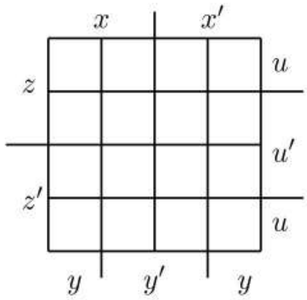
ALGEBRA **30.01.2022.**

1. Neka je $z_1 = a + 1 + i(a-1)$, $z_2 = 2a - ia$ i $w = \dfrac{z_1}{z_2}$. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da je
   (a) $I_m(w) = 0$, (b) $R_e(w) = 0$, (c) $|w| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Za uređeni par $([0,\infty), *)$, gde je binarna operacija $*$ skupa $[0,\infty)$ definisana sa $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$, ispitati zatvorenost operacije, asocijativnost, komutativnost, egzistenciju neutralnog elementa i egzistenciju inverznih elemenata.

3. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0



4. Neka je $A \neq B$ i $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. U zavisnosti od vektora $\vec{n}$ i vektora položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ susednih temena A i B kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$, izraziti vektore položaja temena kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kod koje je ravan dijagonalnog preseka ABC_1D_1 normalna na vektor $\vec{n}$.

5. Operacije $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ su definisane na sledeći način: za sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$ je: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, $\lambda \odot (a,b) = (\lambda a, b)$.
   Na uređenoj četvorci $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ ispitati sve aksiome vektorskog prostora.

6. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je poznato da je $f(1,2) = (-1,3)$ i $f(1,1) = (2,-6)$.
   (a) Izračunati $f(x,y)$ i matricu M linearne transformacije f. (b) Odrediti rang linearne transformacije f. (c) Ispitati da li postoji inverzna linearna transformacija f^{-1}. (d) Napisati jednačinu skupa tačaka $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ i dati geometrijsku interpretaciju toga skupa.

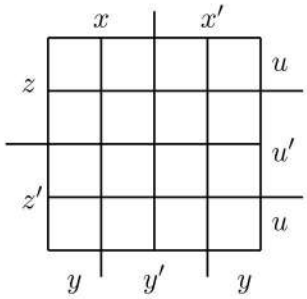
ALGEBRA **30.01.2022.**

1. Neka je $z_1 = a + 1 + i(a-1)$, $z_2 = 2a - ia$ i $w = \dfrac{z_1}{z_2}$. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da je
   (a) $I_m(w) = 0$, (b) $R_e(w) = 0$, (c) $|w| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Za uređeni par $([0,\infty), *)$, gde je binarna operacija $*$ skupa $[0,\infty)$ definisana sa $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$, ispitati zatvorenost operacije, asocijativnost, komutativnost, egzistenciju neutralnog elementa i egzistenciju inverznih elemenata.

3. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0



4. Neka je $A \neq B$ i $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. U zavisnosti od vektora $\vec{n}$ i vektora položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ susednih temena A i B kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$, izraziti vektore položaja temena kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kod koje je ravan dijagonalnog preseka ABC_1D_1 normalna na vektor $\vec{n}$.

5. Operacije $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ su definisane na sledeći način: za sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$ je: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, $\lambda \odot (a,b) = (\lambda a, b)$.
   Na uređenoj četvorci $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ ispitati sve aksiome vektorskog prostora.

6. Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je poznato da je $f(1,2) = (-1,3)$ i $f(1,1) = (2,-6)$.
   (a) Izračunati $f(x,y)$ i matricu M linearne transformacije f. (b) Odrediti rang linearne transformacije f. (c) Ispitati da li postoji inverzna linearna transformacija f^{-1}. (d) Napisati jednačinu skupa tačaka $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ i dati geometrijsku interpretaciju toga skupa.

REŠENJA

1. Kako je

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+1+i(a-1)}{2a-ia} = \frac{a+1+i(a-1)}{2a-ia} \cdot \frac{2a+ia}{2a+ia}$$
$$= \frac{2a^2+2a-a^2+a+i(2a^2-2a+a^2+a)}{4a^2+a^2} = \frac{a^2+3a+i(3a^2-a)}{5a^2}$$
$$= \frac{a^2+3a}{5a^2} + i\frac{3a^2-a}{5a^2},$$

dobijamo sledeća rešenja.

(a) $I_m(w) = 0$ ako je

$$\frac{3a^2-a}{5a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3a^2-a=0 \ \wedge \ 5a^2 \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a(3a-1)=0 \ \wedge \ a \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{3}.$$

(b) $R_e(w) = 0$ ako je

$$\frac{a^2+3a}{5a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2+3a=0 \ \wedge \ 5a^2 \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a(a+3)=0 \ \wedge \ a \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad a = -3.$$

(c) $|w| = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(\frac{a^2+3a}{5a^2})^2 + (\frac{3a^2-a}{5a^2})^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

Za $a=0$ broj w nije definisan, a za $a \neq 0$ je

$$|w| = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(\frac{a+3}{5a})^2 + (\frac{3a-1}{5a})^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{(a+3)^2+(3a-1)^2}{25a^2}} = \sqrt{\frac{10a^2+10}{25a^2}} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{a^2+1}}{5|a|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{5}|a|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}|a| \ \ /^2$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2+1 = 2a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \{-1, 1\}.$$

2. (a) Zatvorenost operacije $*$ je očigledna jer za $x, y \in [0, \infty)$ je $\sqrt{x^2+y^2} \in [0, \infty)$.

(b) Operacija $*$ jeste asocijativna jer za

$$L = (x*y)*z = \sqrt{x^2+y^2}*z = \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$D = x*(y*z) = x*\sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{x^2+(\sqrt{y^2+z^2})^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

imamo da je $L = D$.

(c) Komutativnost operacije $*$ je očigledna jer je

$x*y = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2} = y*x.$

(d) Neutralni element je $0 \in [0, \infty)$ jer za sve $x \in [0, \infty)$ važi

$0*x = x*0 = \sqrt{x^2+0^2} = |x| = x.$

(e) Inverzni element za 0 je naravno 0, a za sve ostale $x > 0$ ne postoji $x' \geq 0$ takvo da je $x*x' = \sqrt{x^2+(x')^2} = 0$ (jer je $x^2 > 0$).

3. Proste implikante:

yu', $y'zu$, $x'y'z$, $x'zu'$.

$MDNF_1 = yu' + y'zu + x'y'z,$

$MDNF_2 = yu' + y'zu + x'zu'.$

	x	x	x'	x'	
z		*	*		u
z	*		*	*	u'
z'	*			*	u'
z'					u
	y	y'	y'	y	

4. Duži AD_1 i BC_1 su dijagonale strana kocke tj. kvadrata ADD_1A_1 i BCC_1B_1, te je $|AD_1| = |BC_1| = \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|$. Vektori $|AD_1|$ i $|BC_1|$ su normalni i na $\overrightarrow{AB}$ i na $\vec{n}$, dakle imaju pravac vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}$. Stoga je

$$\vec{r}_{D_1} = \vec{r}_A \pm \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \qquad \vec{r}_{C_1} = \vec{r}_B \pm \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

(zadatak ima dva rešenja). Neka je S sredina duži BC_1, dakle $\quad \vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_{C_1})$.

Vektori SC i SB_1 su istog pravca kao vektor $\vec{n}$ i jednake dužine kao vektori $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{SC_1} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}|$, te je

$$\vec{r}_C = \vec{r}_S \pm \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \qquad \vec{r}_{B_1} = \vec{r}_S \mp \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

(rešenja dobijena sa $\pm$ i $\mp$ su jednaka jer se razlikuju samo u oznakama temena kocke).
Na kraju iz $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BB_1}$ dobijamo $\quad \vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_{B_1} - \vec{r}_B, \qquad \vec{r}_D = \vec{r}_{D_1} - \vec{r}_{B_1} + \vec{r}_B$.

5. (a) Ispitujemo da li je $(\mathbb{R}^2, +)$ komutativna grupa. Operacija $+$ je zatvorena jer je $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{R}^2$ za sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$. Asocijativna je i komutativna jer je

$$\begin{aligned}(a,b) + ((c,d) + (e,f)) &= (a,b) + (c+e, d+f) = (a+c+e, b+d+f)\\ &= (a+c, b+d) + (e,f) = ((a,b) + (c,d)) + (e,f),\end{aligned}$$

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d) + (a,b)$.
Neutralni element je $(0,0)$ jer je $(a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = (a,b)$.
Inverzni element za $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ je $(-a,-b) \in \mathbb{R}^2$ jer je $(a,b) + (-a,-b) = (-a,-b) + (a,b) = (0,0)$.
Dakle, $(\mathbb{R}^2, +)$ je komutativna grupa.

(b) Jeste $\lambda \odot ((a,b) + (c,d)) = \lambda \odot (a,b) + \lambda \odot (c,d)$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ jer je

$$\begin{aligned}\lambda \odot ((a,b) + (c,d)) &= \lambda \odot (a+c, b+d) = (\lambda(a+c), b+d)\\ &= (\lambda a + \lambda c, b+d) = (\lambda a, b) + (\lambda c, d) = \lambda \odot (a,b) + \lambda \odot (c,d).\end{aligned}$$

(c) Ispitujemo da li je $(\lambda + \theta) \odot (a,b) = \lambda \odot (a,b) + \theta \odot (a,b)$ za sve $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ i svako $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Nije, jer je npr. za $\lambda = \theta = a = b = 1$
$L = (\lambda + \theta) \odot (a,b) = ((1+1)\cdot 1, 1) = (2,1)$,
$D = \lambda \odot (a,b) + \theta \odot (a,b) = (\lambda a, b) + (\theta a, b) = (1,1) + (1,1) = (2,2) \neq L$.

(d) Ispitujemo da li je $\lambda \odot (\theta \odot (a,b)) = (\lambda\theta) \odot (a,b)$ za sve $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ i svako $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Jeste, jer je
$\lambda \odot (\theta \odot (a,b)) = \lambda \odot (\theta a, b) = (\lambda\theta a, b) = (\lambda\theta) \odot (a,b)$.

(e) Očigledno je $1 \odot (a,b) = (1 \cdot a, b) = (a,b)$ za svako $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

6. (a) Lin. transf. f odgovara matrica $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, a iz uslova $f(1,2) = (-1,3)$ i $f(1,1) = (2,-6)$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b \\ c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ c & + & 2d & = & 3 \end{array},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 2 \\ c & + & d & = & -6 \end{array}.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 2b & & & & & = & -1 \\ & & & & c & + & 2d & = & 3 \\ a & + & b & & & & & = & 2 \\ & & & & c & + & d & = & -6 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 2b & & & & & = & -1 \\ a & + & b & & & & & = & 2 \\ & & & & c & + & 2d & = & 3 \\ & & & & c & + & d & = & -6 \end{array}$$

dobijamo $a = 5$, $b = -3$, $c = -15$, $d = 9$, dakle $M = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 9 \end{bmatrix}$, te je

$f(x,y) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - 3y \\ -15x + 9y \end{bmatrix}$. Sledi da je $f(x,y) = (5x - 3y, -15x + 9y)$.

(b) Ako prvu vrstu matrice M pomnoženu sa 3 dodamo drugoj, dobijamo da je $M \sim \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, odakle sledi da je $\operatorname{rang}(M) = 1$.

(c) Iz $\det M = 0$ sledi da ne postoji inverzna linearna transformacija f^{-1}.

(d) $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x,y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(5x-3y, -15x+9y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(5x-3y, -3(5x-3y)) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ $= \{(t, -3t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,-3) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
što je prava koja prolazi koordinatni početak i paralelna je sa vektorom $(1,-3)$, i njena jednačina je $f(\mathbb{R}^2) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-3}$.