

Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 2

Na prethodnom času

- Ponovili osnovne pojmove iz logike, skupova, matrica (i grafova)

Relacije

Uređeni par

Definicija (Uređeni par)

Uređeni par (a, b) je skup elemenata a i b kod koga je redosled elemenata bitan.

Za skupove važi $\{a, b\} = \{b, a\}$, a za uređenje parove $(a, b) \neq (b, a)$, ako je $a \neq b$.

Uređena trojka: $(a, b, c) = ((a, b), c)$

Uređena n -torka (definisana rekurzivno): $(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$

Dekartov proizvod

Definicija (Dekartov proizvod)

Dekartov proizvod skupova A i B je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Napomena

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Primer

Ako je $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{x, y\}$, tada je

1. $A \times B =$
2. $B \times A =$
3. $A^2 = A \times A =$
4. $B^3 =$

Dekartov proizvod

Definicija (Dekartov proizvod)

Dekartov proizvod skupova A i B je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Napomena

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Primer

Ako je $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{x, y\}$, tada je

1. $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$
2. $B \times A = \{(x, a), (y, a), (x, b), (y, b), (x, c), (y, c)\}$
3. $A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$
4. $B^3 = \{(x, x, x), (x, x, y), (x, y, x), (x, y, y), (y, x, x), (y, x, y), (y, y, x), (y, y, y)\}$

Binarna relacija

Definicija (Binarna relacija)

Bilo koji skup uređenih parova naziva se binarna relacija. Ako je ρ binarna relacija, tada se sa $\mathcal{D}(\rho)$ označava skup prvih komponenti, a sa $\mathcal{A}(\rho)$ skup drugih komponenti.

Definicija (Binarna relacija skupa)

Kažemo da je ρ binarna relacija nepraznog skupa A ako je $\rho \subseteq A^2$.

Primer

Neke binarne relacije skupa $A = \{a, b, c\}$ su

1. $\rho_1 = \emptyset$ (Prazna relacija)
2. $\rho_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ (Dijagonala)
3. $\rho_3 = A^2$ (Puna relacija)

Relacije preko matrica i grafova

Za $\rho_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ odgovarajuća matrica je:

$$M_{\rho_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Digraf (usmereni graf) relacije ρ_2 je



Inverzna relacija

Napomena (U relaciji)

Kada (a, b) pripada relaciji ρ pišemo $(a, b) \in \rho$ ili $a \rho b$, i kažemo da je a u relaciji sa b .
Kada (a, b) ne pripada relaciji ρ pišemo $(a, b) \notin \rho$, $a \not\rho b$, ili $\neg(a \rho b)$ i kažemo da a nije u relaciji sa b .

Definicija (Inverzna relacija)

Za binarnu relaciju ρ njoj inverzna relacija ρ^{-1} je data sa $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$.

Primer

1. Za $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$ inverzna je $\rho_1^{-1} = \{(c, a), (a, b), (b, b)\}$
2. Prazna relacija, dijagonala i puna relacija nekog skupa su same sebi inverzne

Osobine binarnih relacija

Definicija (Osobine binarnih relacija)

Relacija ρ skupa A je:

- | | | |
|---------------------------|------|--|
| (R) <i>refleksivana</i> | akko | $(\forall x \in A) \ x \rho x$ |
| (S) <i>simetrična</i> | akko | $(\forall x, y \in A) \ x \rho y \Rightarrow y \rho x$ |
| (A) <i>antisimetrična</i> | akko | $(\forall x, y \in A) \ (x \rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \neg(y \rho x)$ |
| (T) <i>tranzitivna</i> | akko | $(\forall x, y, z \in A) \ (x \rho y \wedge y \rho z) \Rightarrow x \rho z$ |
| (F) <i>funkcija</i> | akko | $(\forall x, y, z \in A) \ (x \rho y \wedge x \rho z) \Rightarrow y = z$ |

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

R S A T F

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove i/ili napišemo matrice relacija

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

R S **A** T F
R S A T F

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove i/ili napišemo matrice relacija

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

R	S	A	T	F
R	S	A	T	F
R	S	A	T	F

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove i/ili napišemo matrice relacija

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

R	S	A	T	F	
	R	S	A	T	F
R	S	A	T	F	
	R	S	A	T	F

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove i/ili napišemo matrice relacija

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

	R	S	A	T	F			
		R	S	A	T	F		
			R	S	A	T	F	
R	S	A	T	F				
				R	S	A	T	F

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove i/ili napišemo matrice relacija

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

	R	S	A	T	F	
		R	S	A	T	F
	R	S	A	T	F	
R	S	A	T	F		
R	S	A	T	F		
		R	S	A	T	F

Osobine se lakše vide ako nactramo grafove i/ili napišemo matrice relacija

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

	R	S	A	T	F	
		R	S	A	T	F
		R	S	A	T	F
R	S	A	T	F		
R	S	A	T	F		
	R	S	A	T	F	

Osobine se lakše vide ako nactramo grafove i/ili napišemo matrice relacija

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x, y) \mid x = y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\rho_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\rho_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{Z}\}$
4. $\rho_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

R S A T F

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove relacija

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x, y) \mid x = y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\rho_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\rho_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{Z}\}$
4. $\rho_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

Ⓡ Ⓢ ⓐ Ⓣ ⓕ
R S A T F

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove relacija

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x, y) \mid x = y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\rho_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\rho_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{Z}\}$
4. $\rho_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ	
Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ	
	Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ

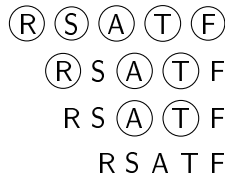
Osobine se lakše vide ako nacramo grafove relacija

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x, y) \mid x = y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\rho_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\rho_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{Z}\}$
4. $\rho_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$



Osobine se lakše vide ako nacramo grafove relacija

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x, y) \mid x = y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\rho_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\rho_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{Z}\}$
4. $\rho_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ
Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ
	Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ
	Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ
		Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove relacija

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x, y) \mid x = y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\rho_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\rho_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \wedge x, y \in \mathbb{Z}\}$
4. $\rho_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ
Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ
Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ
Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ
Ⓡ	Ⓢ	Ⓐ	Ⓣ	Ⓕ

Osobine se lakše vide ako nacramo grafove relacija

Relacije ekvivalencije

Relacija ekvivalencije

Definicija (Relacija ekvivalencije)

Ako je binarna relacija nekog skupa refleksivna, simetrična i tranzitivna (tj. $R \ S \ T$), tada se ona zove relacija ekvivalencije.

Primer

Neke relacije ekvivalencije skupa $A = \{a, b, c\}$ su

1. $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ (Dijagonala, jednako)
2. $\rho_2 = A^2$ (Puna relacija)
3. $\rho_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$

Klase ekvivalencije i faktor skup

Definicija (Klase ekvivalencije i faktor skup)

Za relaciju ekvivalencije ρ skupa A i element $x \in A$ skup $C_x = \{y \mid x \rho y \wedge y \in A\}$ se naziva klasa ekvivalencije elementa x (u odnosu na ρ). Skup svih klasa ekvivalencije se naziva količnički skup i piše se $A/\rho = \{C_x \mid x \in A\}$.

Primer

Za relacije ekvivalencije sa prethodnog slajda navodimo klase ekvivalencije i faktor skupove

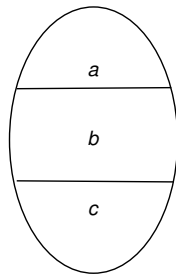
$$\rho_1 : C_a = \{a\}, C_b = \{b\}, C_c = \{c\}, A/\rho_1 = \{C_a, C_b, C_c\}$$

$$\rho_2 : C_a = C_b = C_c = \{a, b, c\}, A/\rho_2 = \{C_a\}$$

$$\rho_3 : C_a = C_b = \{a, b\}, C_c = \{c\}, A/\rho_3 = \{C_a, C_c\}$$

Napomena

Deluje da su elementi u relaciji akko određuju istu klasu ekvivalencije



Faktor skup A/ρ_1

Relacija ekvivalencije određuje particiju

Lema

Ako je ρ relacija ekvivalencije na skupu A , tada za sve $x, y \in A$ važi $C_x = C_y$ ili $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Teorema

Svaka relacija ekvivalencije određuje jednu particiju skupa.

Particija $\Leftrightarrow$ relacija ekvivalencije: primer

Primer

Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

1. Za $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d, f), (f, d)\}$ proveriti da je ρ relaciju ekvivalencije, pronaći klase ekvivalencije i faktor skup A/ρ .
2. Za particiju $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$ skupa A napisati relaciju ekvivalencije koja joj odgovara (čiji je faktor skup baš ova particija).

Particija $\Leftrightarrow$ relacija ekvivalencije: primer

Primer

Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

1. Za $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d, f), (f, d)\}$ proveriti da je ρ relaciju ekvivalencije, pronaći klase ekvivalencije i faktor skup A/ρ .
2. Za particiju $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$ skupa A napisati relaciju ekvivalencije koja joj odgovara (čiji je faktor skup baš ova particija).

Rešenje.

1. Klase ekvivalencije su $C_1 = \{a, b, c\}$, $C_2 = \{d, f\}$, $C_3 = \{e\}$, a faktor skup $A/\rho = \{\{a, b, c\}, \{d, f\}, \{e\}\}$
2. Relacija ekvivalencije je $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d), (e, e), (c, d), (d, c), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d), (f, f)\}$

Ostatak pri deljenju u $\mathbb{Z}$

Napomena

Setimo se iz 6. razreda relacije $|$ na skupu $\mathbb{Z}$, npr. $2|4$ i $2 \nmid 5$ (malo kasnije ćemo o njenim osobinama)

Ostatak pri deljenju u $\mathbb{Z}$

Napomena

Setimo se iz 6. razreda relacije $|$ na skupu $\mathbb{Z}$, npr. $2 \mid 4$ i $2 \nmid 5$ (malo kasnije ćemo o njenim osobinama)

Definicija

Na skupu $\mathbb{Z}$ uvodimo relaciju $\equiv_3$ **kongruentno po modulu 3** sa: $x \equiv_3 y$ akko $3 \mid x - y$ (tj. x i y **daju isti ostatak pri deljenju sa 3**). Piše se i $x \equiv y \pmod{3}$.

Lema

Na skupu $\mathbb{Z}$ relacija $\equiv_3$ je relacija ekvivalencije.

Ostatak pri deljenju u $\mathbb{Z}$

Napomena

Setimo se iz 6. razreda relacije $|$ na skupu $\mathbb{Z}$, npr. $2 | 4$ i $2 \nmid 5$ (malo kasnije ćemo o njenim osobinama)

Definicija

Na skupu $\mathbb{Z}$ uvodimo relaciju $\equiv_3$ **kongruentno po modulu 3** sa: $x \equiv_3 y$ akko $3 | x - y$ (tj. x i y **daju isti ostatak pri deljenju sa 3**). Piše se i $x \equiv y \pmod{3}$.

Lema

Na skupu $\mathbb{Z}$ relacija $\equiv_3$ je relacija ekvivalencije.

Dokaz

(R) $(\forall x \in \mathbb{Z}) x \equiv_3 x$ jer $3 | x - x$

(S) $(\forall x, y \in \mathbb{Z})$ ako je $x \equiv_3 y$ (tj. $3 | x - y$) tada je i $y \equiv_3 x$ (jer $3 | y - x$)

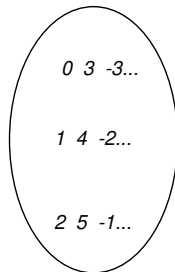
(T) $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})$ ako $x \equiv_3 y$ i $y \equiv_3 z$ tada je $x \equiv_3 z$ (jer x i y i z daju isti ostatak pri deljenju sa 3)

Skup $\mathbb{Z}_3$

Relacija $\equiv_3$ na $\mathbb{Z}$ vrši particiju: kako izgleda faktor skup?

Klase ekvivalencije

Faktor skup $\mathbb{Z}/\equiv_3$ ćemo označavati sa $\mathbb{Z}_3$



Skup $\mathbb{Z}$

Skup $\mathbb{Z}_3$

Relacija $\equiv_3$ na $\mathbb{Z}$ vrši particiju: kako izgleda faktor skup?

Klase ekvivalencije

1. $C_0 = \{0, 3, -3, \dots\}$ - deljivi sa 3
2. $C_1 = \{1, 4, -2, \dots\}$ - ostatak 1
3. $C_2 = \{2, 5, -1, \dots\}$ - ostatak 2

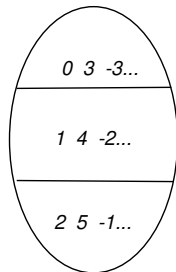
Faktor skup $\mathbb{Z}/\equiv_3$ ćemo označavati sa $\mathbb{Z}_3$

$$\mathbb{Z}_3 = \{C_0, C_1, C_2\}$$

Pošto su klase ekvivalencije određene bilo kojim svojim elementom pišaćemo i

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

Isto smo mogli uraditi da dobijemo $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \dots, \mathbb{Z}_n$



Faktor skup $\mathbb{Z}_3$

Relacije poretka

Relacija poretka

Definicija (Relacija poretka)

Ako je binarna relacija nekog skupa A refleksivna, antisimetrična i tranzitivna (tj. $R \subseteq A \times A$), tada se ona zove relacija poretka i kažemo da je (A, ρ) **(parcijalno) uređen skup**.

Primer

Neke relacije poretka

1. Na skupu $A = \{a, b, c\}$: $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ (Dijagonala, jednako)
2. Na skupu $A = \{a, b, c\}$: $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$ (Lanac)
3. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, za $A \neq \emptyset$ (Partitivni skup i relacija podskup)
4. $(\mathbb{N}, |)$ (Prirodni brojevi i relacija deli)
5. $(\mathbb{R}, \leq)$ (Realni brojevi i relacija manje-jednako)

Parcijalno uređeni skupovi $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ i $(\mathbb{N}, |)$

Primer

Neka je $A \neq \emptyset$. Tada je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je parcijalno uređen skup

(R) $(\forall X \in \mathcal{P}(A)) \quad X \subseteq X$

(A) $(\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)) \quad (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X) \Rightarrow X = Y$

(T) $(\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)) \quad (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z) \Rightarrow X \subseteq Z$

Parcijalno uređeni skupovi $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ i $(\mathbb{N}, |)$

Primer

Neka je $A \neq \emptyset$. Tada je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je parcijalno uređen skup

$$(R) (\forall X \in \mathcal{P}(A)) \quad X \subseteq X$$

$$(A) (\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)) \quad (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X) \Rightarrow X = Y$$

$$(T) (\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)) \quad (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z) \Rightarrow X \subseteq Z$$

Primer

$(\mathbb{N}, |)$ je parcijalno uređen skup

$$(R) (\forall x \in \mathbb{N}) \quad x | x$$

$$(A) (\forall x, y \in \mathbb{N}) \quad (x | y \wedge y | x) \Rightarrow x = y$$

$$(T) (\forall x, y, z \in \mathbb{N}) \quad (x | y \wedge y | z) \Rightarrow x | z$$

Napomena

Da li je $(\mathbb{Z}, |)$ parcijalno uređen skup?

Haseov dijagram

Parcijalno uređeni skup (A, ρ) možemo grafički da predstavimo kao graf (tzv. Haseov dijagram)

- Elemente skupa A crtamo kao tačke (čvorove) i povezujemo ih linijama (granama)
- Ako imamo $x \rho y$ onda x crtamo **ispod**, a y **iznad**
- Ako je $x \rho y$ i ne postoji $z \in A$ takvo da je z **između** x i y , tj. takvo da važi $x \rho z$ i $z \rho y$, onda x i y direktno spajamo granom

Haseov dijagram

Parcijalno uređeni skup (A, ρ) možemo grafički da predstavimo kao graf (tzv. Haseov dijagram)

- Elemente skupa A crtamo kao tačke (čvorove) i povezujemo ih linijama (granama)
- Ako imamo $x \rho y$ onda x crtamo **ispod**, a y **iznad**
- Ako je $x \rho y$ i ne postoji $z \in A$ takvo da je z **između** x i y , tj. takvo da važi $x \rho z$ i $z \rho y$, onda x i y direktno spajamo granom

Primer

Nacrtati Haseov dijagram za parcijalno uređen skup (A, ρ) ,
gde je $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d),$
 $(e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, d), (c, e)\}$

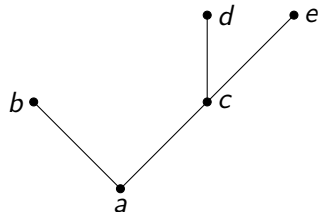
Haseov dijagram

Parcijalno uređeni skup (A, ρ) možemo grafički da predstavimo kao graf (tzv. Haseov dijagram)

- Elemente skupa A crtamo kao tačke (čvorove) i povezujemo ih linijama (granama)
- Ako imamo $x \rho y$ onda x crtamo **ispod**, a y **iznad**
- Ako je $x \rho y$ i ne postoji $z \in A$ takvo da je z **između** x i y , tj. takvo da važi $x \rho z$ i $z \rho y$, onda x i y direktno spajamo granom

Primer

Nacrtati Haseov dijagram za parcijalno uređen skup (A, ρ) ,
gde je $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, d), (c, e)\}$



Najmanji, najveći, min i max elementi

Definicija

U parcijalno uređenom skupu (A, ρ) definišemo specijalne elemente

- *a je najmanji element akko $(\forall x \in A) \quad a \rho x$ (Ispod svih drugih)*
- *a je najveći element akko $(\forall x \in A) \quad x \rho a$ (Iznad svih drugih)*
- *a je minimalni element akko $(\forall x \in A \setminus \{a\}) \quad x \not\rho a$ (Nema drugih ispod)*
- *a je maksimalni element akko $(\forall x \in A \setminus \{a\}) \quad a \not\rho x$ (Nema drugih iznad)*

Najmanji, najveći, min i max elementi

Definicija

U parcijalno uređenom skupu (A, ρ) definišemo specijalne elemente

- a je najmanji element akko $(\forall x \in A) \quad a \rho x$ (Ispod svih drugih)
- a je najveći element akko $(\forall x \in A) \quad x \rho a$ (Iznad svih drugih)
- a je minimalni element akko $(\forall x \in A \setminus \{a\}) \quad x \not\rho a$ (Nema drugih ispod)
- a je maksimalni element akko $(\forall x \in A \setminus \{a\}) \quad a \not\rho x$ (Nema drugih iznad)

Primer

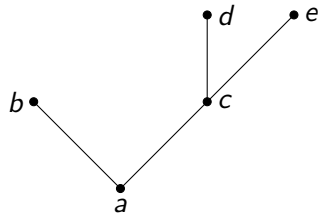
Za parcijalno uređen skup (A, ρ) , gde je $A = \{a, b, c, d, e\}$ i
 $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d),$
 $(a, e), (c, d), (c, e)\}$ odrediti

najmanji: ,

minimalne: ,

najveći: ,

maksimalne:



Najmanji, najveći, min i max elementi

Definicija

U parcijalno uređenom skupu (A, ρ) definišemo specijalne elemente

- a je najmanji element akko $(\forall x \in A) \quad a \rho x$ (Ispod svih drugih)
- a je najveći element akko $(\forall x \in A) \quad x \rho a$ (Iznad svih drugih)
- a je minimalni element akko $(\forall x \in A \setminus \{a\}) \quad x \not\rho a$ (Nema drugih ispod)
- a je maksimalni element akko $(\forall x \in A \setminus \{a\}) \quad a \not\rho x$ (Nema drugih iznad)

Primer

Za parcijalno uređen skup (A, ρ) , gde je $A = \{a, b, c, d, e\}$ i

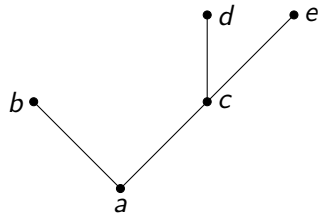
$\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, d), (c, e)\}$ odrediti

najmanji: a ,

minimalne: a ,

najveći: nema,

maksimalne: b, d, e



Najmanji (najveći) je jedinstven

Teorema

Ako postoji, najmanji (najveći) element parcijalno uređenog skupa je jedinstven.

Dokaz

*Dokaz izvodimo **svođenjem na kontradikciju** (reductio ad absurdum: ako pretpostavimo da je neka izjava istinita, doći ćemo do logičke kontradikcije).*

Suprotno tvrđenju teoreme, pretpostavimo da postoji parcijalno uređen skup (A, ρ) koji ima bar dva različita najmanja elementa a i b . Po definiciji najmanjeg elementa to znači da važi $a \rho b$ i $b \rho a$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da je (A, ρ) parcijalno uređen skup (ρ mora biti antisimetrično), pa je zaključak da parcijalno uređen skup ne može imati više različitih najmanjih elemenata.

Totalno i dobro uređeni skupovi

Definicija (Totalno uređen skup ili lanac)

Ako u parcijalno uređenom skupu za svaka dva elementa a i b važi $a \rho b$ ili $b \rho a$, tada se on naziva totalno uređen skup ili lanac.

Definicija (Dobro uređen skup)

Ako u parcijalno uređenom skupu svaki neprazan podskup ima najmanji element, tada se on naziva dobro uređen skup.

Totalno i dobro uređeni skupovi

Definicija (Totalno uređen skup ili lanac)

Ako u parcijalno uređenom skupu za svaka dva elementa a i b važi $a \rho b$ ili $b \rho a$, tada se on naziva totalno uređen skup ili lanac.

Definicija (Dobro uređen skup)

Ako u parcijalno uređenom skupu svaki neprazan podskup ima najmanji element, tada se on naziva dobro uređen skup.

Primer

$(\mathbb{R}, \leq)$ i $(\mathbb{Z}, \leq)$ su lanaci, a $(\mathbb{N}, \leq)$ je dobro uređen skup i lanac

Totalno i dobro uređeni skupovi

Definicija (Totalno uređen skup ili lanac)

Ako u parcijalno uređenom skupu za svaka dva elementa a i b važi $a \rho b$ ili $b \rho a$, tada se on naziva totalno uređen skup ili lanac.

Definicija (Dobro uređen skup)

Ako u parcijalno uređenom skupu svaki neprazan podskup ima najmanji element, tada se on naziva dobro uređen skup.

Primer

$(\mathbb{R}, \leq)$ i $(\mathbb{Z}, \leq)$ su lanaci, a $(\mathbb{N}, \leq)$ je dobro uređen skup i lanac

Teorema

Svaki dobro uređeni skup je i lanac.

Dokaz

Neka je (A, ρ) dobro uređen skup. Ako uzmemo $a, b \in A$ i skup $\{a, b\}$ sledi da taj skup ima najmanji element.

Tada je taj najmanji element u relaciji sa onim drugim elementom skupa $\{a, b\}$, tj. imamo $a \rho b$ ili $b \rho a$.

Primeri

Nacrtati Haseove dijagrame i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente sledećih parcijalno uređenih skupova:

1. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, gde je $A = \{a, b, c\}$
2. $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$, gde je $A = \{a, b, c\}$
3. $(\mathbb{N}, |)$
4. $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$
5. $(D_{30}, |)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
6. $(D_{30} \setminus \{30\}, |)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Šta smo danas radili

- Uređeni parovi i Dekartov proizvod
- Binarne relacije
- Osobine binarnih relacija (R S A T F)
- Relacije ekvivalencije
 - Klase ekvivalencije i faktor skup (particije)
 - Skup $\mathbb{Z}_n$
- Relacije poretka (parcijalno uređeni skupovi)
 - Haseov dijagram
 - Najmanji, najveći, min i max elementi
 - Supremum i infimum
 - Lanci i dobro uređeni skupovi