0.1 Karakteristični koreni i vektori

Karakteristični koreni imaju značajnu primenu u mnogim oblastima kao što su: inženjerstvo, telekomunikacije, analiza vibracija, mehanika fluida, obrada slike, ekologija, biomedicina itd.

U ovom poglavlju ćemo raditi i sa matricama čiji elementi mogu biti i kompleksni brojevi.

Definicija 0.1 *Neka je A kompleksna kvadratna matrica reda n. Skalar λ je* **karakteristični koren** *(vrednost) matrice A ako i samo ako postoji vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, takav da važi*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{1}$$

Vektor $\mathbf{x}$ tada je **karakteristični vektor** *matrice A za karakteristični koren (karakterističnu vrednost) λ.*

Jednačina (1) može se zapisati kao

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \quad \textit{ili} \quad (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0, \tag{2}$$

gde je I jedinična matrica formata $n \times n$. Ova jednačina (2) ima rešenje različito od nule ako i samo ako je determinanta matrice $(\lambda I - A)$ jednaka nuli, tj.

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{3}$$

Ova jednačina (3) zove se **karakteristična jednačina**. Leva strana ove jednačine je polinomska funkcija koja se zove **karakteristični polinom** od matrice A koji označavamo sa $p_A(\lambda)$. Sledi definicija karakterističnog polinoma i karakteristične jednačine.

Definicija 0.2 *Neka je A kompleksna kvadratna matrica reda n. Odgovarajuća karakteristična matrica je $\lambda I - A$, a karakteristični polinom matrice A po λ je $\det(\lambda I - A)$, dok je $\det(\lambda I - A) = 0$ karakteristična jednačina matrice A.*

Teorema 0.3 *Karakteristični koreni (vrednosti) matrice jesu nule odnosno koreni njenog karakterističnog polinoma.*

Drugim rečima $\lambda \in \mathbb{C}$ je karakteristični koren od matrice $A = [a_{ij}]_{nn} \in \mathbb{C}$ ako i samo ako je $p_A(\lambda) = 0$. Primetimo da čak ako je matrica A realna matrica tj. $A = [a_{ij}]_{nn} \in \mathbb{R}$, karakteristični koreni mogu biti kompleksni brojevi.

Primer 0.4 *Izračunati karakteristične korene i njima odgovarajuće karakteristične vektore matrice* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Rešenje: Po prethodnoj definiciji karakterističnih korena je

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Prebacivanjem $\lambda\mathbf{x}$ na levu stranu jednakosti dobijamo:

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 2 & (\lambda-1) & -2 \\ -2 & 0 & (\lambda+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr} \lambda x & +y & = 0 \\ 2x & +(\lambda-1)y & -2z = 0 \\ -2x & & +(\lambda+1)z = 0 \end{array}.$$

Da bismo našli karakteristične korene sistema linearnih jednačina po Definiciji 0.1 treba da nađemo nenula vektor tj. $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ koji je rešenje ovoga sistema. Kako je sistem linearnih jednačina homogen determinanta sistema mora da bude jednaka nuli da bi sistem imao i netrivijalna rešenja (tj. rešenja koja su različita od trivijalnog $(0, 0, 0)$).

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 2 & (\lambda-1) & -2 \\ -2 & 0 & (\lambda+1) \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$$

Koreni karakterističnog polinoma $p_A(\lambda)$ matrice A su: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = -2$.

Sada treba da nađemo karakteristične vektore za karakteristični koren 1 koji je višestrukosti 2 i za karakteristični koren -2 koji je višestrukosti 1.

Uvrštavanjem $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ u $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ dobijamo $(I - A)\mathbf{x} = 0$ tj.

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & & = 0 \\ 2x & & -2z & = 0 \\ -2x & & +2z & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} x & +y & & = 0 \\ 2x & & -2z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = -x \\ z \ = x. \end{array}$$

Skup karakterističnih vektora koji odgovaraju karakterističnom korenu 1 je $V_1 = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\} = \{\alpha(1, -1, 1) | \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$.

Uvrštavanjem $\lambda_3 = -2$ u $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ dobijamo $(-2I - A)\mathbf{x} = 0$ tj.

$$\begin{array}{rrrl} -2x & +y & & = 0 \\ 2x & -3y & -2z & = 0 \\ -2x & & -z & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} -2x & +y & & = 0 \\ & -2y & -2z & = 0 \\ & -y & -z & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} -2x & +y & & = 0 \\ & y & +z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}.$$

Odavde dobijamo da je $y = 2x$ i $z = -2x$. Skup karakterističnih vektora koji odgovaraju karakterističnom korenu -2 je $V_{-2} = \{(\alpha, 2\alpha, -2\alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\} = \{\alpha(1, 2, -2) | \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$.

Primer 0.5 *Odrediti karakteristične korene i vektore sledećih matrica:*

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, *b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

a) Kako je $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 18 + 2$
$= \lambda^2 - 9\lambda + 20 = (\lambda - 4)(\lambda - 5)$,
karakteristični koreni matrice A su $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 5$.
Za $\lambda_1 = 4$ dobija se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

dobija se

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Dobijeni sistem je neodređen sa rešenjima $x = y = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$. Kako su karakteristični vektori različiti od nula vektora, sledi da su karakteristični vektori matrice A koji odgovaraju karakterističnom korenu $\lambda_1 = 4$ oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Za $\lambda_2 = 5$ dobija se

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešavanjem dobijenog neodređenog sistema jednačina sledi da je $y = 2x = 2\alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$, tj. karakteristični vektori matrice A su oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

b) Kako je $|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 2 & \lambda - 5 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda - 5 \\ -1 & 2 \end{matrix}$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 4) - 8 - 2(\lambda - 5)$

$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 9\lambda + 20) - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 9\lambda + 20 - 2)$

$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 6)$,

karakteristični koreni matrice A su $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ i $\lambda_3 = 6$.

Za $\lambda_1 = 1$ dobija se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ 2x - 4y \\ -x + 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešavanjem dobijenog neodređenog sistema jednačina sledi da je $z = 0,\ y = \alpha,\ x = 2\alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$, tj. karakteristični vektori matrice A su oblika $\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Za $\lambda_2 = 3$ dobija se

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 2z \\ 2x - 2y \\ -x + 2y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešavanjem dobijenog neodređenog sistema jednačina sledi da je $x = y = z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$, tj. karakteristični vektori matrice A su oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Za $\lambda_3 = 6$ dobija se

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - 2z \\ 2x + y \\ -x + 2y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešavanjem dobijenog neodređenog sistema jednačina sledi da je $x = \alpha,\ y = -2\alpha,\ z = \frac{5}{2}\alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$, tj. karakteristični vektori matrice A su oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Definicija 0.6 *Skup svih karakterističnih korena kompleksne matrice A_{nn} nazivamo* **spektar matrice** *i označavamo ga sa $\sigma(A)$, to jest,*

$$\sigma(A) := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : det(\lambda I - A) = 0\Big\}.$$

Definicija 0.7 *Spektralni radijus $\rho(A)$ za matricu $A = [a_{ij}]_{nn} \in \mathbb{C}$ definisan je sa:*

$$\rho(A) := \Big\{\max|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\Big\}. \tag{4}$$

Neke od osobina karakterističnih korena:

- Matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ formata $n \times n$ ima tačno n karakterističnih korena.
- Karakteristični koreni dijagonalne matrice su dijagonalni elementi.
- Ako je matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ takva da je n neparni broj onda postoji bar jedan realni karakteristični koren matrice A.
- Matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ je regularna ako i samo ako je svaki karakteristični koren matrice A različit od nule.
- Determinanta matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ je jednaka proizvodu karakterističnih korena matrice A, tj. $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_i$
- Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristični koreni matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ onda su $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ karakteristični koreni matrice A^k gde je $k \in \mathbb{N}$.
- Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristični koreni regularne matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ onda su $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ karakteristični koreni matrice A^{-1}.

0.2 Lokalizacija karakterističnih korena

Kada nismo u mogućnosti da nađemo konkretne vrednosti karakterističnih korena možemo konstruisati lokalizacione oblasti koje će sadržati sve karakteristične korene.

Postoje brojni načini za lokalizaciju karakterističnih korena. Jedan od rezultata je da se spektar matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ nalazi u skupu koji predstavlja uniju krugova sa centrima u dijagonalnim elementima matrice i poluprečnicima koji su jednaki sumi modula vandijagonalnih elemenata odgovarajuće vrste matrice. Ovaj rezultat Geršgorinove teoreme iz 1931. godine, smatra se jednim od najelegantnijih načina za lokalizaciju karakterističnih korena. Uvodimo oznake:

$$r_i = -|a_{ii}| + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|,$$

gde je $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Znači r_i predstavlja sumu modula (apsolutnih vrednosti) svih elemenata i-te vrste matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, izuzev elementa na glavnoj dijagonali, r_i se naziva poluprečnik i-tog Geršgorinovog kruga , čiji je centar u a_{ii}.

Definicija 0.8 *Za proizvoljnu matricu* $A = [a_{ij}]_{nn} \in \mathbb{C}$ *,* i**-ti Geršgorin krug** *dat je sa:*

$$\Gamma_i(A) := \Big\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a_{i,i}| \leq r_i(A) \Big\}, \;\; i \in N,$$

a **Geršgorinov skup** *matrice* A *je unija svih Geršgorinovih krugova*

$$\Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A).$$

Teorema 0.9 (Geršgorinova teorema) *Za svaku matricu* $A = [a_{ij}]_{nn} \in \mathbb{C}$ *i svaki karakterističan koren* $\lambda \in \sigma(A)$ *postoji indeks* $k \in N$ *takav da je*

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq r_k(A). \tag{5}$$

Stoga je $\lambda \in \Gamma_k(A)$*, odakle sledi da je* $\lambda \in \Gamma(A)$*. Kako ovo važi za svaki karakterističan koren* λ*, važi:*

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A). \tag{6}$$

Definicija 0.10 *Kompleksna matrica* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *naziva se strogo dijagonalno dominantna* (SDD) *ako važi*

$$|a_{i,i}| > r_i(A) \quad \text{za svako } i \in N. \tag{7}$$

Geršgorinova teorema ima veliki broj korisnih generalizacija. Lepota Geršgorinove Teoreme 0.9 leži u činjenici da je ona ekvivalentna sa teoremom o regularnosti strogo dijagonalno dominantnih SDD matrica.

Teorema 0.11 *Svaka kompleksna matrica* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *koja je* SDD*-matrica je regularna.*

Teorema 0.12 (druga Geršgorinova teorema) *Ako za kompleksnu matricu* $A = [a_{ij}]_{nn}$*,* $n \geq 2$ *i skup indeksa* $0 \neq S \subsetneq N$*, važi*

$$\Gamma_S(A) \bigcap \Gamma_{\overline{S}}(A) = \emptyset, \tag{8}$$

tada $\Gamma_S(A)$ *sadrži tačno* $|S|$ *karakterističnih korena matrice* A *i, shodno tome,* $\Gamma_{\overline{S}}(A)$ *sadrži preostale karakteristične korene matrice* A*.*