Prezime, ime, br. indeksa: KM **30.11.2024.**

Studijski program **E1** **E2** **PR** **SV** **(zaokruži)** **KOLOKVIJUM 1**

U zadacima dato je više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora. Na kraju testa su tri zadatka koji se rade u datoj svesci. Obavezno se predaje ovaj test i sveska.

- Dati su kompleksni brojevi $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right)$ i $z_3 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$. Odrediti:

$\mathrm{Im}(z_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad |z_3| = \sqrt{2}$ $\quad \overline{z_3} = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad \arg(z_1) = \frac{2\pi}{3}$

$z_1 + z_2 = (\sqrt{3}-\frac{1}{2}) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$ $\quad z_2^3 = 8i$ $\quad |z_2 z_3| = 2\sqrt{2}$ $\quad \arg\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \frac{5\pi}{12}$

- Navesti geometrijsku interpretaciju skupova $A, B, C, D \subseteq \mathbb{C}$ i funkcija $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i zaokružiti ukoliko poseduju osobinu injektivnosti i sirjektivnosti.

$f(z) = ze^{\psi i}$ rotacija oko 0 za ugao ψ — 1-1 NA

$g(z) = z + 1$ translacija za 1 — 1-1 NA

$h(z) = Re(z)$ projekcija na Re-osu — ~~1-1~~ ~~NA~~

$A = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 3\}$ $k(0, \sqrt{3})$

$B = \{z \in \mathbb{C} : (z-1)^3 = 1\}$ temena trougla sa centrom u 1

$C = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = Im(z)\}$ prava $y = x$

$D = \{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}$ Re-osa

- Zaokružiti tačne iskaze:

~~1)~~ $\{z|\arg z \geq 0\} = \{z|Im(z) \geq 0\}$ 2) $\{z| -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z|Re(z) > 0\} \cup \{xi|x \in \mathbb{R}^+\}$

3) $\{z| -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z|Re(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$ 4) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow Re(z) \geq 0$

5) $\{z|\arg z > 0\} = \{z|Im(z) > 0\} \cup \mathbb{R}^-$ 6) $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$

- Neka su $A = \{1, 2\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:

$|\{f|f : A \to B\}| = 16$ $\quad |\{f|f : A \xrightarrow{1-1} B\},| = 12$ $\quad |\{f|f : A \to B \wedge \nearrow\}| = 6$ $\quad |\{f|f : B \xrightarrow{na} B\}| = 24$

$|\{f|f : B \to A\}| = 16$ $\quad |\{f|f : A \xrightarrow{1-1} A\},| = 2$ $\quad |\{f|f : A \to B \wedge \underline{\nearrow}\}| = 10$ $\quad |\{f|f : A \xrightarrow{na} A\}| = 2$

- Zaokružiti broj ispred injektivnih funkcija:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1$ 2) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x$ 3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + 1$

~~4)~~ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$ 5) $f : [0, 1) \to [0, 1), \quad f(x) = x^2$ 6) $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad f(x) = \mathrm{arctg}(x)$

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.

1) $xx = x + x$ ~~2)~~ $xy = x + y$ 3) $xx' = (x+1)'$ 4) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ ~~5)~~ $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

6) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 7) $x = xy + xy'$ 8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\ x + y = 1 \wedge xy = 0$

- Na skupu $\mathbb{R}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(x, y)|xy = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_2 = \{(x, |x|)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_3 = \{(x, x+1)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_4 = \{(x, x)|x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_5 = \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_6 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$.

Zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S-simetričnost, A-antisimetričnost, T-tranzitivnost.

ρ_1: ~~R~~ S ~~A~~ ~~T~~ $\quad \rho_2$: ~~R~~ ~~S~~ A T $\quad \rho_3$: ~~R~~ ~~S~~ A ~~T~~ $\quad \rho_4$: ~~R~~ S A T $\quad \rho_5$: ~~R~~ ~~S~~ A T $\quad \rho_6$: R S ~~A~~ T

- Napisati Kejlijeve tablice grupoida $(\mathbb{Z}_4, +)$ i $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$, odrediti inverzne elemente i izračunati:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$-0 =$ 0 $\quad -1 =$ 3 $\quad -2 =$ 2 $\quad -3 =$ 1

$1^{-1} =$ 1 $\quad 3^{-1} =$ 3 $\quad (3+2^3)^{-1} =$ 3

- Zaokružiti asocijativne grupoide sa neutralnim elementom:

1) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 2) $(\mathbb{N}, +)$ 3) $(\{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$ 4) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ 5) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ 6) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

- Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni a nisu polja:

1) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom polju $(F, +, \cdot)$:

1) $a + bc = (a+b)(a+c)$ 2) $(F, +)$ je grupa 3) $(F, \cdot)$ je grupa 4) $a(b+c) = ab + ac$
5) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 6) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 7) $a \cdot 0 = 0$ 8) $a + (-a) = 0$

- Zaokružiti brojeve ispred polinoma za koje je struktura $(\mathbb{Z}_3/_{\equiv_p}, +, \cdot)$ polje:

1) $p(x) = x + 1$ 2) $p(x) = x^2 + 1$ 3) $p(x) = x^2 + x + 1$ 4) $p(x) = x^2 + 2x + 1$ 5) $p(x) = 2x^3 + x + 1$

- Koreni polinoma $x^2 - x + 1$ su: 1) $e^{i\frac{\pi}{3}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, 3) $-e^{i\frac{\pi}{3}}$, 4) $-e^{-i\frac{\pi}{3}}$

- Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{C}$ koeficijenti polinoma $P(x) = x^2 + ax + b$ i $Q(x) = x^2 + w$. Ako je $1 - i$ zajednički koren polinoma P i Q, tada preostali koreni polinoma P i Q su redom $x_1 =$ $1+i$ i $x_1' =$ $-1+i$, dok je $a =$ -2, $b =$ 2, $w =$ $2i$.

- Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^3 + t + 3$ **svodljiv**: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

- Koreni polinoma $p(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x - 6$ su:

1) -2 2) 1 3) i 4) 3 5) $\sqrt{3}$ 6) $-\sqrt{3}$

Faktorizacija polinoma $p(x)$ nad poljem $\mathbb{R}$ je $(x+2)\cdot(x^2+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Faktorizacija polinoma $p(x)$ nad poljem $\mathbb{Q}$ je $(x+2)(x^2+1)(x^2-3)$

Faktorizacija polinoma $p(x)$ nad poljem $\mathbb{C}$ je $(x+2)(x-i)(x+i)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

- Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(1+2i) = 0$, tada: 1) $x - 1 + 2i \mid f(x)$ 2) $x - 1 - 2i \mid f(x)$
3) $x - \sqrt{5}\, e^{i\frac{\pi}{3}} \mid f(x)$ 4) $x^2 + 2x - 5 \mid f(x)$; 5) $x - \sqrt{5}\, e^{i \operatorname{arctg} 2} \mid f(x)$; 6) $x^2 - 2x + 5 \mid f(x)$.

ZADACI

1. Napisati SDNF, sve proste implikante i sve MDNF Bulove funkcije f definisane tabelom:

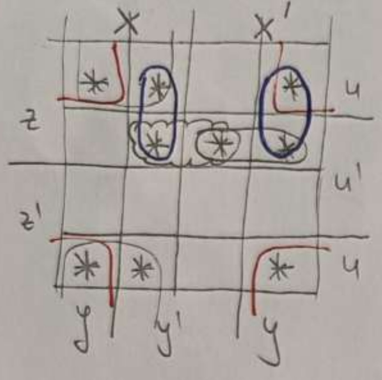
x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0

2. Neka su p_1, p_2, p_3, p_4 funkcije skupa $A = \{a, b, c, d\}$ definisane na sledeći način $p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. Pokazati da je $(P, \circ)$ Abelova grupa, gde je $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

3. Neka je $p(x) = x^7 - x^6 + x^4 - x^3 + x - 1$. Izračunati $p(e^{\frac{2\pi}{9}i})$, $p(e^{\frac{4\pi}{9}i})$ i $p(e^{\frac{8\pi}{9}i})$. Faktorisati polinom $p(x)$ nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

①

SDNF: $f(x,y,z,u) = xyzu + xyz'u + xy'zu + xy'zu' + xy'z'u + x'yzu + x'yzu' + x'yz'u + x'y'zu'$

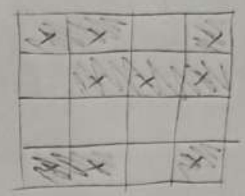


PI: $xu,\ yu,\ xy'z,\ x'yz,\ y'zu',\ x'zu'$

MDNF: $\Phi_1 = yu + xu + xy'z + x'zu'$

$\Phi_2 = yu + xu + y'zu' + x'zu'$

$\Phi_3 = yu + xu + y'zu' + x'yz$



②

∘	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_4	p_3	p_2	p_1
p_2	p_3	p_4	p_1	p_2
p_3	p_2	p_1	p_4	p_3
p_4	p_1	p_2	p_3	p_4

$p_1 \circ p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = p_4$

$p_1 \circ p_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} = p_3$

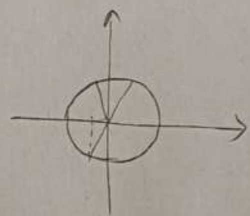
$\vdots$

Zat: ✓ (nismo iskočili iz skupa A)
Asoc: ✓ (kompozicija je asoc. operacija)
NE: p_4
IE: svaki sam sebi
Kom: ✓ (tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu)

③ kandidati za korene $\{\pm 1\}$

$p(1) = 0$

$p(-1) = -6$



$$p(x) = (x-1)\underbrace{(x^6 + x^3 + 1)}$$

$$e^{i\frac{12\pi}{9}} + e^{i\frac{6\pi}{9}} + 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$$

→ $e^{\pm i\frac{2\pi}{9}}$ su koreni

$$e^{i\frac{24\pi}{9}} + e^{i\frac{12\pi}{9}} + 1 = e^{i\frac{8\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 = 0$$

→ $e^{\pm i\frac{4\pi}{9}}$ su koreni

$$e^{i\frac{16\pi}{3}} + e^{i\frac{8\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = 0$$

→ $e^{\pm i\frac{8\pi}{9}}$ su koreni

$$p(x) = (x-1)\left(x - e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)\left(x - e^{-i\frac{2\pi}{9}}\right)\left(x - e^{i\frac{4\pi}{9}}\right)\left(x - e^{-i\frac{4\pi}{9}}\right)\left(x - e^{i\frac{8\pi}{9}}\right)\left(x - e^{-i\frac{8\pi}{9}}\right) \text{ nad } \mathbb{C}$$

$$= (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{9} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{9} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{8\pi}{9} + 1\right) \text{ nad } \mathbb{R}$$