$\boxed{\text{A}}$ ALGEBRA i DISKRETNA MATEMATIKA 01.02.2018.

1. Neka je A skup sa bar dva elementa ($|A| \geq 2$), i neka je u grupoidu $(A, *)$ operacija $*$ definisana sa $x * y = x$. Ispitati na $(A, *)$ sve aksiome komutativne grupe.

2. Neka je $z_1 = 1 + i$. Izračunati temena z_2 i z_3 jednakostraničnog trougla $z_1 z_2 z_3$ sa stranicama dužine $2\sqrt{2}$, ako se zna da su temena z_1 i z_3 kolinearne sa koordinatnim početkom kompleksne ravni (napisati sva rešenja).

3. Odrediti realne parametre a i b tako da $\sqrt{2}i$ bude koren polinoma $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - bx + 10$, a zatim za te vrednosti parametara a i b rastaviti na proizvod nesvodljivih polinoma polinom P nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

4. Neka je $a = (-1, 2, 2)$, $b = (-3, 1, 0)$, $c = (1, -1, -2)$, i neka je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa

$$f(x, y, z) = (((x, y, z) \cdot a) \cdot b) \times c + |a| \cdot (x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Dokazati da je funkcija f linearna transformacija, napisati njenu matricu, odrediti rang njene matrice, i ispitati da li je f izomorfizam.

5. Neka je $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = a \sin x + b \cos x$, i neka je $\mathcal{F} = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Dokazati da je $(\mathcal{F}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor, gde je za proizvoljne funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ definisano $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ i $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Odrediti jednu bazu ovog vektorskog prostora (dokazati da je baza).

6. Neka je prava a određena jednačinom $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$. U zavisnosti od vektora $\vec{r}_A$ i $\vec{a}$ izraziti vektore položaja temena B i C jednakostraničnog trougla BOC gde je $O \notin a$ koordinatni početak i tačke B i C pripadaju pravoj a.

$\boxed{\text{B}}$ ALGEBRA i DISKRETNA MATEMATIKA 01.02.2018.

1. Neka je B skup sa bar dva elementa ($|B| \geq 2$), i neka je u grupoidu $(B, *)$ operacija $*$ definisana sa $a * b = b$. Ispitati na $(B, *)$ sve aksiome komutativne grupe.

2. Neka je $z_1 = 1 - i$. Izračunati temena z_2 i z_3 jednakostraničnog trougla $z_1 z_2 z_3$ sa stranicama dužine $2\sqrt{2}$, ako se zna da su temena z_1 i z_3 kolinearne sa koordinatnim početkom kompleksne ravni (napisati sva rešenja).

3. Odrediti realne parametre a i b tako da $-\sqrt{2}i$ bude koren polinoma $P(x) = x^4 - ax^3 + 7x^2 - 4x + b$, a zatim za te vrednosti parametara a i b rastaviti na proizvod nesvodljivih polinoma polinom P nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

4. Neka je $a = (2, 1, 2)$, $b = (-2, 0, 3)$, $c = (3, 1, -1)$, i neka je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa

$$f(x, y, z) = (((x, y, z) \cdot a) \cdot b) \times c + |a| \cdot (x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Dokazati da je funkcija f linearna transformacija, napisati njenu matricu, odrediti rang njene matrice, i ispitati da li je f izomorfizam.

5. Neka je $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = ae^x + bx^2$, i neka je $\mathcal{F} = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Dokazati da je $(\mathcal{F}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor, gde je za proizvoljne funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ definisano $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ i $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Odrediti jednu bazu ovog vektorskog prostora (dokazati da je baza).

6. Neka je prava p određena jednačinom $\vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$, $t \in \mathbb{R}$. U zavisnosti od vektora $\vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja temena R i T jednakostraničnog trougla ROT gde je $O \notin a$ koordinatni početak i tačke R i T pripadaju pravoj p.

REŠENJA:

1.

2.

3.

4.

5.

6.