A **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **21.01.2021.**

Studijski program E1 E2 PR SV IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 2

U zadatku je dato više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Ako je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ i $\vec{a} \perp \vec{b}$, tada vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$ su kolinearni za $\alpha =$ -5, a normalni za $\alpha =$ 5.

- Neka je p prava čija je jednačina $p: x + z = 3 \wedge z = 2$. Napisati bar jedan jedinični vektor pravca $\vec{p}$ prave p: $\vec{p} = ($ 0 , 1 , 0 $)$ i koordinate tačke A prave p koja je najbliža koordinatnom početku $O(0,0,0)$: $A($ 1 , 0 , 2 $)$.

- Neka je $\vec{r}_A = (1,0,1)$, $\vec{r}_B = (0,1,1)$ i $\vec{r}_C = (1,1,1)$ tada je: **1)** $|\vec{r}_A| =$ $\sqrt{2}$ **2)** $\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B =$ 1 **3)** $P_{\triangle ABC} =$ 1/2

  4) $\sphericalangle(\vec{r}_A, \vec{r}_B) =$ $\pi/3$ **5)** $|\vec{r}_A - \vec{r}_B| =$ $\sqrt{2}$ **6)** $\vec{r}_A \times \vec{r}_B =$ (-1,-1,1) **7)** $|(\vec{r}_A \times \vec{r}_B)\vec{r}_C| =$ 1 **8)** $\overrightarrow{BA} =$ (1,-1,0)

- Izraziti vektor $\vec{x} = (2,2,3)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{r}_A = (1,0,1)$, $\vec{r}_B = (0,1,1)$ i $\vec{r}_C = (1,1,1)$
  $\vec{x} =$ 1$\cdot\,\vec{r}_A +$ 1$\cdot\,\vec{r}_B +$ 1$\cdot\,\vec{r}_C$ i zapreminu tetraedra $OABC$, gde je $O(0,0,0)$ tj. $V_{OABC} =$ 1/6

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x + ay = 1 \wedge ax + y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** određen: $a \neq \pm 1$ **2)** kontradiktoran: $a = -1$ **3)** jednostruko neodređen: $a = 1$

- **Generatorne** uređene trojke u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ su: **1)** $\big((6,3,1),(3,3,1),(9,3,1),(7,3,1)\big)$
  2) $\big((0,-1,2),(0,-1,3),(0,1,4)\big)$ **3)** $\big((1,1,3),(1,4,5),(1,0,1)\big)$ **4)** $\big((2,2,2)(1,1,1),(0,0,1),(1,0,0)\big)$

- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 3 $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1 $\quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2 $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0 $\quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ 1

- **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da
  1) je injektivna $f(x,y,z) = ($ / , / $)$ **2)** nije injektivna $f(x,y,z) = ($ 0 , 0 $)$
  3) je sirjektivna $f(x,y,z) = ($ x , y $)$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y,z) = ($ 0 , 0 $)$

- Neka su $ABCDEF$ uzastopna temena pravilnog šestougla i T njegov centar (težište). Izraziti vektore $\overrightarrow{DT}$, $\overrightarrow{DA}$ i $\overrightarrow{CA}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{p} = \overrightarrow{CD}$ i $\vec{r} = \overrightarrow{DE}$. $\overrightarrow{DT} = \vec{r} - \vec{p}$ $\overrightarrow{DA} = 2\vec{r} - 2\vec{p}$ $\overrightarrow{CA} = 2\vec{r} - \vec{p}$

- Koordinate normalne projekcije A' tačke $A(1,-1,5)$ na ravan određenu sa $x + 2y - z = 6$ su: $A'($ 3 , 3 , 3 $)$

- Normalna projekcija vektora $\vec{x} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ na pravu $\ell: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ je vektor: $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x}) = ($ 2 , 2 , 2 $)$

- Odrediti vektor $\vec{x}' = \mathbf{pr}_{s,\alpha}(\vec{x})$ koji je kosa projekcija vektora $\vec{x} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ na pravu $s: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ ako su zraci projektovanja paralelni sa ravni $\alpha: x + 3y = 1$ i seku pravu s. $\vec{x}' = \mathbf{pr}_{s,\alpha}(\vec{x}) = ($ 3 , 1 , 1 $)$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **nekolinearni** ako je: **1)** $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
  3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **4)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **5)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ **6)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni
  7) $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} \neq \lambda\vec{b}$ **8)** $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ **9)** $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} \neq \lambda\vec{b} \ \wedge\ \lambda\vec{a} \neq \vec{b})$ **10)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **komplanarni** ako i samo ako je:
  1) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ **2)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ **3)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
  5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ **6)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ **7)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ **8)** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

- Linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x - ay, 2x + ay)$ **nije** sirjektivna akko $a \in \{$ 0 $\}$

- Neka su $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ jedinični vektori $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}\perp\vec{i}$ i $\vec{a}\neq 0$. Tada je 1) $(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k})$ je uređena trojka realnih brojeva 2) Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}$ 3) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}\in\mathbb{R}^3$ 4) $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$ 5) $\vec{x}=(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}$ 6) Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{i}$ je broj $\vec{x}\vec{i}$ 7) $|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})|=\frac{|\vec{a}\vec{x}|}{|\vec{a}|}$ 8) Algebarska vrednost projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ je broj $\pm|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})|=\frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|}\in\mathbb{R}$

- Ako je (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) generatorna u prostoru V, (c_1,c_2,c_3) nezavisna za prostor V i $\dim V=k$, tada je 1) $3\leq k\leq 5$ 2) $5\leq k$ 3) $k<4$ 4) $k<6$ 5) $k>2$

- Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: 1) $\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=5\Leftrightarrow\det A\neq 0$, 2) $\det A=0\Rightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=5$ 3) $\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=5\Leftrightarrow\exists A^{-1}$ 4) $\det A=0\Rightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=0$ 5) $\det A=0\Leftrightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}\leq 4$,

- **Svaka** linearna transformacija različita od nula transformacije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ je: 1) sirjektivna 2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

- Ako je matrica B dobijena od matrice $A=[a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je: 1) $|det(A)|=\lambda|det(B)|$ za neko $\lambda\in\mathbb{R}$ 2) $\mathbf{rang}(A)=\mathbf{rang}(B)$ 3) $A\cdot B=I$ 4) $\det A\neq 0\Leftrightarrow\det B\neq 0$

- Za bilo koje kvadratne matrice A,B,C reda 3 i svaki skalar λ je: 1) $C+B=B+C$ 2) $CB=BC$ 3) $\det(A+B)=\det(A)\det(B)$ 4) $\det CA=\det AC$ 5) $(C+B)A=BA+CA$ 6) $\det(\lambda A)=\lambda^3\det(A)$ 7) $\det(AB)=\det(B)det(A)$ 8) $(AB)^2=B^2A^2$ 9) $\mathbf{rang}(AB)=\mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(B)$ 10) $B(CA)=(BC)A$

ALGEBRA, KOLOKVIJUM 2 — 21.01.2021.

1. Ravan α sadrži tačku Q i normalna je na vektor $\vec{n}$, a prava p sadrži tačku P i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$. Pri tome prava p nije ni normalna na ravan α, niti je paralelna sa njom. Takođe $P\notin\alpha$. Preko $\vec{r}_Q$, $\vec{r}_P$, $\vec{n}$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja temena A i B jednakokrakog trougla PAB sa osnovicom AB čija je ravan normalna na ravan α i sadrži pravu p, temena A i B pripadaju ravni α, i teme A pripada pravoj p.

2. Neka je $A=\{a,b,c,d\}\subseteq\mathbb{R}^3$ gde je $a=(1,2,3)$, $b=(1,0,-2)$, $c=(3,4,4)$, i $d=(-3,0,6)$, i neka je $V=Lin(A)$.

   (a) Odrediti sve podskupove skupa A koji su baza potprostora V prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Jednu od baza potprostora V dopuniti do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

3. Neka je $a=(2,-1,3)$, $b=(-1,p,2)$, i neka je funkcija $f_p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definisana sa
   $f_p(x,y,z)=(a\cdot(x,y,z))\cdot a+b\times(x,y,z)$,
   gde je $p\in\mathbb{R}$.

   (a) Dokazati da je f_p linearna transformacija i napisati njenu matricu M_{f_p}.

   (b) Diskutovati rang matrice M_{f_p} po $p\in\mathbb{R}$.