MATRICE I DETERMINANTE

0.1 Definicija matrice

U ovom poglavlju ćemo se upoznati sa matricama i njenim osobinama. Matrica formata mn (tj. $m \times n$) je pravougaona šema elemenata (brojeva) nekoga polja F, ili uređena mn-torka elemenata nekoga polja. Matrice se označavaju velikim štampanim slovima.

Navodim nekoliko različitih načina zapisa matrice:

$$A_{mn} = A_{m,n} = [a_{ij}]_{mn} = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Indeks i nam označava broj vrsta $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, a indeks j broj kolona $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ u matrici. Veoma je bitno da precizno bude zadat broj vrsta i broj kolona matrice da ne bi dolazilo do zabune.

Ako posmatramo na primer matricu formata 3×2 i matricu formata 2×3 one imaju isti broj elemenata (broj elemenata ovih matrica je 6) ali su to dve različite matrice.

Matrica A_{23} je matrica koja ima dve vrste i tri kolone, a matrica B_{32} tri vrste i dve kolone

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 14 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{32} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Elemenat a_{ij} matrice $[a_{ij}]_{mn}$ je element koji je se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice, a elemenat a_{ji} matrice $[a_{ij}]_{mn}$ je element koji se nalazi u j-toj vrsti i i-toj koloni matrice. Iz prethodnih primera $a_{12} = -3$, $a_{21} = -1$, $b_{21} = 0$ i $b_{12} = 2$.

Kroz ovaj primer možemo videti još jedan način predstavljanja matrice $(i,j) \to A(i,j)$ gde parametar i je indeks od vrste, a parametar j je indeks od kolone. Neka je $A(1,1) = 2$, $A(1,2) = -3$, $A(1,3) = 4$, $A(2,1) = -1$, $A(2,2) = 14$ i $A(2,3) = 0$ tada matrica može da se zapiše na sledeće načine:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 14 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 14 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \big\{\big((1,1),2\big),\ \big((1,2),-3\big),\ \big((1,3),4\big),\ \big((2,1),-1\big),\ \big((2,2),14\big),\ \big((2,3),0\big)\big\}.$$

Za matricu $A_{mn} = [a_{i,j}]_{mn}$

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \mathbf{a_{mj}} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

elementi $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ matrice $[a_{ij}]_{mn}$, zovemo **elementima i-te vrste**, a elementi $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ matrice $[a_{ij}]_{mn}$ zovemo **elementima j-te kolone**. Tako da sada možemo da zaključimo da za matricu A_{mn} parametar i uzima vrednosti od 1 do m, a parametar j od 1 do n. Znači indeks i nam govori u kojoj se nalazimo vrsti $i \in \{1, \dots, m\}$, a indeks j u kojoj koloni $j \in \{1, \dots, n\}$.

Matrice su jednake ako i samo ako su istog formata i ako su im svi elementi na odgovarajućim pozicijama jednaki.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & b \\ a & -4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & b \\ a & -4 \\ -3 & \sqrt{16} \end{bmatrix}$$

Definicija 0.1 *Matrica formata $m \times n$ čiji elementi su iz skupa S je funkcija $f : m \times n \to S$ gde je $m \times n = \{(i,j) | 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$. Skup svih takvih funkcija f, tj. matrica tipa $m \times n$ označavaćemo sa $\mathcal{M}_{mn}(S)$.*

U daljem radu koristićemo samo matrice čiji elementi su realni brojevi a_{ij}.

Tako da je $\mathcal{M}_{mn}$ skup svih matrica formata $m \times n$ u skup $\mathbb{R}$, gde je $\mathbb{R}$ polje realnih brojeva nad kojim su definisane te matrice.

Definicija 0.2 *Matrice koje imaju isti broj vrsta i kolona, zvaćemo* **kvadratne matrice** *reda n.*

$$A_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} .$$

Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ su **elementi glavne dijagonale** kvadratne matrice reda n.

Definicija 0.3 *Matrica formata $m \times n$ zove se* **nula matrica** $O_{mn} = [a_{ij}]_{mn}$ *ako i samo ako je $a_{i,j} = 0$ za svako $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Neki primeri nula matrica:

$$O_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{11} = [0].$$

Definicija 0.4 *Vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ ako i samo ako je $x_i > 0$ za svako $i \in \{1, 2, .., n\}$.*

Definicija 0.5 *Matrica $A_{mn} = [a_{ij}]_{mn} > 0$ akko je $a_{ij} > 0$ za svako $i \in \{1, 2, .., m\}$, $j \in \{1, 2, .., n\}$. Takve matrice zovu se* **pozitivne matrice**.

Definicija 0.6 *Kvadratna matrica $A_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$ čiji svi elementi van glavne dijagonale su jednaki nuli naziva se* **dijagonalna matrica**. *U literaturi se označavaju sa D.*

$$D_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 0.7 *Matrica $I = I_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$ je* **jedinična matrica** *ako i samo ako je*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

Dakle, matrica čiji elementi glavne dijagonale su jedinice, a ostali elementi nule, zove se **jedinična matrica.** Jediničnu matricu označavaćemo sa I, u nekim knjigama za jediničnu matricu koristi se oznaka i E. Jedinične matrice imaju isti broj vrsta i kolona, tj. one su kvadratne matrice. Neki primeri jediničnih matrica:

$$I_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad I_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 0.8 *Transposnovana matrica od matrice $A = [a_{ij}]_{mn}$ je matrica $B = [b_{ij}]_{nm}$ koja se dobija od matrice $A = [a_{ij}]_{mn}$ tako što vrste matrice $A = [a_{ij}]_{mn}$ su kolone matrice $B = [b_{ij}]_{nm}$ i piše se $B = A^\top$. Na drugi način, matrica $B = [b_{ij}]_{nm}$ je transponovana od matrice $A = [a_{ij}]_{mn}$ akko je $a_{ij} = b_{ji}$. Znači $B = A^\top \Leftrightarrow B^\top = A$ tj. $(A^\top)^\top = A$.*

Transponovana matrica $A^\top$ od neke matrice A se dobija kada odgovarajuće vrste i kolone zamene mesta.

Primer 0.9

$$\textit{Ako je} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \textit{tada je} \quad A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

$$\textit{Ako je} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \textit{tada je} \quad B^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\textit{Ako je} \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \textit{tada je} \quad C^\top = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Osobine transponovane matrice su prikazane u sledećoj teoremi.

Teorema 0.10 *Za matrice $A = [a_{ij}]_{mn}$ i $B = [b_{ij}]_{mn}$ važe sledeće osobine:*

1. $(A^\top)^\top = A$

2. $(kA)^\top = kA^\top$
3. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
4. $(AB)^\top = B^\top \cdot A^\top$
5. $(ABC)^\top = C^\top \cdot B^\top \cdot A^\top$
6. $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

Definicija 0.11 *Neka je A matrica. Izostavljanjem proizvoljnog broja vrsta i proizvoljnog broja kolona matrice A dobija se* **podmatrica** *A.*

Definicija 0.12 *Neka je $A = [a_{ij}]_{mn}$ matrica formata $m \times n$. Kvadratna podmatrica je matrica koja se dobija od matrice A_{mn} kada se izbaci $m-k$ vrsta i $n-k$ kolona, proizvoljnim izborom. Dobijena* **kvadratna podmatrica** *je formata $k \times k$.*

Primer 0.13 *Za datu matricu naći broj svih kvadratnih podmatrica matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 9 & -3 \end{bmatrix}_{34}$$

Podmatrica formata 3×3 ima $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$ i to su:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & -3 \end{bmatrix}.$$

Podmatrica formata 2×2 ima $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 18$ neke od njih su su:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \ldots.$$

Podmatrica formata 1×1 ima $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 12$ neke od njih su:

$$[\ 4\ ],\ [\ -1\ ],\ [\ 1\ ],\ [\ 2\ ],\ [\ 5\ ], \ldots.$$

Znači ukupan broj kvadratnih podmatrica u ovom primeru je:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 34.$$

Definicija 0.14 *Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ je* **simetrična** *ako su svi elementi simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu isti. Elementi glavne dijagonale su $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.*

Napomena: Kod simetričnih matrica važi da je $A^\top$=A.

Definicija 0.15 *Matrica koja je istovremeno transponovana i konjugovana označava se sa A^H ili A^* i zove se* **hermitovana matrica**.

Tako da ako je matrica A realna matrica onda je $A^\top = A^H$.

Definicija 0.16 Trag *kvadratne matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ označava se sa $tr(A)$ i on je jednak zbiru svih elemenata na glavnoj dijagonali, odnosno*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Teorema 0.17 *Za kvadratne matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ i $B = [b_{ij}]_{nn}$ važe sledeće osobine:*

1. $tr(A^\top) = trA$
2. $tr(k \cdot A) = k \cdot tr(A)$
3. $tr(A + B) = trA + trB$
4. $tr(A - B) = trA - trB$
5. $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

0.2 Operacije sa matricama

Definicija 0.18 *Zbir matrica $A = [a_{ij}]_{mn}$ i $B = [b_{ij}]_{mn}$ koje su istog formata, mn, definiše se sa:*

$$[a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}.$$

Matrice se mogu sabirati ako i samo ako su istog formata. Rezultujuća matrica je takođe istog formata kao i matrice koje se sabiraju. Elementi u rezultujućoj matrici se dobijaju tako što se sabiraju odgovarajući elementi na odgovarajućim pozicijama. Ako su matrice različitog formata one se ne mogu sabrati.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}.$$

Teorema 0.19 *Za matrice* $A = [a_{ij}]_{mn}$, $B = [b_{ij}]_{mn}$ *i* $C = [c_{ij}]_{mn}$ *važe sledeće osobine sabiranja matrica:*

1. $A + 0 = 0 + A = A$
2. $A - A = 0$
3. $A + B = B + A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0$
5. $(A + B) + C = A + (B + C)$

Definicija 0.20 *Množenje matrice* $A = [a_{ij}]_{mn}$ *sa skalarom (brojem)* α *definiše se sa:*

$$\alpha A = \alpha[a_{ij}]_{mn} = [\alpha a_{ij}]_{mn}.$$

Svaki element unutar matrice se pomnoži sa skalarom (brojem) α.

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{bmatrix}$$

Teorema 0.21 *Za matrice* $A = [a_{ij}]_{mn}$, $B = [b_{ij}]_{mn}$ *i* $C = [c_{ij}]_{mn}$ *i skalare* α *i* β *važe sledeće osobine množenja matrice skalarom:*

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha \cdot \beta)A = \beta(\alpha A)$
4. $I \cdot A = A \cdot I = A$

Definicija 0.22 *Proizvod matrica* $A = [a_{ij}]_{mk}$ *i* $B = [b_{ij}]_{kn}$ *definiše se sa:*

$$[a_{ij}]_{mk}[b_{ij}]_{kn} = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}]_{mn} = [c_{ij}]_{mn} \text{ gde je } c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj}.$$

Definicija 0.23 *Element matrice* AB *na mestu* (i, j) *dobija se kao skalarni proizvod* i*-te vektor vrste matrice* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *i* j*-te vektor kolone matrice* $B = [b_{ij}]_{nn}$, *tj.* $AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}]_{nn}$.

Matrice A_{mn} i B_{rs} se mogu pomnožiti samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B (tj. $n = r$), a rezultujuća matrica je formata ms. Svaki element unutar matrice dobija se po formuli

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Primer:

$$A_{32} \cdot B_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{32} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \mathbf{b_{13}} \\ b_{21} & b_{22} & \mathbf{b_{23}} \end{bmatrix}_{23} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & \mathbf{a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \end{bmatrix} = C_{33}$$

Element matrice C_{33} na poziciji $(2, 3)$ označava se sa c_{23} i dobija se kao skalarni proizvod vektora (a_{21}, a_{22}) i (b_{13}, b_{23}), tj. skalarni proizvod vektora koji se nalazi u drugoj vrsti matrice A i vektora koji se nalazi u trećoj koloni matrice B. Element $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}$. Analognim postupkom dobijamo sve ostale elemente matrice C.

U opštem slučaju za proizvod matrica $A_{mk}B_{kn}$ element c_{ij} na mestu (i, j) rezultujuće matrice C dobija se računanjem skalarnog proizvoda i-te vrste matrice A_{mk} i j-te kolone matrice B_{kn}, i to tako što se odgovarajući elementi posmatrane vrste i kolone množe i svi proizvodi saberu, odnosno $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$.

Komutativnost kod matrica ne važi:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Na ovom primeru vidimo da komutativnost kod matrica ne važi. Čak nisu ni istog formata.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Napomena: Za matricu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i jediničnu matricu $I_{n\times n}$ važi:

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Napomena: Matrice formata 1×1 identifikujemo sa skalarom, pa je:

$$\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \end{bmatrix}$$

Primetimo da u prethodne dve napomene, tj. u prethodna dva specijalna slučaja važi komutativnost.

Takođe možemo da pomnožimo sledeće dve matrice iako nisu odgovarajućeg formata, jer matricu formata 1×1 tretiramo kao skalar.

$$\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Znači matrice A i B mogu se pomnožiti samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B tj. $A_{mk}B_{kn} = C_{mn}$.

Teorema 0.24 *Za skalar α i matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $B = [b_{ij}]_{nn}$ i $C = [c_{ij}]_{nn}$, važe sledeće osobine:*

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5. $IA = AI = A$

Vektor $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ u matričnom obliku zapisuje se na sledeći način:

$$\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} = (x_1, x_2, x_3) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^\top.$$

Matricu $A = [a_{ij}]_{mn}$ možemo zapisati na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array}\right],$$

gde je $a_i \stackrel{def}{=} [a_{1i}\ a_{2i}\ \ldots\ a_{mi}]^T$ za $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Svaka matrica kolona a_i i svaka kolona matrice $[a_{ij}]_{mn}$ jesu vektor iz prostora $\mathbb{R}^m$, to jest uređena m-torka realnih brojeva.

Isto važi i za vektor dimenzije n, tj. uređenu n-torku

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^\top = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Definicija 0.25 *Matrica $A = [a_{ij}]_{mn}$ formata $m \times n$ množi se sa vektor kolonom $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i dobija se matrica Ax formata $m \times 1$:*

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n1} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}_{m1} =$$

Ili na drugi način možemo zapisati ovako:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_n a^n$$

Primer 0.26 *U fudbalskom timu treba da se kupi oprema za igrače. Za ženski tim su potrebne majice, šorcevi i lopte u sledećoj količini 20, 25, i 15. Za muški tim su takođe potrebne majice, šorcevi i lopte u sledećoj količini 15, 28 i 18 . Kod snabdevača svaka majica košta 10 evra šorc 15 evra a lopta 20 evra. Koliki je trošak ženskog tima i koliki je trošak za muški tim?*

Rešenje: U matricu A ćemo smestiti listu potrebnih narudžbina, a u matricu B cene odgovarajućih narudžbina.

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 25 & 28 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

Trošak nabavke cele opreme dobićemo kada pomnožimo matricu B sa matricom A

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 25 & 28 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 875 & 930 \end{bmatrix}.$$

Iz rezultujuće matrice zaključujemo da je trošak ženskoog tima 875 evra, a muškog tima 930 evra.

0.3 Stepenovanje matica

Definicija 0.27 *Ako je $A = [a_{ij}]_{nn}$ kvadratna matrica tada je $A^0 = I_n$ i $A^k = A^{k-1} \cdot A$.*

Teorema 0.28 *Za skalare k, m i matricu $A = [a_{ij}]$, važe sledeće osobine:*

1. $A^k \cdot A^m = A^{k+m}$
2. $(A^k)^m = A^{km}$

Primer 0.29 *Odrediti A^n ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I \cdot A = A$$

Pa zaključujemo ako je n paran broj $A^n = I$, a ako je n neparan broj $A^n = A$.

Primer 0.30 *Izračunati A^n gde je $n \in \mathbb{N}$ ako je:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za $n = 2$, $\quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Za $n = 3$, $\quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Dokazaćemo indukcijom. Pretpostavimo da važi za k dokazaćemo da važi za $k + 1$.

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tvrđenje važi za $n = 1$ jer je $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pa na osnovu induktivne pretpostavke smo dokazali da je tvrđenje zadovoljeno za svaki prirodni broj $\mathbb{N}$.

0.4 Definicija determinante

Definicija 0.31 *Neka je $A = [a_{ij}]_{nn}$ proizvoljna kvadratna matrica reda n gde je $n \in \mathbb{N}$. Tada je det, preslikavanje (funkcija) $A \mapsto detA$ definisano kao:*

$$\det A = \sum_{f \in S_n} (-1)^{Inv(f)} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$$

gde je $Inv(f)$ broj svih inverzija permutacije $f \in S_n$, gde je S_n skup svih permutacija skupa $S = \{1, \dots, n\}$.

Koristićemo samo matrice čiji svi elementi su realni brojevi a_{ij}.

Drugim rečima **determinanta** u oznaci det jeste funkcija koja preslikava **skup svih kvadratnih matrica reda** n $\boldsymbol{\mathcal{M}_{nn}}$ u skup $\mathbb{R}$, gde je $\mathbb{R}$ polje realnih brojeva nad kojim su definisane te matrice, odnosno

$$\mathbf{det} : \boldsymbol{\mathcal{M}_{nn}} \to \mathbb{R}.$$

Evo kako se obeležava determinanta matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$.

$$\det A = \det[a_{ij}]_{nn} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

0.5 Razlaganje determinate

Definicija 0.32 *Neka je A matrica. Izostavljanjem proizvoljnog broja vrsta i proizvoljnog broja kolone matrice A dobija se* **podmatrica matrice** *A.*

Definicija 0.33 **Minor matrice** *$A = [a_{ij}]_{nn}$ elementa a_{ij} matrice je determinanta podmatrice koja se dobija od matrice A izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone. Minor koji odgovara elementu matrice a_{ij} označava se sa M_{ij}.*

Definicija 0.34 **Kofaktor** *A_{ij} (ili algebarski komplement) elementa a_{ij} ili mesta (i, j) matrice A je*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Primer 0.35 *Za matricu $A = [a_{ij}]_{33}$, izračunati minor M_{23} i kofaktor A_{23}.*

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} \text{ i } A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Neka je $A = [a_{ij}]_{nn}$ kvadratna matrica. Determinante od $A = [a_{ij}]_{nn}$ su:

$n = 1$ $\qquad \det[a_{11}] = |a_{11}| = a_{11}$

$n = 2$ $\qquad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinanta drugog reda tj. formata 2×2 računa se tako što se pomnože elementi na glavnoj dijagonali, pa od toga oduzmemo pomnožene elemente na sporednoj dijagonali.

Determinantu trećeg reda tj. formata 3×3 možemo izračunati razvijanjem po bilo kojoj vrsti, na primer po i-toj vrsti, tako što svaki elemenat i-te vrste a_{ij}, pomnožimo sa $(-1)^{i+j}$, a zatim pomnožimo još sa determinantom podmatrice koja je dobijena uklanjanjem i-te vrste i j-te kolone i sve takve proizvode saberemo. Drugim rečima, determinanta se izračunava tako što se svaki elemenat neke vrste pomnoži sa njegovim kofaktorom $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ i svi ti brojevi saberu.

Izračunavanja determinante terćeg reda „razvijanjem **po prvoj vrsti** " (analogno je i za preostale vrste):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Radi krećeg zapisa, evo kako izgleda razvijanje determinante po prvoj vrsti:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Analogno ovom postupku razvijanja determinate po prvoj vrsti, determinantu možemo računati razvijanjem po bilo kojoj vrsti ili koloni. Obično odaberemo vrstu ili kolonu koja ima najviše nula, jer je račun najkraći.

Razvijanje determinante trećeg reda **po drugoj koloni** je:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Evo prikaza računanja determinate matrice $A = [a_{ij}]_{33}$ razvijanjem po svim vrstama:

$$\begin{aligned}\det[a_{ij}]_{33} &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}\\ &= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}\\ &= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}\end{aligned}$$

i svim kolonama

$$\begin{aligned}\det[a_{ij}]_{33} &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}\\ &= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}\\ &= a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}.\end{aligned}$$

Primetimo da smo determinantu trećega reda računali pomoću 3 determinante drugoga reda. Očevidno je uopštenje računanja determinante n-tog reda pomoću n determinanti $(n-1)$-vog reda.

Lema 0.36 *Još jedan zapis razvijanja determinante po prvoj vrsti*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

Sledeće dve teoreme su uopštenje leme 0.36 razlaganja po prvoj vrsti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)}a_{11}M_{11} + (-1)^{(1+2)}a_{12}M_{12} + (-1)^{(1+3)}a_{13}M_{13}$$

i dokaz je analogan za $n \times n$, tj. suma koja predstavlja vrednost determinante koja ima $n!$ (n faktorijel) sabiraka razbija se na n suma, tako da u definiciji determinate prvo uzmemo sumu koju daju sve permutacije koje imaju jedinicu na prvom mestu, zatim sumu koju daju permutacije koje imaju dvojku na prvom mestu i tako dalje do sume koju daju permutacije

koje imaju na prvom mestu broj n. Te sume će redom biti baš brojevi $a_{11}A_{11},\ a_{12}A_{12},\ \ldots\ , a_{1n}A_{1n}$.

Tako se dolazi do tvrdnje sledeće dve teoreme.

Teorema 0.37 *Determinanta matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ se može razložiti po i-toj vrsti pomoću minora na sledeći način:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \qquad i = \{1, 2, \ldots, n\} \quad \textit{odnosno}$$

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}.$$

ili po j-toj koloni

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} \qquad j = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Teorema 0.38 *Determinanta matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ se može razložiti i pomoću kofaktora na sledeći način. Razlaganje po vrstama*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad i = \{1, 2, \ldots, n\}$$

ili po kolonama

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \qquad j = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Primer 0.39 *Razlaganje matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ po prvoj vrsti*

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}.$$

Iako je razlaganje po vrstama prva osobina determinanti stavljena je u posebno poglavlje iz metodičkih razloga, sada sledi poglavlje gde se navode ostale osobine determinanti koje se u praksi koriste radi lakšeg računanja vrednosti determinante pogotovo kada su one većeg formata. U inženjerstvu, fizici, prilikom obrade velikih podataka, i drugim oblastima, dolazi se do potrebe za računanjem velikih formata determinanti koje se ne mogu izračunati ni korišćenjem računara. Tako da se onda primenjuju metode primenjene linearne algebre i numeričke analize da bi došli do što tačnijeg približnog rešenja determinante.

Zadatak 0.40 *Izračunati vrednost determinante* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$:

a) razvijanjem po prvoj vrsti,

b) razvijanjem po prvoj koloni,

c) razvijanjem po trećoj koloni.

Rešenje:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (0+2) - 0 - 2 \cdot (-1-5) = 2 + 12 = 14.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (0+2) + 1 \cdot (0+2) + 5 \cdot (0+2) = 2 + 2 + 10 = 14.$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \cdot (-1-5) + 2 \cdot (1+0) + 0 = 12 + 2 + 0 = 14.$$

0.6 Osobine determinanti

Teorema 0.41 *Determinanta matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ jednaka je determinanti njoj transponovane matrice $B = [b_{ij}]_{nn} = A^\top$. Znači za $a_{ij} = b_{ji}$ je:*

$$\det A^\top = \det A = \det B.$$

Zahvaljujući teoremi 0.41**, sve osobine determinante koje se dokažu za vrste, važiće i za kolone. Zato je dovoljno dokazivati samo teoreme (osobine determinante) koje se odnose na vrste matrica.**

Teorema 0.42 *Determinanta jedinične matrice I formata $n \times n$, čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice a van nje nule, jednaka je 1.*

$$\det I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Posledica teorema 0.37 i 0.38

Teorema 0.43 *Ako su svi elementi koji se nalaze ispod glavne dijagonale matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ jednaki nuli, tada determinanta matrice jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Posledica teorema 0.37 i 0.38

Teorema 0.44 *Ako su svi elementi koji se nalaze ispod sporedne dijagonale matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ jednaki nuli, tada determinanta matrice je jednaka proizvodu elemenata na sporednoj dijagonali, koji se množi još sa $(-1)^{\binom{n}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{22} & a_{2\,n-1} & 0 \\ a_{31} & \dots & a_{3\,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} a_{k\,n+1-k}.$$

Posledica teorema 0.37 i 0.38

Teorema 0.45 *Neka je matrica A'_{nn} dobijena tako što su u matrici A_{nn} dve vrste (kolone) zamenile mesta. Tada je $\det A'_{nn} = -\det A_{nn}$.*

Teorema 0.46 *Ako su svi elementi i-te vrste (kolone) matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ jednaki nuli, tada je $\det A = 0$.*

Dokaz: Razvijanjem determinante po vrsti čiji su svi elementi 0 dobijamo

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot 0 \cdot M_{ij} = 0.$$

Primer determinante čiji su svi elementi druge vrste jednaki 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + \cdot A_{23} + \ldots + 0 \cdot A_{2n} = 0.$$

Teorema 0.47 *Determinanta se množi skalarom α tako što se svi elementi, samo jedne proizvoljne vrste (kolone), pomnože sa α.*

Dokaz:

$$\alpha \det A = \alpha \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (\alpha \cdot a_{ij}) M_{ij}.$$

Primer množenja determinante sa skalarom u kome je prvo prva vrsta pomnožena sa skalarom α a nakon toga n-ta kolona pomnožena sa skalarom α

$$\alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prema tome, determinanta se množi skalarom tako što se svi elementi samo jedne vrste (kolone) pomnože tim skalarom.

Posledica 0.48 *Na osnovu Definicije 0.20 i Teorema* 0.47 *sledi sledeća tvrdnja za matricu* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *i skalar* α

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Teorema 0.49 *Ako su dve vrste (kolone) u kvadratnoj matrici* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *iste, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz: Ako u matrici A dve vrste, koje su iste, zamene mesta, po teoremi 0.45 determinanta „nove" matrice razlikuje se od determinante matrice A samo u znaku. Pa dobijamo da je $\det A = -\det A$ odakle sledi da je $\det A = 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

U ovoj determinanti prva i treća vrsta su jednake tako da je vrednost determinante 0.

Teorema 0.50 *Ako su dve vrste (kolone) matrice* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *proporcionalne, odnosno linearno zavisne, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz: Kako su vrste (kolone) pomenute matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ proporcionalne možemo izvući faktor proporcionalnosti ispred deteminante (Teorema 0.47) tako da u determinanti ostaju dve jednake vrste (kolone) tako da

je determinanta jednaka nuli po prethodnoj Teoremi 0.49,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

U ovom primeru prva i druga vrsta su proporcionalne. Izvlačenjem skalara α ispred determinante, u determinanti prva i druga vrsta su iste tako da po prethodnoj Teoremi 0.49 vrednost determinante je 0.

Definicija 0.51 *Ako je A kvadratna matrica reda n i $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vektor, tada je A_{x_i} matrica dobijena od matrice A tako što je i-ta vrsta zamenjena redom sa $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad A_{x_i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Teorema 0.52 *Ako je A kvadratna matrica reda n, $x = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ i $y = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{in})$ su vektori, tada je $\det A_{x_i+y_i} = \det A_{x_i} + \det A_{y_i}$.*

Dokaz: Primetimo da matrice A_{x_i} i A_{y_i} imaju sve iste vrste kao i matrica $A_{x_i+y_i}$, izuzev i-te vrste. Jasno je da i-ta vrsta matrice A_{x_i} je $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$ i da i-ta vrsta matrice A_{y_i} je $(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_n})$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1}+\beta_{i1} & \alpha_{i2}+\beta_{i2} & \dots & \alpha_{in}+\beta_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \dots & \beta_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Razvijanjem determinante po elementima $i-$te vrste dobijamo:

$$\det A_{x_i+y_i} = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}A_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}A_{ij} = \det A_{x_i} + \det A_{y_i}.$$

Teorema 0.53 *Determinanta matrice se ne menja ako je i-ta vrsta (kolona) matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ pomnožena sa α i dodata j-toj vrsti (koloni), $i \neq j$.*

Dokaz: Ako determinanti matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $i-$tu vrstu pomnožimo sa α i dodamo $k-$toj vrsti, dobijamo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}+\alpha a_{i1} & a_{k2}+\alpha a_{i2} & \dots & a_{kn}+\alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A + \alpha \cdot 0 = \det A.$$

Druga determinanta je jednaka nuli po Teoremi 0.50 jer su $i-$ta i $k-$ta vrsta proporcionalne.

Teorema 0.54 *Ako su $A = [a_{ij}]_{nn}$ i $B = [b_{ij}]_{nn}$ kvadratne matrice reda n tada je:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Primer 0.55 *Izračunati determinantu korišćenjem osobina determinanti.*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}$$

Rešenje: Prvo elementima prve vrste dodajemo elemente druge, treće i četvrte vrste. Nakon toga izvućemo $(3a+1)$ ispred determinante Teorema 0.47. Dalje prvu kolonu pomnožimo sa -1 i dodamo je prvo drugoj, trećoj pa četvrtoj koloni, Teorema 0.53 i dobijamo:

$$D = \begin{vmatrix} 3a+1 & 3a+1 & 3a+1 & 3a+1 \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = (3a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3a+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (3a+1)(1-a)^3.$$

Razvijanjem determinante po prvoj vrsti dobili smo da je $D = (3a+1)(1-a)^3$.

Primer 0.56 *Izračunati determinantu korišćenjem osobina determinanti.*

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Rešenje: Prvo ćemo prvu vrstu pomnožiti sa -1 i dodati drugoj, trećoj i četvrtoj vrsti. Nakon toga drugu vrstu množimo sa -1 i dodajemo trećoj i četvrtoj vrsti. Zatim, treću vrstu množimo sa -1 i dodajemo četvrtoj vrsti.

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$$

Odavde zaključujemo da je vrednost date determinante D jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali $D = a(b-a)(c-b)(d-c)$ po Teorema 0.43.

0.7 Inverzna matrica

Da bismo dali definiciju inverzne matrice moramo prvo da ponovimo neke pojmove i da definišemo nove.

U poglavlju Determinante data je definicija minora M_{ij} (Definicija 0.33). Minor M_{ij} matrice A je determinanta podmatrice matrice A koja se dobija uklanjanjem i-te vrste i j-te kolone matrice A.

Takođe je u poglavlju Determinanti data definicija kofaktora A_{ij} (Definicija 0.34). Kofaktor A_{ij} matrice A je $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Sad sledi definicija adjungovane matrice od matrice.

Definicija 0.57 *Ako je $A = [a_{ij}]_{nn}$ kvadratna matrica, tada njena adjungovana matrica izgleda ovako:*

$$adj\ A = [A_{ij}]_{nn}^{\top} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

gde su A_{ij} odgovarajući kofaktori .

Adjungovana matrica $adj\ A$ dobija se od polazne matrice A tako što se svaki element a_{ij} matrice A zameni sa njegovim odgovarajućim kofaktorom A_{ij} i zatim se tako dobijena matrica transponuje.

Adjungovana matrica označava se još i sa $A^{\star} = adj\ A$.

Primer 0.58 *Napisati adjungovane matrice date matrice A i B.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = [A_{ij}]_{nn}^{\top} = \begin{bmatrix} |a_{22}| & -|a_{21}| \\ -|a_{12}| & |a_{11}| \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} |a_{22}| & -|a_{12}| \\ -|a_{21}| & |a_{11}| \end{bmatrix}$$

$$adj\ B = [B_{ij}]_{nn}^{\top} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\top}$$

Primer 0.59 *Napisati adjungovane matrice date matrice A i B.*

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} |5| & -|3| \\ -|-2| & |-7| \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$adj\ B = [B_{ij}]_{nn}^{\top} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\top}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & -4 \\ -3 & -5 & -6 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Definicija 0.60 *Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ ima inverznu matricu ako i samo ako postoji matrica X_{nn} tako da važi $AX = XA = I_n$. Tada kažemo da je matrica X inverzna matrica matrice A, koja se u literaturi označava sa A^{-1} (tj. $X = A^{-1}$).*

Drugim rečima kvadratna matrica A_{nn} ima inverznu matricu A_{nn}^{-1} ako i samo ako važi

$$AA^{-1} = I_{nn} = A^{-1}A,$$

gde je I_{nn} jedinična matrica.

Teorema 0.61 *Kvadratna matrica* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *ima inverznu matricu ako i samo ako je njena determinanta različita od nule* (det $A \neq 0$). *Tada je inverzna matrica* A^{-1} *određena sa:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj A.$$

Definicija 0.62 *Ako kvadratna matrica* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *ima inverznu matricu tj.* $\det A \neq 0$, *tada se za matricu* A *kaže da je* **regularna matrica**. *U protivnom se za matricu* A *kaže da je* **singularna matrica**.

Odnosno ako je matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$ regularna ona ima inverznu matricu A^{-1}.

Teorema 0.63 *Ako su* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *i* $B = [b_{ij}]_{nn}$ *regularne matrice,* I_{nn} *je jedinična matrica i* α *je skalar tada važe sledeće osobine:*

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $IA^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}$
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ *a ne važi* $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

Primer 0.64 *Ukoliko postoji, odrediti inverznu matricu matrice* A *ako je ona:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

a) Determinanta date matrice je $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. Kako je $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, sledi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Kako je determinanta date matrice $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, data matrica je singularna, tj. nema inverznu matricu.

c) Razvijanjem po prvoj vrsti, dobija se da je determinanta date matrice

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (20 - (-4)) = 2 \cdot 24 = 48.$$

Odgovarajući kofaktori su:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 24, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Stoga je adjungovana matrica date matrice

$$A^* = \begin{bmatrix} 24 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \text{ a inverzna}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Primer 0.65 *Naći inverznu matricu A^{-1} za datu matricu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Rešenje: Prvo treba da se izračuna determinanta matrice A da bi videli da li za datu matricu postoji njena inverzna matrica. U ovom primeru $\det(A) = -4$ što znači da postoji njena inverzna matrica.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj A = \frac{1}{-4} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Tako da nakon računanja dobijamo inverznu matricu A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ako želimo da proverimo da li je dobro izračunata matrica A^{-1} treba da je pomnožimo sa matricom A i kao rezultat da dobijemo jediničnu matricu I odgovarajućeg formata. Znači $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kada posmatramo kvadratne matrice važna klasa među kvadratnim matricama su regularne matrice. Evo nekoliko veoma važnih ekvivalentnih definicija regularne matrice.

- Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$.
- Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako postoji A^{-1}.
- Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako nula nije karakteristični koren matrice A.

- Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako su sve vrste matrice A nezavisni vektori.
- Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako su sve kolone matrice A nezavisni vektori.
- Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako ne postoji vektor (matrica kolona) $x \neq 0$ takav da je $Ax = 0$.
- Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je njen rang jednak broju njenih vrsta (kolona) tj. njenom redu.
- Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je ona matrica nekog određenog sistema linearnih jednačina.

0.8 Rešavanje matričnih jednačina

Matrične jednačine rešavaju se slično kao i jednačine sa realnim koeficijentima čije su nepoznate isto iz skupa realnih brojeva. Neki primeri matričnih jednačina:

$$AX = B; \quad 2AB^T = CX - 5IX \quad \text{ili} \quad A^2 = (I - 2B) + 3X.$$

Kod rešavanja matričnih jednačina moramo voditi računa o tome da li su matrice odgovarajućeg formata između navedenih operacija (pogledati Definicije 0.18, 0.22). Prilikom rešavanja matrične jednačine možemo koristiti osobine matrica koje su date u Teoremama 0.10, 0.17, 0.21, 0.24 i 0.63.

Takođe treba voditi računa da komutativnost kod matrica ne važi $AB \neq BA$. Kada množimo neku matričnu jednačinu matricom W treba da pomnožimo i levu i desnu stranu jednačine sa matricom W. Razlika od običnih jednačina (ne matričnih) je u tome da kod matričnih jednačina moramo da vodimo računa o tome sa koje strane vršimo množenje jednačine. Kod matričnih jednačina množenje moramo da izvršimo sa iste strane, jer ne važi komutativnost. Tako da, ako matričnu jednačinu $AX = B$ želimo da pomnožimo sa matricom W sa leve strane dobićemo $WAX = WB$ a ne $WAX \neq BW$. Ako istu tu matričnu jednačinu želimo da pomnožimo sa matricom W sa desne strane onda će ona izgledati ovako $AXW = BW$.

Kod nemaričnih jednačina na primer $(x-2)(x+3)=0$ važilo je da je izraz jednak nuli ako i samo ako je $(x-2)=0$ ili $(x+3)=0$, tj. $x=2$ ili $x=-3$. Kod matričnih jednačina to ne važi. Ako je data matrična jednačina $AB=0$ ne znači da je $A=0$ ili $B=0$.

Kada pričamo o matričnoj jednačini sve matrice koje figurišu u sklopu matrične jednačine moraju biti odgovarajućeg formata tako da operacije koje se nalaze između njih mogu da se primene.

Primer 0.66 *Rešiti matričnu jednačinu $AX+B=CX+I$ za date matrice*

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: Da bi mogle da se izvrše operacije u matričnoj jednačini jasno je da nepoznata matrica X mora biti formata 2×2 i jedinična matrica I takođe mora biti formata 2×2.

Kao i kod rešavanja običnih jednačina prvi korak je da se nepoznata matrica prebaci sa jedne strane matrične jednačine a sve ostale matrice sa druge strane. Tako da oduzimanjem matrice B a nakon toga i matrice CX i levoj i desnoj strani jednakosti dobijamo sledeću jednakost:

$$AX-CX=I-B.$$

Dalje izvučemo matricu X ispred zagrade sa leve srane (u ovom primeru matrica X može da se stavi ispred zagrade samo sa leve strane jer komutativnost matrica ne važi) i dobijamo:

$$(A-C)X=I-B.$$

Da bi ostala nepoznata matrica X sama sa leve strane ove matrične jednačine celu jednačinu treba da pomnožimo sa $(A-C)^{-1}$ i to sa leve strane. Znači i levu $(A-C)X$ i desnu $I-B$ stranu matrične jednačine množimo sa iste strane u ovom primeru leve.

$$(A-C)^{-1}(A-C)X=(A-C)^{-1}(I-B)$$

Kako je $(A-C)^{-1}(A-C)=I$ i $IX=X$ dobijamo

$$X=(A-C)^{-1}(I-B)$$

Sledeći korak je izračunati inverznu matricu od matrice $A-C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

$$(A-C)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad I - B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tražena matrica je $X = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$.

Primer 0.67 *Rešiti matričnu jednačinu $AX = C - AB$ za date matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: Matričnu jednačinu pomnožimo sa leve strane sa maricom A^{-1}

$$A^{-1}AX = A^{-1}C - A^{-1}AB$$
$$X = A^{-1}C - B$$

Inverzna matrica $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ pa je dalje

$$X = A^{-1}C - B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Primer 0.68 *Rešiti matričnu jednačinu $AX = B$ za date matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: Format matice X je 3×2 jer marica AX mora biti istog formata kao i matrica B tako da je matrica $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$.

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c-e & b+d-f \\ a+e & b+f \end{bmatrix}.$$

Kako je $AX = B$ tada je $\begin{bmatrix} a+c-e & b+d-f \\ a+e & b+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ odavde dobijamo sistem od četiri jednačine sa 6 nepoznatih.

Iz ove dve jednačine $\begin{array}{rcrcrcr} a & + & c & - & e & = & 1 \\ a & & & + & e & = & 2 \end{array}$ dobijamo da je $a = 2 - e$ i $c = 2e - 1$.

Iz preostale dve jednačine $\begin{array}{rcrcrcr} b & + & d & - & f & = & 0 \\ b & & & + & f & = & -1 \end{array}$ dobijamo da je $b = -1 - f$ i $d = 2f + 1$.

Sistem je dvostruko neodređen i ima beskonačno mnogo rešenja. Skup rešenja matrične jednačine $AX = B$ je $(a, b, c, d, e, f) = \{(2-\alpha, -1-\beta, 2\alpha-1, 2\beta+1, \alpha, \beta) | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Primer 0.69 *Rešiti matričnu jednačinu $AX = C - AB$ za date matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: Matričnu jednačinu možemo zapisati u sledećem obliku $X = A^{-1}C - B$. Kako je $\det A = 0$ znači da ne postoji A^{-1} pa polaznu jednačinu moramo rešavati na neki drugi način.

Prvo sračunamo $C - AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 16 & 10 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -14 & -10 \\ -4 & -9 & -2 \end{bmatrix}$.

Format matice X je 2×3 jer matrica AX mora biti istog formata kao i matrica $C - AB$. Nepoznata matrica $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, a $AX = \begin{bmatrix} 4a+6d & 4b+6e & 4c+6f \\ 2a+3d & 2b+3e & 2c+3f \end{bmatrix}$.

Data matrična jednačina je $AX = C - AB$ je

$$\begin{bmatrix} 4a+6d & 4b+6e & 4c+6f \\ 2a+3d & 2b+3e & 2c+3f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -14 & -10 \\ -4 & -9 & -2 \end{bmatrix}.$$

Odavde dobijamo sistem od 6 jednačina sa 6 nepoznatih. Rešavanjem ovog sistema jednačina $4a + 6d = -4$, $4b + 6e = -14$, $4c + 6f = -10$, $2a + 3d = -4$, $2b + 3e = -9$ i $2c + 3f = -2$ dobijamo rešenja polazne matrične jednačine. Kako je ovaj sistem kontradiktoran znači da polazna matrična jednačina nema rešenja. Da je sistem bio takav da ima tačno jedno rešenje onda bi i polazna matrična jednačina imala jedno rešenje a da je sistem bio neodređen onda bi i matrična jednačina imala beskonačno mnogo rešenja (u zavisnosti od stepena neodređenosti imali bi toliki broj nepoznatih parametara u matrici X).

0.9 Rang matrice

Definicija 0.70 *Ako je podmatrica B, matrice $A \neq 0$, najvećeg reda čija determinanta je različita od nule, tada je rang matrice A jednak redu podmatrice B. Rang nula matrice je nula. Rang matrice označava se sa* **rang** A.

Odnosno, ako je minor M, matrice $A \neq 0$, najvećeg reda koji je različita od nule, tada je rang matrice A jednak redu minora M. Rang nula matrice je nula.

Rang jeste funkcija koja preslikava skup matrica u skup nenegativnih celih brojeva po definiciji 0.70 tj.

$$\mathbf{rang} : A \to \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Slede još tri teoreme koje su ekvivalentne Definiciji 0.70

Teorema 0.71 *Rang matrice A koja je različita od nula matrice je jednak formatu njene najveće kvadratne podmatrice čija je determinanta različita od nule. Ako je matrica A nula matrica tada je* **rang** $A = 0$.

Teorema 0.72 *Rang matrice A je format njene regularne kvadratne podmatrice, takve da su sve determinante kvadratnih podmatrica koje su većeg formata jednake nuli, ako postoje.*

Teorema 0.73 *Rang matrice je funkcija koja preslikava skup matrica u skup nenegativnih celih brojeva na sledeći način. Ako je $A = 0$, tada je* **rang** $A = 0$. *Kad je $A \neq 0$, tada je* **rang** $A = r$ *gde je r format najvećeg minora koji je različit od nule ukoliko postoji, a svi minori reda većeg od r, ukoliko postoje, jednaki su nuli.*

Primer 0.74 *Izračunati rang sledećih matrica:*

$$\begin{array}{cccccc}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Ako je B kvadratna podmatrica najvećeg reda matrice A čija je determinanta različita od nule, tada je rang matrice A jednak redu njene podmatrice B.

Primer 0.75 *Koliko postoji različitih kvadratnih podmatrica za matrice*

$$a)\ A = [9] \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad c)\ C = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Rešenje: a) 1 b) 5 c) $\binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2 = 9 + 9 + 1 = 19$.

Prema tome da bismo odredili rang matrice C iz prethodnog Primera 0.75, treba izračunati determinante svih 19 kvadratnih podmatrica i od svih njih koje su različite od nule uočiti onu koja je najvećeg reda i taj red je rang te matrice. Međutim ovaj postupak po definiciji je jako dugačak i zato se rang matrice traži tako što se ekvivalentnim transformacijama matrica svede na trougaoni oblik i tada broj elemenata ražličitih od nule na glavnoj dijagonali je rang te matrice.

Definicija 0.76 *Ako je rang matrice A jednak r, tada se svi minori reda r različiti od nule nazivaju* **bazični minori**.

Definicija 0.77 *Ekvivalentne (elementarne) transformacije matrice su:*

1. *Zamena mesta vrstama (kolonama).*
2. *Množenje vrste (kolone) brojem različitim od nule.*
3. *Dodavanje neke vrste (kolone) nekoj drugoj vrsti (koloni).*

Postoji potpuna analogija između ekvivalentnih transformacija matrice i ekvivalentnih transformacija sistema linearnih jednačina.

Teorema 0.78 *Ekvivalentnim odnosno elementarnim transformacijama* **rang** *matrice se ne menja.*

Napomena: Znači matrice istog formata koje imaju isti rang se mogu ekvivalentnim transformacijama, odnosno Gausovim algoritmom, svesti jedna na drugu.

Primer 0.79 *Izračunati rang matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Primenom elementarnih transformacija dobijamo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Odavde zaključujemo da je **rang A** $= 3$ jer determinanta najvećeg formata koja je različita od nule je formata 3×3.

Primer 0.80 *Izračunati rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 7 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 12 & 0 & 10 \\ 6 & 3 & 18 & 0 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 13 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Primenom elementarnih transformacija iz dobijene matrice lako zaključujemo da je determinanta najvećeg formata koja je različita od nule formata 3×3 pa je **rang A** $= 3$.

Uopštenjem ovog primera na matricu formata $m \times n$ dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 0.81 *Rang matrice* $A = [a_{i,j}]_{mn}$ *biće jednak* k *ako nakon izvršenih elementarnih transformacija se dobije matrica* $B = [b_{i,j}]_{mn}$ *kod koje su svi elementi ispod glavne dijagonale matrice* $B = [b_{i,j}]_{mn}$ *i ispod* k*-te vrste jednaki nuli, a preostali elementi na glavnoj dijagonali različiti od nule, tada je* **rang B** $=$ **rang A** $= k$.

.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \dots & b_{1\,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \dots & b_{2\,r+1} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & \dots & b_{3\,r+1} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{kk} & b_{k\,k+1} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Napomena: Rang od matrice A je isti kao i rang od matrice B, jer je matrica B dobijena od matrice A vršenjem elementarnih transformacija, Teorema 0.78. Ako je matrica B dobijena od matrice A vršenjem elementarnih transformacija onda se za matrice A i B kažu da su **ekvivalentne matrice** i označavaju se $A \sim B$.

Sledi definicija ekvivalentnih matrica.

Definicija 0.82 *Matrice $A = [a_{ij}]_{mn}$ i $B = [b_{ij}]_{mn}$ su ekvivalentne matrice ako i samo ako imaju isti rang, to jest ako se jedna od druge mogu dobiti ekvivalentnim transformacijama. Označavaju se sa $A \sim B$.*

Teorema 0.83
Za kvadratne matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ i $B = [b_{ij}]_{nn}$ važi:

$$\textbf{rang } A = \textbf{rang } B \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R})\, det(A) = \lambda\, det(B).$$