$\boxed{\text{A}}$ **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________ **2.2.2024.**

Studijski program EE RA PR SV (zaokruži) KOLOKVIJUM 2

U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Tačke $P(1,2,3), Q(2,3,1)$ i $R(3,1,2)$ pripadaju ravni α. **1)** $\overrightarrow{PQ} = (1,1,-2)$ **2)** $\overrightarrow{PR} = (2,-1,-1)$ **3)** $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 3$ **4)** $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6}$ **5)** $|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{6}$ **6)** $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (3,3,3)$ **7)** $\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}) = 18$ **8)** $\sphericalangle QPR = \frac{\pi}{3}$
  9) Jednačina ravni α : x+y+z=6 **10)** Jednačina prave kroz tačke P i Q je $\ell_{P,Q}$: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$

- U paralelogramu $ABCD$ tačka P je sredina stranice CD i dijagonala AC i duž PB seku se u tački T. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Tada:
  $\boxed{\textbf{1)}}$ Tačka T je težište trougla BCD. **2)** $\overrightarrow{TB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $\overrightarrow{TB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$
  4) $3\overrightarrow{TB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ **5)** $3\overrightarrow{TB} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $3\overrightarrow{TB} = \vec{a} - 2\vec{b}$

- Izraziti vektor $\vec{x} = (3,4,-4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,0,-1)$, $\vec{b} = (0,1,-1)$ i $\vec{c} = (1,1,0)$: $\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a = 1 \vee a = -1$ **2)** određen: $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ **3)** kontradiktoran: /

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax - ay = a \wedge ax + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:
  1) dvostruko neodređen: $a = 0$ **2)** jednostruko neodređen: / **3)** određen: $a \neq 0$ **4)** kontradiktoran: /
  5) Skup svih rešenja datog sistema jednačina je $\{(1,0)\}$ ili $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$. $\boxed{\text{DA}}$ NE

- Koje od sledećih uređenih n-torki jesu **generatorne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\textbf{1)}}$ $\big((0,0,-5),(0,3,0),(7,0,0)\big)$
  2) $\big((3,0,0),(0,-3,0)\big)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $\big((0,0,5),(0,5,0),(5,0,0),(3,5,2)\big)$ **4)** $\big((-1,-1,-1),(4,4,4),(3,3,3)\big)$

- $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [7]$ $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = /$

- Matrice linearnih transformacija $f(x) = (2x, x, x)$, $g(x,y,z) = x$, $h(x,y) = (y,y)$ i $s(x,y,z) = (z+x, z-y)$. su:
  $M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $M_g = [1\ 0\ 0]$ $M_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
  2 2 2 2 1 3 1 0 1

- Koje od sledećih uređenih n-torki **su nezavisne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\textbf{1)}}$ $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$
  $\boxed{\textbf{2)}}$ $\big((1,3,-2),(-2,-6,3)\big)$ **3)** $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $\big((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\big)$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje nenula **komutativne** kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ:
  1) $det(A+B) = det(A) + det(B)$ **2)** $det(\lambda A) = \lambda^2 det(A)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $det(AB) = det(B)det(A)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $(AB)^2 = A^2B^2$
  5) $rang(A+B) < rang(A) + rang(B)$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $A + B = B + A$ **7)** $rang(A+B) > rang(A) + rang(B)$
  8) $rang(AB) = rang(A)rang(B)$ $\boxed{\textbf{9)}}$ $A(BC) = (AB)C$ $\boxed{\textbf{10)}}$ $A(B+C) = BA + CA$

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$? $\boxed{\textbf{a)}}$ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{b)}}$ $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- Neka su $\vec{x}\neq 0, \vec{i},\vec{j},\vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ jedinični međusobno normalni i α,β i γ uglovi koje vektor $\vec{x}$ obrazuje sa redom vektorima $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Tada:

  $\boxed{\textbf{1)}}$ Trijedar vektora $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ je nezavisan $\boxed{\textbf{2)}}$ Trijedar $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ je generatoran $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}=\vec{x}$

  $\boxed{\textbf{4)}}$ Trijedar vektora $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ je baza $\boxed{\textbf{5)}}$ $(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k})\in\mathbb{R}^3$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $(|\vec{x}|\cos\alpha)\vec{i}+(|\vec{x}|\cos\beta)\vec{j}+(|\vec{x}|\cos\gamma)\vec{k}=\vec{x}$

  7) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}=\vec{x}\vec{x}$ $\boxed{\textbf{8)}}$ $(\vec{x}\vec{i})^2+(\vec{x}\vec{j})^2+(\vec{x}\vec{k})^2=|\vec{x}|^2$ $\boxed{\textbf{9)}}$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

- Vektori $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ i $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako i samo ako je:

  1) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\leq 2$ **2)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\leq 3$ $\boxed{\textbf{3)}}$ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}=3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0$

  $\boxed{\textbf{5)}}$ $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})\neq 0$ **6)** $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\ \vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0\ \Rightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ $\boxed{\textbf{8)}}$ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je nezavisna.

- Neka je tačka P presek ravni $\alpha:\vec{n}\vec{r}=\vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a:\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$ i $\vec{n}\vec{a}\neq 0$. Tada je: $\boxed{\textbf{1)}}$ $\vec{r}_P=\vec{r}_A+\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$.

  2) $\vec{r}_P=\vec{r}_Q+\frac{(\vec{r}_A-\vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. **3)** $\vec{r}_P=\vec{r}_A+\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{n}$. $\boxed{\textbf{4)}}$ $\vec{r}_P=\vec{r}_A-\frac{(\vec{r}_A-\vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. **5)** $\vec{r}_P=\vec{r}_A+\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{n}$.

- Normalna projekcija vektora $\vec{x}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}=(-1,2,3)$ na pravu $\ell:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{1}$ je vektor:

  $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x})=(1,2,1)$, a na ravan $\alpha: x+2y+z=1$ je vektor $\mathbf{pr}_\alpha(\vec{x})=(-2,0,2)$ i $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x})+\mathbf{pr}_\alpha(\vec{x})=\vec{x}$

- Napisati bar jednu (ukoliko postoji) linearnu transformaciju $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ za koju važi:

  1) je injektivna $f(x,y)=(x,y,0,0)$ **2)** nije injektivna $f(x,y)=(0,0,0,0)$

  3) je sirjektivna $f(x,y)=/$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y)=(0,0,0,0)$

$\boxed{\text{A}}$ ALGEBRA ZADACI 2 2.2.2024.

1. Ravan α određena je tačkom A i vektorom normale $\vec{n}$, a prava p određena je tačkom P i vektorom pravca $\vec{p}$, gde važi $A\notin p, P\notin\alpha$ i $\vec{p}\not\perp\vec{n}$. U zavisnosti od $\vec{r}_A,\vec{r}_P,\vec{n}$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja tačaka B i C tako da ABC bude jednakostranični trougao i da $B\in\alpha, C\in\alpha$ i $B\in p$.

2. Neka je V vektorski prostor generisan vektorima $\vec{a}=(2,-1,-1),\vec{b}=(-4,2,2),\vec{c}=(-1,-1,-1)$ i $\vec{d}=(7,1,1)$. Odrediti sve linearne zavisnosti vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ i $\vec{d}$, naći jednu bazu prostora V i odrediti $\mathsf{dim}(V)$.

3. Neka je $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadata sa $f(1,1)=(0,1)$ i $f(-1,1)=(-1,0)$.

   a) Izračunati $f(1,0)$ i $f(0,1)$.

   b) Napisati M_f matricu linearne transformacije f u standardnoj bazi, odrediti rang matrice i proveriti da li je f bijekcija.

   c) Ako je $A=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ kvadrat, odrediti skup slika $f(A)$ i izračunati površinu figure $f(A)$.