$\boxed{\text{B}}$ **Prezime, ime, br. indeksa:** ____ **2.2.2024.**

Studijski program EE RA PR SV (zaokruži) KOLOKVIJUM 2

U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti (uokviriti) tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,…,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linernih jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a = 1 \vee a = -1$ **2)** određen: $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ **3)** kontradiktoran: /

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $-ax + ay = a \wedge ax + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:
  1) dvostruko neodređen: $a = 0$ **2)** jednostruko neodređen: / **3)** određen: $a \neq 0$ **4)** kontradiktoran: /
  5) Skup svih rešenja datog sistema jednačina je $\{(0,1)\}$ ili $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$. $\boxed{\text{DA}}$ NE

- Koje od sledećih uređenih n-torki jesu **generatorne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\textbf{1)}}$ $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$
  2) $\big((1,0,0),(0,-1,0)\big)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ **4)** $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$

- $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 42$ $\quad \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [8]$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = /$

- Matrice linearnih transformacija $f(x) = (x, 2x, 3x)$, $g(x,y,z) = z$, $h(x,y) = (x,x)$ i $s(x,y,z) = (z+y, z-x)$. su:

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad M_g = [0\ 0\ 1] \qquad M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \underset{3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \underset{0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

- Koje od sledećih uređenih n-torki **su nezavisne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\textbf{1)}}$ $\big((0,0,-5),(0,3,0),(7,0,0)\big)$
  $\boxed{\textbf{2)}}$ $\big((3,1,2),(-6,-2,5)\big)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $\big((2,0,2),(-1,-1,0),(0,3,3)\big)$ **4)** $\big((0,0,2),(0,2,0),(2,0,0),(-1,2,3)\big)$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje nenula **komutativne** kvadratne matrice A, B, C reda 4 i svaki skalar λ:
  $\boxed{\textbf{1)}}$ $det(AB) = det(B)det(A)$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $(AB)^2 = A^2B^2$ **3)** $det(A+B) = det(A) + det(B)$ **4)** $det(\lambda A) = \lambda^2 det(A)$
  5) $rang(A+B) < rang(A) + rang(B)$ **6)** $rang(A+B) > rang(A) + rang(B)$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $A + B = B + A$
  8) $rang(AB) = rang(A)rang(B)$ $\boxed{\textbf{9)}}$ $A(BC) = (AB)C$ $\boxed{\textbf{10)}}$ $A(B+C) = BA + CA$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako i samo ako je:
  $\boxed{\textbf{1)}}$ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ **2)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **3)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
  $\boxed{\textbf{5)}}$ $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ **6)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je nezavisna $\boxed{\textbf{8)}}$ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$

- Neka je tačka P presek ravni $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i $\vec{n}\vec{a} \neq 0$. Tada je: $\boxed{\textbf{1)}}$ $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$.
  2) $\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. **3)** $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{n}$. **4)** $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{n}$. $\boxed{\textbf{5)}}$ $\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$.

- Izraziti vektor $\vec{x} = (5,3,-4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,0,-1)$, $\vec{b} = (0,1,-1)$ i $\vec{c} = (1,1,0)$:

  $\vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$

- Normalna projekcija vektora $\vec{x} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = (-1,2,3)$ na pravu $\ell : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{1}$ je vektor:

  $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x}) = (1,2,1)$, a na ravan $\alpha : x + 2y + z = 1$ je vektor $\mathbf{pr}_\alpha(\vec{x}) = (-2,0,2)$ i $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x}) + \mathbf{pr}_\alpha(\vec{x}) = \vec{x}$

- Tačke $P(-1,2,3), Q(-2,3,1)$ i $R(-3,1,2)$ pripadaju ravni α. **1)** $\overrightarrow{PQ} = (-1,1,-2)$ **2)** $\overrightarrow{PR} = (-2,-1,-1)$ **3)** $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 3$

  4) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6}$ **5)** $|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{6}$ **6)** $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (3,-3,-3)$ **7)** $\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}) = -18$ **8)** $\sphericalangle QPR = \frac{\pi}{3}$

  9) Jednačina ravni α : 3x-3y-3z=4 **10)** Jednačina prave kroz tačke P i Q je $\ell_{P,Q}$: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$

- U paralelogramu $ABCD$ tačka P je sredina stranice AD i dijagonala AC i duž PB seku se u tački T. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Tada:

  $\boxed{\textbf{1)}}$ $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $6\overrightarrow{PT} = -\vec{b} + 2\vec{a}$ **3)** $\overrightarrow{PT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$

  4) $6\overrightarrow{PT} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ **5)** $6\overrightarrow{PT} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$ $\boxed{\textbf{6)}}$ Tačka T je težište trougla ABD.

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$? **a)** $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{b)}}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{c)}}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- Neka su $\vec{x} \neq 0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni i α, β i γ uglovi koje vektor $\vec{x}$ obrazuje sa redom vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tada:

  $\boxed{\textbf{1)}}$ Trijedar vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je nezavisan $\boxed{\textbf{2)}}$ Trijedar $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je generatoran $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$

  $\boxed{\textbf{4)}}$ $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ $\boxed{\textbf{5)}}$ Trijedar vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je baza $\boxed{\textbf{6)}}$ $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$

  $\boxed{\textbf{7)}}$ $(|\vec{x}|\cos\alpha)\vec{i} + (|\vec{x}|\cos\beta)\vec{j} + (|\vec{x}|\cos\gamma)\vec{k} = \vec{x}$ **8)** $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$ $\boxed{\textbf{9)}}$ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

- Napisati bar jednu (ukoliko postoji) linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ za koju važi:

  1) je injektivna $f(x,y,z) = (x,y,z,0)$ **2)** nije injektivna $f(x,y,z) = (0,0,0,0)$

  3) je sirjektivna $f(x,y,z) = /$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y,z) = (0,0,0,0)$

$\boxed{\text{B}}$ ALGEBRA — ZADACI 2 — 2.2.2024.

1. Ravan α određena je tačkom A i vektorom normale $\vec{n}$, a prava p određena je tačkom P i vektorom pravca $\vec{p}$, gde važi $A \notin p, P \notin \alpha$ i $\vec{p} \not\perp \vec{n}$. U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_P, \vec{n}$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja tačaka B i C tako da PBC bude jednakostranični trougao, da $B \in \alpha$, $B \in p$ i da tačka C pripada ravni određenoj tačkama A, B i P.

2. Neka je V vektorski prostor generisan vektorima $\vec{a} = (1,2,1), \vec{b} = (-1,1,2), \vec{c} = (5,4,-1)$ i $\vec{d} = (-5,-1,4)$. Odrediti sve linearne zavisnosti vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i $\vec{d}$, naći jednu bazu prostora V i odrediti $\mathsf{dim}(V)$.

3. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadata sa $f(1,-1) = (0,-1)$ i $f(-1,-1) = (-1,0)$.

   a) Izračunati $f(1,0)$ i $f(0,1)$.

   b) Napisati M_f matricu linearne transformacije f u standardnoj bazi, odrediti rang matrice i proveriti da li je f bijekcija.

   c) Ako je $B = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ kvadrat, odrediti skup slika $f(B)$ i izračunati površinu figure $f(B)$.