1. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, gde su za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ funkcije $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisane sa $f_1(x, y) = (-y, -x)$, $f_2(x, y) = (y, x)$, $f_3(x, y) = (x, y)$, $f_4(x, y) = (-x, -y)$.

2. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $z \cdot \overline{z} + 1 = -i(z - \overline{z})$.

3. Znajući da je $\sqrt{2}i$ jedan kompleksni koren polinoma $p(x) = x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 16x + 8$, faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

****

4. U zavisnosti od parametara $a, b \in \mathbb{R}$ diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & az & = & 1 \\ ax & + & y & + & az & = & 2 \\ ax & + & y & + & z & = & b \end{array}$$

5. Neka je α ravan koja sadrži tačku A i normalna je na vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$. U funkciji od vektora $\vec{r}_A$ i $\vec{n}$ izraziti vektore položaja ostalih temena kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ čija temena $ABCD$ leže u ravni α, temena $ABCD$ predstavljaju temena strane kocke (kvadrata) sa dijagonalom AC, tako da ortogonalna projekcija koordinatnog početka O na ravan α bude sredina duži AC.

6. Neka je ravan α određena jednačinom $\alpha : 2x - y + z = 0$, i neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonalna projekcija tačaka vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ na ravan α. Odrediti analitički izraz za $f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dokazati da je f linearna transformacija i napisati njenu matricu, i odrediti jednu bazu potprostora $f(\mathbb{R}^3)$ (tj. potprostora slika $\mathrm{Im}(f)$).

REŠENJA ZADATAKA

1. Izračunavanjem kompozicija funkcija f_1, f_2, f_3, f_4, gde je f_3 identička funkcija, dobijamo Kejlijevu tablicu

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_3	f_4	f_1	f_2
f_2	f_4	f_3	f_2	f_1
f_3	f_1	f_2	f_3	f_4
f_4	f_2	f_1	f_4	f_3

. U unutrašnjosti tablice su svi elementi iz skupa $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, te je $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ grupoid. Kompozicija funkcija je asocijativna operacija (teorema). Neutralni element je identička funkcija f_3 (vidi se i iz tablice jer su mu vrsta i kolona jednaki graničnim). Iz tablice očitavamo da je $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$ i $f_4^{-1} = f_4$. Tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu te je operacija $\circ$ komutativna na skupu $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

2. Za $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ je

$$z \cdot \overline{z} + 1 = -i(z - \overline{z}) \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)(x-iy)+1 = -i((x+iy)-(x-iy)) \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+1 = -2yi^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2y+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+(y-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x=0 \ \wedge \ y=1) \quad \Leftrightarrow \quad z = i.$$

3. $(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = x^2 + 2$. Delenjem polinoma p sa $x^2 + 2$ dobijamo $p(x) = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4)$. Kandidati za racionalne korene polinoma $q(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$ su $\pm 1, \pm 2, \pm 4$, a Hornerovom šemom dobijamo

	1	−2	5	−8	4
1	1	−1	4	−4	0
1	1	0	4	0	

, te je

$$p(x) = (x^2+2)(x^4-2x^3+5x^2-8x+4) =$$
$$= (x^2+2)(x-1)^2(x^2+4) = (x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)(x-1)^2(x-2i)(x+2i).$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & az & = & 1 \\ ax & + & y & + & az & = & 2 \\ ax & + & y & + & z & = & b \end{array} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & az & = & 1 \\ & & (1-a^2)y & + & (a-a^2)z & = & 2-a \\ & & (1-a^2)y & + & (1-a^2)z & = & b-a \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & az & = & 1 \\ & & (1-a^2)y & + & (a-a^2)z & = & 2-a \\ & & & & (1-a)z & = & b-2 \end{array}$$

[1] - Prvu jednačinu pomnoženu sa $-a$ dodajemo deugoj i trećoj.

[2] - Drugu jednačinu oduzimamo od treće.

(1) Za $a \notin \{-1, 1\}$, kada su svi koeficijenti na glavnoj dijagonali različiti od 0, sistem je određen, i zamenom unatrag dobijamo jedinstveno rešenje

$z = \dfrac{b-2}{1-a}$,

$y = \dfrac{a^2-a}{1-a^2}z + \dfrac{2-a}{1-a^2} = \dfrac{a(a-1)}{1-a^2}\dfrac{b-2}{1-a} + \dfrac{2-a}{1-a^2} = \dfrac{a(b-2)}{a^2-1} + \dfrac{a-2}{a^2-1} = \dfrac{ab-a-2}{a^2-1}$,

$x = -ay - az + 1 = -a\dfrac{ab-a-2}{a^2-1} - a\dfrac{b-2}{1-a} + 1 = \dfrac{-a^2b+a^2+2a}{(a-1)(a+1)} + \dfrac{ab-2a}{a-1} + 1$

$= \dfrac{-a^2b+a^2+2a+(a+1)(ab-2a)+(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{ab-1}{a^2-1}$,

dakle $\mathcal{R}_S = \left\{\left(\dfrac{ab-1}{a^2-1}, \dfrac{ab-a-2}{a^2-1}, \dfrac{b-2}{1-a}\right)\right\}$.

(2) Za $a = -1$ dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 1 \\ & & & - & 2z & = & 3 \\ & & & & 2z & = & b-2 \end{array} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x & - & z & - & y & = & 1 \\ & - & 2z & & & = & 3 \\ & & & & 0 & = & b+1 \end{array}$$

[3] - Drugu jednačinu dodajemo na treću, i zamenjujemo y-kolonu i z-kolonu.

(2.1) Za $b \neq -1$ je sistem kontradiktoran, odnosno skup rešenja mu je $\mathcal{R}_S = \emptyset$.

(2.2) Za $b = -1$ je sistem 1 puta neodređen, a skup rešenja mu je

$y = \alpha \in \mathbb{R}, \qquad z = -\dfrac{3}{2}, \qquad x = \alpha - \dfrac{1}{2}$,

dakle $\mathcal{R}_S = \left\{\left(\alpha - \dfrac{1}{2}, \alpha, -\dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

(3) Za $a = 1$ dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & b-2 \end{array}$$

koji je kontradiktoran za svako $b \in \mathbb{R}$, odnosno skup rešenja mu je $\mathcal{R}_S = \emptyset$.

5. Označimo sa S sredinu duži AC. Primenom formule za projekciju tačke na ravan dobijamo

$\vec{r}_S = \vec{r}_O + \dfrac{(\vec{r}_A - \vec{r}_O)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_A\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$.

Kako je S sredina duži AC, sledi da je $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC}$ odnosno $\vec{r}_S - \vec{r}_A = \vec{r}_C - \vec{r}_S$, odakle dobijamo

$\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$.

Iz $B, D, S \in \alpha$ sledi $\overrightarrow{SB} \perp \vec{n}$ i $\overrightarrow{SD} \perp \vec{n}$, a s druge strane, kako su AC i BD dijagonale kvadrata, sledi $\overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{SD} \perp \overrightarrow{AC}$. Stoga je

$\overrightarrow{SB} \parallel \vec{m} = \vec{n} \times \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{SD} \parallel \vec{m}$.

Tako dobijamo

$\vec{r}_{B,D} = \vec{r}_S \pm |\overrightarrow{AS}|\dfrac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$.

Iz $A, B, C, D \in \alpha$ sledi da je $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \parallel \vec{n}$

dobijamo i

$\vec{r}_{A_1,B_1,C_1,D_1} = \vec{r}_{A,B,C,D} \pm |\overrightarrow{AB}|\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

(postoje dve takve kocke).

6. Jedan vektor normale ravni α je $\vec{n} = (2,-1,1)$, a koordinatni početak $O(0,0,0)$ pripada ravni α. Primenom projekcije tačke $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ na ravan α dobijamo

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_O - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n} = (x,y,z) + \frac{((0,0,0)-(x,y,z))(2,-1,1)}{(2,-1,1)(2,-1,1)}(2,-1,1) \\
&= (x,y,z) - \frac{(x,y,z)(2,-1,1)}{6}(2,-1,1) = (x,y,z) - (2x-y+z)\left(\frac{2}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) \\
&= (x,y,z) - \left(\frac{4}{6}x - \frac{2}{6}y + \frac{2}{6}z, -\frac{2}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z, \frac{2}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z\right) \\
&= \left(\frac{2}{6}x + \frac{2}{6}y - \frac{2}{6}z, \frac{2}{6}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z, -\frac{2}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right).
\end{aligned}$$

Iz oblika navedenog izraza za $f(x,y,z)$ vidimo da je f linearna transformacija, i iz tog izraza očitavamo njenu matricu

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Po definiciji funkcije f, potprostor $f(\mathbb{R}^3)$ je očigledno sama ravan α. Ona je dimenzije 2 i sadrži koordinatni početak, te jednu njenu bazu čine bilo koja 2 nekolinearna vektora položaja neke 2 tačke iz ravni. Uvrštavanjem koordinata tačaka u jednačinu ravni lako proveravamo da npr. $P(1,2,0) \in \alpha$ i $Q(0,1,1) \in \alpha$. Pri tome je $\vec{r}_P \nparallel \vec{r}_Q$ jer očigledno ne postoji $t \in \mathbb{R}$ takvo da je $\vec{r}_P = t\vec{r}_Q$ ili $\vec{r}_Q = t\vec{r}_P$. Stoga je $\{\vec{r}_P, \vec{r}_Q\}$ jedna baza potprostora $f(\mathbb{R}^3) = \alpha$.