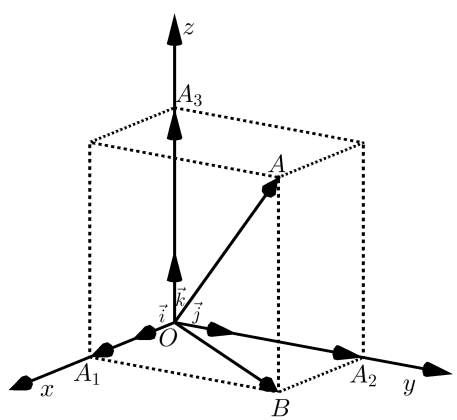
ANALITIČKA GEOMETRIJA

0.1 Vektori u Dekartovom koordinatnom sistemu

Analitička geometrija bavi se proučavanjem Euklidske geometrije korišćenjem algebarskih metoda. Tačke prostora se predstavljaju koordinatama, a ostali geometrijski objekti: prava, ravan, površ, kriva se predstavljaju jednačinama. Ispitivanje međusobnog odnos pravih i ravni svodi se na rešavanje sistema linearnih jednačina.

Ovo poglavlje prikazuje izomorfizam između prostora slobodnih vektora i prostora uređenih trojki realnih brojeva.

U tom izomorfizmu je $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$ koji su redom jedinični vektori osa x, y i z Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema.



Slika 1: Vektor položaja tačke A

Definicija 0.1 *Svakoj tački A prostora $\mathbb{R}^3$ odgovara uređena trojka realnih brojeva (x, y, z). Tu tačku zapisujemo sa $A(x, y, z)$. Ako je O koordinatni*

početak tada vektor $\overrightarrow{OA}$ *zovemo* **vektor položaja tačke** A *i označavamo sa*

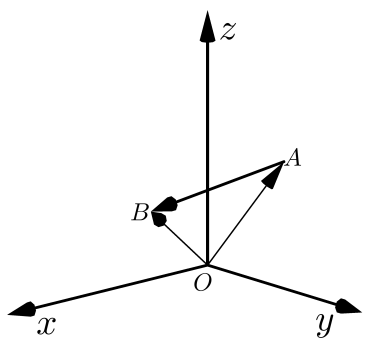
$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Primetimo sa slike da je:

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Vektor koji spaja dve tačke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ dobija se oduzimanjem vektora položaja tačke B od vektora položaja tačke A, tj.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$



Slika 2: Vektor u prostoru

Teorema 0.2 *Rastojanje između dve tačke* $A(x_1, y_1, z_1)$ *i* $B(x_2, y_2, z_2)$ *određeno je sa intezitetom vektora* $|\overrightarrow{AB}|$*:*

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \sqrt{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)(\vec{r}_B - \vec{r}_A)} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Zbog izomorfizma prostora slobodnih vektora i uređenih trojki sledi:
1) Sabiranje uređenih trojki:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3).$$

2) Množenje broja λ sa uređenom trojkom

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3).$$

U narednoj teoremi prikazujemo **deobu duži u datoj razmeri**.

Teorema 0.3 *Ako je T tačka koja deli duž AB u razmeri $\alpha : 1$, tj. $\frac{|\overrightarrow{AT}|}{|\overrightarrow{TB}|} = \frac{\alpha}{1}$ odnosno $\overrightarrow{AT} = \alpha\overrightarrow{TB}$, tada je vektor položaja tačke T:*

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B}{1+\alpha}.$$

Dokaz: Kako je

$$\overrightarrow{AT} = \alpha\overrightarrow{TB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_T - \vec{r}_A = \alpha(\vec{r}_B - \vec{r}_T) \Leftrightarrow \vec{r}_T(1+\alpha) = \vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_T = \frac{\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B}{1+\alpha}.$$

Lema 0.4 *Jednačina $\vec{r}_T = \vec{r} = \frac{\vec{r}_A+\alpha\vec{r}_B}{1+\alpha}$ jeste jednačina prave određene tačkama A i B izuzev tačke B. To znači da kada α prolazi kroz ceo skup realnih brojeva bez -1 onda tačka T prolazi celom pravom određenom tačkama A i B izuzev tačke B.*

Dokaz: Ako je $\alpha = 0$ onda je $\vec{r}_T = \vec{r}_A$. Dokažimo kontradikcijom da je $\vec{r}_T \neq \vec{r}_B$ za svaki realni broj α. Iz jednakosti $\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_A+\alpha\vec{r}_B}{1+\alpha}$ za $\vec{r}_T = \vec{r}_B$ sledi:

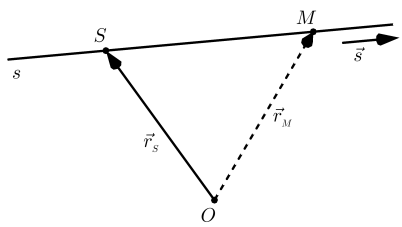
$$\vec{r}_B = \frac{\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B}{1+\alpha},$$

odatle dobijamo da je $\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B = \vec{r}_B + \alpha\vec{r}_B$ odnosno $\vec{r}_A = \vec{r}_B$ što je kontradikcija sa pretpostavkom.

0.2 Jednačina prave

Definicija 0.5 *Svaka* **prava** s *određena je sa jednom tačkom* S *koja joj pripada i nenula vektorom* $\vec{s}$ *koji je kolinearan sa pravom* s.

Sada izvodimo vektorski oblik jednačine prave.



Slika 3: Prava

Na pravoj s odaberemo proizvoljnu tačku koju označimo sa M. Vektor $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M = (x, y, z)$ zvaćemo **promenljivi vektor** čiji vrh uvek pripada pravoj s, a početak O je koordinatni početak.
Tačka $M \in s$ ako i samo ako je $\overrightarrow{SM} \parallel \vec{s}$.

$$\overrightarrow{SM} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = \lambda\vec{s} \Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_S = \lambda\vec{s}.$$

Kako je $\vec{r}_M$ promenljivi vektor dalje ga možemo samo označavati sa $\vec{r} = (x, y, z)$ tako da **jednačina prave u vektorskom obliku** je:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_S + \lambda\vec{s}.}$$

Jednačina $\vec{r} = \vec{r}_S + \lambda\vec{s}$ je jednačina prave kojoj pripada tačka $S(x_S, y_S, z_S)$ i paralelna je sa vektorom $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Iz vektorskog oblika jednačine prave $\vec{r} = \vec{r}_S + \lambda\vec{s}$, dobijamo **parametarski oblik jednačine prave**

$$\boxed{s:\ x = x_S + \lambda s_1 \quad \wedge \quad y = y_S + \lambda s_2 \quad \wedge \quad z = z_S + \lambda s_3.}$$

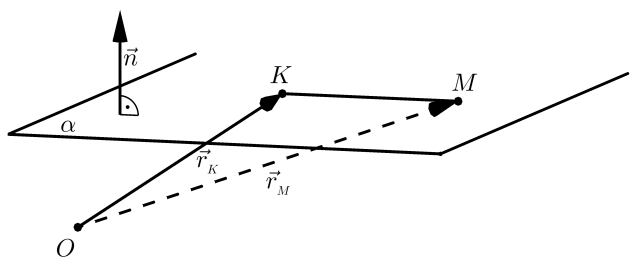
Kada iz parameterskog oblika jednačine prave iz svake jednačine izrazimo čemu je jednako λ dobijamo **kanonički oblik jednačine prave**:

$$\boxed{s:\ \lambda = \frac{x - x_S}{s_1} = \frac{y - y_S}{s_2} = \frac{z - z_S}{s_3}.}$$

0.3 Jednačina ravni

Definicija 0.6 *Svaka* **ravan** α *određena je sa jednom tačkom* $K(x_K, y_K, z_K)$ *koja pripada ravni* α *i vektorom* $\vec{n} \neq (0,0,0)$ *koji je normalan na ravan* α.

Izvedimo vektorski oblik jednačine ravni.



Slika 4: Ravan

Neka je M proizvoljnu tačka ravni α. Vektor $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M = (x, y, z)$ zvaćemo **promenljivi vektor** čiji vrh uvek pripada ravni α, a početak je u koordinatnom početku. Tačka M pripada ravni α ako i samo ako je $\overrightarrow{KM}$ normalno na $\vec{n} = (A, B, C) \neq (0,0,0)$, pa je:

$$\overrightarrow{KM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{KM}\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\vec{r}_M - \vec{r}_K)\vec{n} = 0.$$

Kako je $\vec{r}_M$ promenljivi vektor dalje ga možemo samo označavati sa $\vec{r} = (x, y, z)$ tako da **jednačina ravni u vektorskom obliku** je:

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_K)\vec{n} = 0 \quad \text{ili} \quad \vec{r}\vec{n} = \vec{r}_K\vec{n}.}$$

Iz vektorskog oblika jednačine ravni $(\vec{r} - \vec{r}_K)\vec{n}_\alpha = 0$, za $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ dobijamo **jednačinu ravni kroz tačku** $K(x_K, y_K, z_K)$:

$$\boxed{\alpha : A(x - x_K) + B(y - y_K) + C(z - z_K) = 0.}$$

Takođe iz vektorskog oblika jednačine ravni $\vec{r}\vec{n} = \vec{r}_K\vec{n}$, za $\vec{n} = (A, B, C)$ i $D = -\vec{r}_K\vec{n}$ dobijamo **opšti oblik jednačine ravni:**

$$\boxed{\alpha : \ Ax + By + Cz + D = 0.}$$

Izvedemo **parametarsku jednačinu ravni** u vektorskom obliku i **parametarsku jednačinu ravni** u skalarnom obliku.

Teorema 0.7 *Ravan α je određena tačkom $K(x_K, y_K, z_K)$ koja pripada ravni α i sa nekolinearnim vektorima $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ koji su paralelani sa ravni α.* **Parametarska jednačina ravni** *u vektorskom obliku je:*

$$\alpha : \vec{r} = \vec{r}_K + \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}.$$

Dokaz: Proizvoljna tačka $M(x, y, z)$ će pripadati ravni α akko su vektori $\overrightarrow{KM}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni, tj. leže u istoj ravni. Odatle je:

$$\overrightarrow{KM} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b},$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Pa je $\vec{r}_M - \vec{r}_K = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}$. Kako je $\vec{r}_M$ promenljivi vektor označavaćemo sa $\vec{r} = \vec{r}_M$, pa je:

$$\alpha : \vec{r} = \vec{r}_K + \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b},$$

parametarska jednačina ravni u vektorskom obliku.

Iz ove parametarske jednačina ravni u vektorskom obliku dobija se ekvivalentni sistem u skalarnom obliku:

$$x = x_K + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \quad y = y_K + \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2, \quad z = z_K + \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ parametri. Ove jednačine zovemo **parametarske jednačine ravni u skalarnom obliku.**

Evo još nekih oblika jednačine ravni:

Teorema 0.8 *Ako su brojevi A, B, C i D različiti od nule, tada iz opšteg oblika jednačine ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ dobijamo* **segmentni oblik jednačine ravni**

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1.$$

Brojevi u imeniocima ove jednačine $\frac{-D}{A}$, $\frac{-D}{B}$ i $\frac{-D}{C}$ predstavljaju redom odsečke te ravni na osama x, y i z.

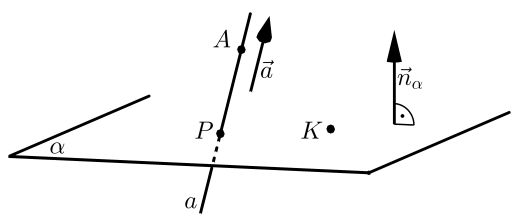
0.4 Prodora prave kroz ravan

U sledećoj teoremi je dato kako se računa tačka prodora prave kroz ravan.

Teorema 0.9 *Prodor prave* $a : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\vec{a}$ *određene tačkom* A *i vektorom pravca* $\vec{a}$*, kroz ravan* $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_K$*, određene tačkom* K *i vektorom normale* $\vec{n}$ *je tačka* P *koja je određena sa svojim vektorom položaja:*

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_K - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}.$$

Tačka P je **tačka prodora prave** a **kroz ravan** α



Slika 5: Prodor prave a kroz ravan α

Dokaz: Jednačina ravni α i jednačina prave a čine sistem jednačina gde su nepoznate vektor $\vec{r}$ i promenljiva $t \in \mathbb{R}$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo $\vec{r} = \vec{r}_P$ (tj. tačku prodora P) tako što se $a : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\vec{a}$ zameni u $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_K$ i reši dobijena jednačina po λ. Odatle dobijamo jednakost $\vec{n}(\vec{r}_A + \lambda\vec{a}) = \vec{n}\vec{r}_K$ iz koje izrazimo parametar $\lambda = \frac{(\vec{r}_K - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}$. Tako dobijeno λ uvrstimo nazad u jednačinu prave i dobijamo traženi vektor

$$\vec{r} = \vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_K - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}.$$

Kako je $\vec{r} = \vec{r}_P$ rešenje toga sistema to znači da $\vec{r}_P$ zadovoljava i jednačinu ravni i jednačinu prave tj. tačka P pripada i ravni α i pravoj a, odnosno tačka P je prodor prave a kroz ravan α.

Prema tome prodorna tačka prave p **kroz ravan** α **je:**

$$\vec{r}_{tac.prod.} = \vec{r}_{tac.prav.} + \frac{(\vec{r}_{tac.rav.} - \vec{r}_{tac.prav.})\vec{n}}{\vec{p}\vec{n}}\vec{p}.$$

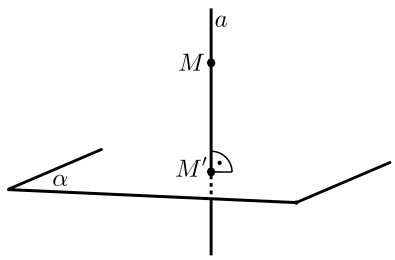
Legenda:
1) tac.prod. - Tačka prodora prave p kroz ravan α.
2) tac.prav. - Proizvoljna tačka prave p.
3) tac.rav. - Proizvoljna tačka ravni α.
4) $\vec{n}$ - Proizvoljan vektor koji je normalan na ravan α.
5) $\vec{p}$ - Proizvoljan vektor koji je paralelan sa pravom p.

Drugi način: Neka je data prava $a : \frac{x-x_A}{a_1} = \frac{y-y_A}{a_2} = \frac{z-z_A}{a_3} = \lambda$ i neka je data ravan $\alpha : \ Ax + By + Cz + D = 0$. Nađimo prodor prave a kroz ravan α. Iz jednačine prave izrazimo x, y i z u zavisnosti od λ, pa se onda ti izrazi za x, y i z uvrste u $Ax + By + Cz + D = 0$ i dobije se jedna jednačina sa jednom nepoznatom po λ. Zatim se tako dobijeno λ uvrsti u $x = x_A + a_1\lambda, \ y = y_A + a_2\lambda, \ z = z_A + a_3\lambda$ i dobijaju se koordinate x, y i z prodorne tačke. Ako jednačina po nepoznatoj λ bude protivurečna, to će značiti da je prava paralelna sa ravni i nema zajedničkih tačaka sa ravni, a ako jednačina po λ bude neodređena, onda će to značiti da prava pripada ravni.
Napomena: Ova Teorema 0.9 je veoma bitna jer iz nje proizilaze kose i ortogonalne (normalne) projekcije i na pravu i na ravan.

0.5 Normalna projekcija tačke na ravan

Teorema 0.10 *Data je ravan* $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_K$ *određena tačkom* K *i vektorom normale* $\vec{n}$. **Normalna (ortogonalna) projekcija tačke** M **na ravan** α **je***:*

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_K - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\,\vec{n}.$$



Slika 6: Normalna projekcija tačke M na ravan α

Dokaz: Ideja je da postavimo pravu a koja je normalna na ravan α i sadrži tačku M. Jednačina tako konstruisane prave je $a : \vec{r} = \vec{r}_M + \lambda\vec{n}$. Tražena tačka M' je tačka prodora prave a kroz ravni α. Vektor položaja tačke prodora $\vec{r} = \vec{r}_M'$ dobija se rešavanjem sistema tako što se $a : \vec{r} = \vec{r}_M + \lambda\vec{n}$ zameni u $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_K$ i reši dobijena jednačina po λ. Zatim tu vrednost $\lambda = \frac{(\vec{r}_K - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}$ vratimo u jednačinu $a : \vec{r} = \vec{r}_M + \lambda\vec{n}$ i dobijamo

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_K - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}.$$

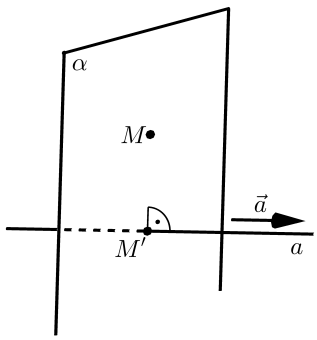
Ako ravan prolazi kroz koordinatni početak, tada se za $\vec{r}_K$ može uzeti vektor $(0, 0, 0)$ pa prethodna formula glasi:

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M - \frac{\vec{r}_M\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\,\vec{n}.$$

0.6 Normalna projekcija tačke na pravu

Teorema 0.11 *Data je prava* $a : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\vec{a}$ *određena tačkom* A *i vektorom pravca* $\vec{a}$. **Normalna (ortogonalna) projekcija tačke** M **na pravu** a **je***:*

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\,\vec{a}.$$



Slika 7: Normalna projekcija tačke M na pravu a

Dokaz: Prvo treba da konstruišemo ravan α koja sadrži tačku M i normalna je na pravu a. Jednačina tako konstruisane ravni je $\alpha : \vec{a}\vec{r} = \vec{a}\vec{r}_M$. Tražena tačka M' je tačka prodora prave a kroz ravan α. Vektor položaja tačke prodora $\vec{r} = \vec{r}_M$ dobija se rešavanjem sistema tako što se $a : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\vec{a}$ zameni u $\alpha : \vec{a}\vec{r} = \vec{a}\vec{r}_M$ i reši dobijena jednačina po λ. Zatim tu vrednost $\lambda = \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}$ vratimo u jednačinu $a : \vec{r} = \vec{r}_M + \lambda\vec{n}$ i dobijamo

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}.$$

0.7 Zajednička normala dve prave

Definicija 0.12 *Zajednička normala* n *pravih* a *i* b *jeste prava koja seče prave* a *i* b *i normalna je na prave* a *i* b.

Teorema 0.13 *Jednačina prave koja predstavlja zajedničku normalu neparalelnih pravih (mimoilaznih pravih ili pravih koje se seku) je:*

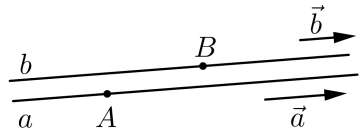
$$n : \vec{r} = \vec{r}_N + \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Dokaz: Neka je n zajednička normala neparalelnih pravih $a : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\vec{a}$ i $b : \vec{r} = \vec{r}_B + \lambda\vec{b}$. Kako je svaka prava definisana sa jednom tačkom koja joj pripada i vektorom pravca da bismo dobili traženu pravu $n : \vec{r} = \vec{r}_N + \lambda\vec{n}$ treba da nađemo $\vec{r}_N$ i $\vec{n}$. Vektor pravca prave n je normalan i na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{b}$ tako da je $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$. Treba još da se nađe jedna tačka N prave n. Konstruišemo ravni α i β tako da je $a \subset \alpha \wedge \alpha \| b$ i $b \subset \beta \wedge \beta \perp \alpha$. Prodor prave a kroz ravan β je tačka N koja pripada pravoj n, tj. $\{N\} = a \cap \beta$ Sada konstruišemo pravu n koja sadrži tačku N i vektor pravca prave n je kolinaran sa vektorom $\vec{a} \times \vec{b}$.

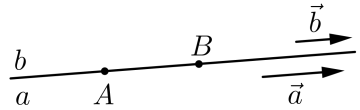
$$n : \vec{r} = \vec{r}_N + \lambda\vec{n} = \vec{r}_N + \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

0.8 Međusobni odnos pravih i ravni

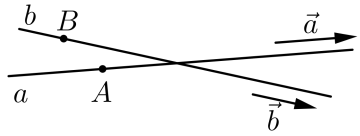
Teorema 0.14 Međusobni odnos dve prave: *Prava $a : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda_1\vec{a}$ (zadata je tačkom $A(x_1, y_1, z_1)$ i vektorom pravca $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$) i prave $b : \vec{r} = \vec{r}_B + \lambda_2\vec{b}$ (zadata je tačkom $B(x_2, y_2, z_2)$ i vektorom pravca $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$) može biti:*
1) *Paralelane i ne poklapaju se ako i samo ako je $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ i $A \notin b$.*



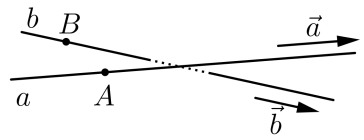
2) *Poklapaju se ako i samo ako je $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ i $A \in b$.*



3) *Seku se ako i samo ako je $\overrightarrow{AB}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.*



4) *Mimoilaze se se ako i samo ako je* $\overrightarrow{AB}(\vec{a} \times \vec{b}) \neq 0$.



Ugao između dve prave po definiciji je uvek oštar ugao, tj. od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Za prave a i b, oštar ugao ϕ između njih je $\phi = \arccos \frac{|\vec{a}\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Napomena: Ako je sistem koji čine jednačine pravih a i b određen, tada postoje jedinstveni brojevi λ_1 i λ_2 i jedinstvena presečna tačka S pravih a i b, tj. prave se seku. Ako je sistem kontradiktoran one su paralelane ili se mimoilaze, ako je sistem neodređen one se poklapaju.

Rešenje sistema može se dobiti tako što se iz jednačina pravih

$$a : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} = t, \; b : \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3} = s$$

izrazi x iz jednačine prave a u zavisnosti od t i x iz jednačine prave b u zavisnosti od s, pa se dobijeni izrazi izjednače, što daje jednu linearnu jednačinu sa dve nepoznate po t i s. Analogno se uradi i sa y i sa z, pa se dobiju tri linearne jednačine sa dve nepoznate t i s. Ako je sistem kontradiktoran, onda ne postoji zajednička tačka pravih, a ako je sistem neodređen, prave se poklapaju; ako je sistem određen, odnosno postoji samo jedno rešenje, onda se prave seku.

Teorema 0.15 Međusobni odnos prave

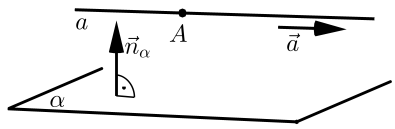
$$a : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\vec{a} \;\; tj. \;\; a : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

i ravni

$$\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_K, \;\; tj. \;\; Ax + By + Cz + D = 0$$

može biti:

1) *Paralelane i* $a \nsubseteq \alpha$ *ako i samo ako je* $\vec{n}\vec{a} = 0$ *i* $A \notin \alpha$.



2) *Poklapaju se ako i samo ako je* $\vec{n}\vec{a} = 0$ *i* $A \in \alpha$.
3) *Seku se ako i samo ako je* $\vec{n}\vec{a} \neq 0$.

Teorema 0.16 Međusobni odnos dve ravni

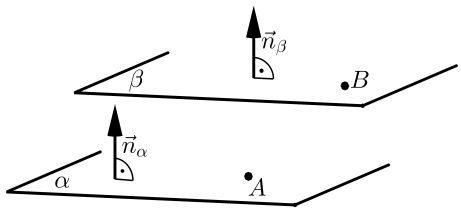
$$\alpha : \vec{n}_\alpha \vec{r} = \vec{n}_\alpha \vec{r}_A, \quad tj. \;\; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

i

$$\beta : \vec{n}_\beta \vec{r} = \vec{n}_\beta \vec{r}_B, \quad tj. \;\; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

može biti:

1) *Paralelane i ne poklapaju se ako i samo ako je* $\vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta$ *i* $B \notin \alpha$



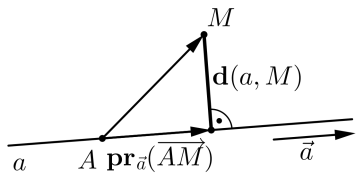
2) *Poklapaju se ako i samo ako je* $\vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta$ *i* $B \in \alpha$
3) *Seku se ako i samo ako je* $\vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$

Ugao između dve ravni po definiciji je uvek oštar ugao, tj. od 0 do $\frac{\pi}{2}$ i on je jednak uglu između pravaca njihovih vektora normala. Za ravni α i β oštar ugao ϕ je $\phi = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}$.

0.9 Rastojanje tačke od prave i ravni

Teorema 0.17 Rastojanje tačke od prave
Rastojanje tačke M od prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\vec{a}$ označava se sa $\mathbf{d}(a, M)$ i iznosi:

$$\mathbf{d}(a, M) = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{AM}|}{|\vec{a}|} = |\overrightarrow{AM} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\overrightarrow{AM}|.$$



Slika 8: Rastojanje tačke M od prave a

Dokaz: Neka je $A(x, y, z)$ proizvoljna tačka prave a, tada iz formule za površinu paralelograma $P = |\vec{a}||\vec{h}|$ dobijamo da je $|\vec{h}| = \frac{P}{|\vec{a}|} = \mathbf{d}(a, M)$ što je traženo rastojanje. Primetimo da ovo važi za bilo koji odabir tačke A sa prave a. Sa slike zaključujemo da su stranice paralelograma $|\overrightarrow{AM}|$ i $|\vec{a}|$ pa je:

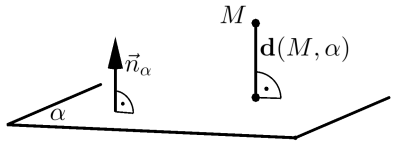
$$\mathbf{d}(a, M) = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{AM}|}{|\vec{a}|} = |\overrightarrow{AM} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\overrightarrow{AM}|.$$

Znači rastojanje $\boldsymbol{d}(a, M)$ između prave a i tačke M jednako je visini paralelograma čija je jedna stranica je $|\vec{a}|$, a druga $|\overrightarrow{MA}|$.

Teorema 0.18 Rastojanje tačke od ravni
Rastojanje tačke $M(x_1, y_1, z_1)$ od ravni $\alpha :\ Ax + By + Cz + D = 0$ označava se sa $\mathbf{d}(M, \alpha)$ i iznosi

$$\boldsymbol{d}(M, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dokaz: Neka je $K(x, y, z)$ proizvoljna tačka ravni α, tada projekcija vektora $\overrightarrow{KM}$ na vektor normale ravni α koji označimo sa $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ je jednaka



Slika 9: Rastojanje tačke M od ravni α

rastojanju tačke M od ravni α. Primetimo da ovo važi za bilo koji odabir tačke K iz ravni α. Sa slike zaključujemo da je:

$$\boldsymbol{d}(M,\alpha) = |\mathbf{pr}_{\vec{n}}\overrightarrow{KM}| = \frac{|\overrightarrow{KM}\vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Dalje primenom osobina skalarnog proizvoda dobijamo:

$$\frac{|(x_1-x, y_1-y, z_1-z)(A,B,C)|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-Ax-By-Cz|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Zadaci

1. Odrediti temena A i B jednakostraničnog trougla ABO, gde tačke A i B pripadaju pravoj $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i $O(0,0,0) \notin p$.

Rešenje: Neka je S projekcija koordinatnog početka $O(0,0,0)$ na pravu p. Tada su $\vec{r}_S = \vec{r}_P + \frac{((0,0,0)-\vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p} = \vec{r}_P - \frac{\vec{r}_P\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$ i $\vec{r}_{A,B} = \vec{r}_S \pm \frac{|\vec{r}_S|}{\sqrt{3}}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$.

2. Odrediti $\vec{r}_C$ zavisno od $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$, tako da trougao ABC bude jednakostraničan i da tačke $OABC$ budu komplanarne, gde je $O(0,0,0)$.

Rešenje: $\vec{r}_C = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$, gde je $\vec{d} = (\vec{r}_A \times \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AB}$.

3. Odrediti $\vec{r}_C$ i $\vec{r}_D$ zavisno od $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$, tako da ravan kvadrata $ABCD$ sadrži $O(0,0,0)$.

Rešenje:

Za $\vec{d} = (\vec{r}_A \times \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AB}$ sledi $\vec{r}_C = \vec{r}_B \pm |\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$ i $\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{r}_C - \vec{r}_B$.

4. Neka je ravan α definisana sa $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ a tačke A i C određene svojim vektorima položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_C$, tako da je $\overrightarrow{AC} \nparallel \vec{n}$. U zavisnosti od vektora $\vec{n}, \vec{r}_Q, \vec{r}_A$ i $\vec{r}_C$ izraziti vektore položaja tačaka B i D temena kvadrata $ABCD$, gde je AC njegova dijagonala i ravan kvadrata $ABCD$ normalna na ravan α.

Rešenje: Neka je β ravan kvadrata $ABCD$, tj. normalna na α i prolazi kroz AC. Tada vektor normale ravni β iznosi $\vec{n}_\beta = \overrightarrow{AC} \times \vec{n}$ i vektor paralelan sa BD je $\vec{d} = \overrightarrow{AC} \times (\overrightarrow{AC} \times \vec{n})$, pa je

$$\vec{r}_{B,D} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) \pm \frac{1}{2}|\vec{r}_A - \vec{r}_C|\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}.$$

5. Neka ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ nije normalna na z-osu i neka je tačka $A \notin \alpha$ određena sa $\vec{r}_A$. U zavisnosti od $\vec{r}_Q, \vec{r}_A, \vec{n}$ izraziti $\vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$ tako da je $ABCD$ kvadrat, $AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$ i BC paralelno sa xOy ravni.

Rešenje

$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$, $\vec{r}_C = \vec{r}_B \pm |\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{n}\times\vec{k}}{|\vec{n}\times\vec{k}|}$, gde je $\vec{k} = (0,0,1)$.

6. Neka tačka V određena vektorom položaja $\vec{r}_V$ ne pripada pravoj $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$. U zavisnosti od $\vec{r}_V$, $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ naći vektore položaja $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ i $\vec{r}_D$ temena prave pravilne četvorostrane piramide $VABCD$, ako temena A i C pripadaju pravoj p i dijagonala AC osnove $ABCD$ jednaka je visini piramide.

Rešenje Neka je tačka T projekcija tačke V na pravu p. Tada je

$$\vec{r}_T = \vec{r}_P + \frac{\overrightarrow{PV}\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}, \qquad \vec{r}_{A,C} = \vec{r}_T \pm \frac{1}{2}|\overrightarrow{TV}|\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \qquad \vec{r}_{B,D} = \vec{r}_T \pm \frac{1}{2}|\overrightarrow{TV}|\frac{\overrightarrow{TV}\times\vec{p}}{|\overrightarrow{TV}\times\vec{p}|}.$$