**Prezime, ime, br. indeksa:** ________________________________________ **18.2.2024.**

**KOLOKVIJUM 2**

U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

---

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje matrice $A, B, C$ reda 3 i svaki skalar $\lambda$:

  $\boxed{\textbf{1)}}$ $\det(A^2) = (\det(A))^2$ **2)** $\operatorname{rang}(\lambda A) = \lambda \operatorname{rang}(A)$ **3)** $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $(B+C)A = BA + CA$

  **5)** $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $\operatorname{rang}(A) = 3 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $A(BC) = (AB)C$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

  3 2 2 1 1 2 3 0 2

- Odrediti sve vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ za koje je sistem linearnih jednačina $\begin{aligned} ax + y &= 0 \\ x + ay &= 0 \end{aligned}$

  **1)** kontradiktoran: / **2)** određen: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ **3)** neodređen: $a \in \{-1, 1\}$

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = /$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [4]$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

- Neka su date linearne transformacije $f(x,y,z) = (x-y, y-z)$ i $g(x,y) = (x+y, x-y)$. Napisati linearne transformacije

  $h(x,y,z) = (g \circ f)(x,y,z) = (x-z, x-2y+z)$ i $g^{-1}(x,y) = \frac{1}{2}(x+y, x-y)$.

  Napisati matrice i rangove linearnih transformacija $f$, $g$, $h = g \circ f$ i $g^{-1}$:

  $M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $M_{g^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

  $\operatorname{rang}(M_f) = 2$ $\operatorname{rang}(M_g) = 2$ $\operatorname{rang}(M_h) = 2$ $\operatorname{rang}(M_{g^{-1}}) = 2$

- Neka je $f : V_1 \to V_2$ linearna transformacija vektorskih prostora $V_1$ i $V_2$ nad poljem $F$. Tada je:

  $\boxed{\textbf{1)}}$ $f(0) = 0$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $(\forall x, y \in V_1)\ f(x-y) = f(x) - f(y)$ **3)** $(\forall x \in V_1)\ (\forall \alpha \in F)\ f(\alpha x) = f(\alpha) f(x)$

  **4)** $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ **5)** postoji $f^{-1}$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $(\forall x \in V_1)\ (\forall \alpha \in F)\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$

- Neka je u vektorskom prostoru $V$ $(x_1, \ldots, x_n)$ linearno nezavisna i $(y_1, \ldots, y_m)$ generatorna. Ako je $\dim V = 3$, tada je:

  **1)** $m \leq n \leq 3$ **2)** $m \leq 3 \leq n$ **3)** $3 \leq m \leq n$ **4)** $n \leq m \leq 3$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $n \leq 3 \leq m$ **6)** $3 \leq n \leq m$

- Neka su $a, b$ i $c$ proizvoljni **zavisni** vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b+c, b+c, c)$ je:

  $\boxed{\textbf{1)}}$ uvek zavisna **2)** uvek nezavisna **3)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora $a, b, c$.

- Ako je $(a, b, c)$ **baza** vektorskog prostora $V$, tada uređena trojka vektora $(a, a+b, a+b+c)$ je:
  **1)** uvek zavisna $\boxed{\textbf{2)}}$ uvek nezavisna **3)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora $a, b, c$.

- Za vektore $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ i $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ izračunati:
  **1)** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ **2)** $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ **3)** $\vec{a} - 2\vec{b} = (1, 1, -2)$ **4)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ **5)** $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, 1)$ **6)** $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

- Neka tačke $P(1, -1, 1), Q(1, 1, -1)$ i $R(-1, 1, 1)$ pripadaju ravni $\alpha$. Tada je:
  $\overrightarrow{PQ} = (0, 2, -2)$ i $\overrightarrow{PR} = (-2, 2, 0)$.
  Napisati bar jedan nenula vektor $\vec{n}$ normalan na $\alpha$, $\vec{n} = (1, 1, 1)$.
  Napisati jednačinu ravni $\alpha:$ $x + y + z = 1$ .
  Napisati bar jednu tačku $M \in \alpha$ i $M \notin \{P, Q, R\}$, $M(1, 0, 0)$.

- Neka je $O(0, 0, 0)$, $M(3, -2, 3)$, $a: \ x - 1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}$ i $\alpha: \ -x + 2y + z = 10$. Tada:
  $\boxed{\textbf{1)}}$ $M \in a$ **2)** $M \in \alpha$ **3)** $O \in a$ **4)** $O \in \alpha$ **5)** $a \subset \alpha$ **6)** $a \parallel \alpha$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $a \cap \alpha \neq \emptyset$

- Zaokružiti vektorske potprostore vektorskog prostora $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ :
  **1)** $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ **2)** $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{C}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $(\{0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

- Zaokružiti osobine koje su zadovoljene u vektorskom prostoru $(V, F, +, \cdot)$ za svako $a, b, c \in V$, $\alpha, \beta \in F$ :
  $\boxed{\textbf{1)}}$ $a + b = b + a$ **2)** $\alpha + (a \cdot b) = (\alpha + a) \cdot (\alpha + b)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $1 \cdot a = a$ **4)** $(\alpha \cdot \beta) + a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$
  $\boxed{\textbf{5)}}$ $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $0 \cdot a = 0$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\boxed{\textbf{8)}}$ $(-\alpha) \cdot a = \alpha \cdot (-a)$

- Neka je tačka $S$ projekcija tačke $A$ na ravan $\alpha: \ (\vec{r} - \vec{r}_Q) \cdot \vec{n} = 0$ i $A_1$ tačka simetrična tački $A$ u odnosu na ravan $\alpha$. Tada je:
  **1)** $\vec{r}_S = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{n}}\vec{n}$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}$ **3)** $\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\cdot\vec{a}}{\vec{n}\cdot\vec{a}}\vec{n}$ **4)** $\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}$
  $\boxed{\textbf{5)}}$ $\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + 2\frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}$ **6)** $\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + 2\frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $\vec{r}_{A_1} = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$

- Napisati $\vec{x} = (0, 1, 3)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$ i $\vec{c} = (2, 0, -1)$:
  $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

- Ako su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ **komplanarni** tada važi:
  **1)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ **3)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$
  $\boxed{\textbf{4)}}$ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ **5)** $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ **6)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$
  **7)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \ \Rightarrow \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ $\boxed{\textbf{8)}}$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.