Iskaz za koji ne znamo tačnost - Hipoteza Gobaalha)
4. *Moje rešenje zadatka je lepo*
5. *Ova rečenica je netačna*

Iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ (Tačan iskaz)
2. $2 + 4 = 7$ (Netačan iskaz)
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
(Iskaz za koji ne znamo tačnost - Hipoteza Gobalha)
4. *Moje rešenje zadatka je lepo* (Nije iskaz)
5. *Ova rečenica je netačna*

Iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ (Tačan iskaz)
2. $2 + 4 = 7$ (Netačan iskaz)
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
(Iskaz za koji ne znamo tačnost - Hipoteza Gobalha)
4. *Moje rešenje zadatka je lepo* (Nije iskaz)
5. *Ova rečenica je netačna* (Nije iskaz - Paradoks lažova)

Logički veznici i kvantifikatori

(Iskazna logika) Ako su p i q iskazi, tada su iskazi i

- negacija: $\neg p$ (Tačno akko je p netačno)
- konjunkcija: $p \wedge q$ (Tačno akko su oba i p i q tačni)
- disjunkcija: $p \vee q$ (Netačno akko su oba i p i q netačni)
- implikacija: $p \Rightarrow q$ (Netačno samo ako je p tačno i q netačno, inače tačno)
- ekvivalencija: $p \Leftrightarrow q$ (Netačno akko su p i q jedan tačan, a drugi netačan)

(Predikatska logika)

- postoji: $(\exists x \in A)\pi(x)$ (postoji x iz skupa A takvo da je $\pi(x)$ tačno)
- sa svako: $(\forall x \in A)\pi(x)$ (za svako x iz skupa A je $\pi(x)$ tačno)

Tablice istinitosti

Ispitajmo istinitost formule $\mathcal{F} : p \wedge (\neg q \vee p)$.

p	q	$\neg q$	$\neg q \vee p$	$\mathcal{F}$
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥

Neke važne teoreme (tautologije)

Ove principe ćemo koristiti u dokazima:

- Demorganovi zakoni:
 - $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
 - $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- kontrapozicija: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$
- generalizacije Demorganovih zakona:
 - $\neg\left((\exists x \in A)\pi(x)\right) \Leftrightarrow (\forall x \in A)\neg\pi(x)$
 - $\neg\left((\forall x \in A)\pi(x)\right) \Leftrightarrow (\exists x \in A)\neg\pi(x)$

Osnovni pojmovi iz skupova

Elementi i skupovi

Ako element x pripada skupu A pišemo $x \in A$, a ako ne pripada pišemo $x \notin A$

Neki važni skupovi: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Skup može biti zadat nabrojanjem elemenata $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ili pomoću uslova, odnosno osobine $A = \{x \mid \pi(x)\}$

Kardinalnost skupa: $|A|$ je broj elemenata skupa

Jednakost skupova: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Podskup: $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Operacije

Ako su A i B skupovi tada su i

- unija: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- presek: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- skupovna razlika: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- komplement A u odnosu na U : $A^c = \overline{A} = U \setminus A$
- simetrična razlika: $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- Partitivni skup od A : $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

Primer

Ako je $A = \{a, b, c\}$, tada je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Napomena

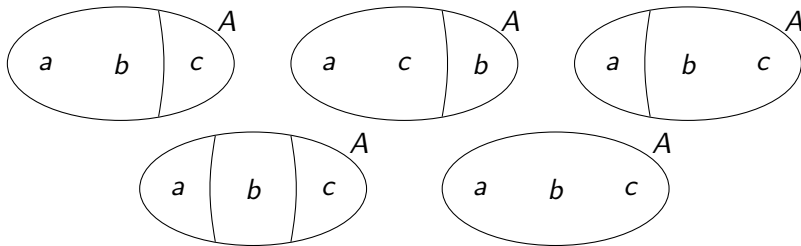
Ako je $|A| = n$ tada je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Particije

Particija je podela skupa A na neprazne podskupove, tako da ti podskupovi imaju prazne preseke, a da im je unija čitav A .

Primer

Ako je $A = \{a, b, c\}$, tada su sve particije skupa A : 1. $\{\{a, b\}, \{c\}\}$,
2. $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, 3. $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, 4. $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, 5. $\{\{a, b, c\}\}$



Osnovni pojmovi iz matrica

Matrice

Primer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Format matrice određuju broj vrsta i broj kolona. Npr. matrica A je formata 2×2 , a matrica B formata 2×3*
- *Elementni matrice su iz nekog skupa, najčešće iz skupa realnih brojeva, kao matrice A i B*
- *Kvadratne matrice su one koje imaju isti broj vrsta i kolona. Red kvadratne matrice je broj vrsta. Npr. matrica A jeste kvadratna reda 2, a B nije kvadratna*

Specijalne matrice

- **Nula matrica** (formata 2×3) i **jedinična matrica** (reda 3)

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Za datu matricu A njoj **transponovana matrica**, u oznaci A^T , je matrica čije kolone su jednake odgovarajućim vrstama matrice A . Npr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Simetrična matrica** je ona kod koje su elementi simetrično raspoređeni u odnosu na glavnu dijagonalu. Npr. simetrična je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Sabiranje matrica i množenje matrice brojem

- Sabiramo samo matrice istog formata, i to tako što saberemo samo elemente sa istih pozicija. Npr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 0+1 \\ 4+0 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Matricu množimo brojem (skalarom) tako što sve elemente pomnožimo tim brojem. Npr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 20 & 15 & -5 \end{bmatrix}$$

Množenje matrica

- Da bi proizvod $A \cdot B$ bio definisan, mora da broj kolona prve matrice bude jednak broju vrsta druge matrice
- Matrica koja predstavlja rezultat množenja imaće isti broj vrsta kao prva matrica i isti broj kolona kao druga matrica
- Element matrice AB u preseku i -te vrste i j -te kolone izračunavamo kao skalarni proizvod vektora i -te vrste matrice A i vektora j -te kolone matrice B

Primer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Množenje matrica

- Da bi proizvod $A \cdot B$ bio definisan, mora da broj kolona prve matrice bude jednak broju vrsta druge matrice
- Matrica koja predstavlja rezultat množenja imaće isti broj vrsta kao prva matrica i isti broj kolona kao druga matrica
- Element matrice AB u preseku i -te vrste i j -te kolone izračunavamo kao skalarni proizvod vektora i -te vrste matrice A i vektora j -te kolone matrice B

Primer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

Množenje matrica

- Da bi proizvod $A \cdot B$ bio definisan, mora da broj kolona prve matrice bude jednak broju vrsta druge matrice
- Matrica koja predstavlja rezultat množenja imaće isti broj vrsta kao prva matrica i isti broj kolona kao druga matrica
- Element matrice AB u preseku i -te vrste i j -te kolone izračunavamo kao skalarni proizvod vektora i -te vrste matrice A i vektora j -te kolone matrice B

Primer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{nije definisano}$$

Inverzna matrica

Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

za koju vredi da je $ad - bc \neq 0$, **inverzna matrica** je

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Veličina $ad - bc$ predstavlja **determinantu** kvadratne matrice A

Primer

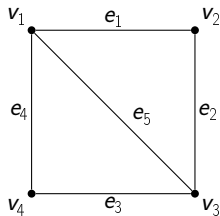
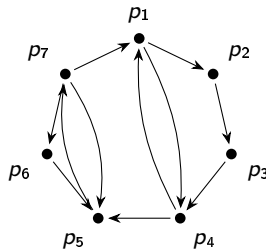
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Množenjem matrica možemo proveriti da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Osnovni pojmovi iz grafova

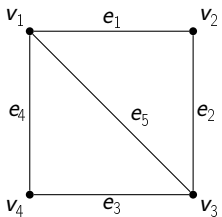
Grafovi

Graf $G = (V, E)$ čine neprazan skup čvorova V i skup grana E . Svakoj grani pridružen je skup od jednog ili dva čvora, koje nazivamo krajevima grane. Grane mogu biti neusmerene ili usmerene:

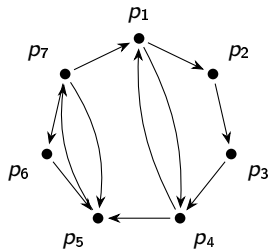


Grafu možemo pridružiti matricu susedstva $A(G)$ na sledeći način. Matrica je kvadratna, red matrice odgovara broju čvorova, pri čemu je element matrice na poziciji (i, j) jednak sa 1 ukoliko postoji usmerena grana od čvora i do čvora j , a inače je jednak sa 0 (primeri na sledećem slajdu)

Matrice susedstva



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Šta smo danas radili

- Ponovili osnovne pojmove iz logike, skupova, matrica (i grafova)