D **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **21.01.2018.**

Studijski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 2

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od 8 grešaka nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,. . . ,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $ax - y = 1 \wedge x - y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** kontradiktoran: **2)** određen: **3)** jednostuko neodređen:

- Za vektore $\vec{a} = (0, -3, 4)$ i $\vec{b} = (2, -1, 2)$ izračunati: **1)** $\vec{a} - 2\vec{b} =$ ________ **2)** $\vec{a} \times \vec{b} =$ ________ **3)** $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ________ **4)** $|\vec{a}| =$ ________ **5)** $|\vec{b}| =$ ________ **6)** $\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) =$ ________

- **Nezavisne** uređene trojke u vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ su: **1)** $\big((1, 3, 0), (0, -1, 0), (1, -1, 0)\big)$ **2)** $\big((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\big)$ **3)** $\big((2, 3, -1), (7, 4, 8), (-6, -9, 3)\big)$ **4)** $\big((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\big)$

- Neka tačke $P(4, 0, 0), Q(0, 4, 0)$ i $R(0, 0, 4)$ pripadaju ravni α. **1)** Vektor $\vec{m}$ paralelan sa α je $\vec{m} = (\quad,\quad,\quad)$ **2)** Vektor $\vec{n}$ normalan na ravan α je $\vec{n} = (\quad,\quad,\quad)$ **3)** Napisati $(A, B, C, D) = (\quad,\quad,\quad,\quad)$, tako da je $Ax+By+Cz+D = 0$ jednačina ravni α. **4)** Napisati koordinate tačke S ravni α koja je najbliža koordinatnom početku. $S(\quad,\quad,\quad)$ **5)** Izračunati površinu $P_{\triangle PQR}$ trougla PQR. $P_{\triangle PQR} =$

- Ako je $|\vec{a}| = 12$ i $\vec{a} \| \vec{b} = (-2, 2, 1)$, tada je skup **svih** mogućnosti za $\vec{a} \in \{\qquad\qquad\}$.
- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 7 & -7 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$$

- $\begin{vmatrix} -4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \quad \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \quad \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} =$

- Matrice linearnih transformacija $s(x) = (2x, -3x)$, $f(x, y) = y$, $g(x, y, z) = (y, z)$, $h(x) = 0$ su:

$M_s =$ $\qquad$ $M_f =$ $\qquad$ $M_g =$ $\qquad$ $M_h =$

$\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast$

- Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ generatorna u prostoru V, (c_1, c_2, c_3) nezavisna za prostor V i $\dim V = n$. Tada je **1)** $3 \le k \le n$ **2)** $n \le 3$ **3)** $k \le n \le 3$ **4)** $n \le 3 \le k$ **5)** $3 \le n \le k$ **6)** $3 \le k$

- Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = \alpha$, $|\overrightarrow{BC}| = \beta$, $\overrightarrow{AB} \| \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} \| \vec{b}$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, α i β ako su $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{a}$ istog smera, a $\overrightarrow{BC}$ i $\vec{b}$ suprotnog smera. $\vec{r}_C =$

- Normalna projekcija vektora $\vec{x} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ na pravu $\ell : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{1}$ je vektor: $\mathbf{pr}_\ell(\vec{x}) =$

- Karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ su: **1)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

- Za kvadratne matrice A, B, C reda 2 nad poljem $\mathbb{R}$, svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i jediničnu matricu I reda 2 je: **1)** $2\mathbf{rang}(AI) = \mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(I)$ **2)** $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A) \cdot \mathbf{rang}(B)$ **3)** $A(BC) = (AB)C$ **4)** $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$ **5)** $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ **6)** $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ **7)** $(B + C)A = BA + CA$ **8)** $A^2B^2 = (AB)^2$ **9)** $\mathbf{rang}[a_{ij}]_{9,3} \in \{\qquad\}$ **10)** $\mathbf{rang}[a_{ij}]_{1,4} \in \{\qquad\}$

- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, -2x + y)$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog

- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog

- Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & ay & = & a \\ ax & + & ay & = & a \\ ax & + & ay & = & a \end{array}$$

je: **1)** određen: ________ **2)** kontradiktoran: ________ **3)** jednostruko neodređen: ________ **4)** dvostruko neodređen: ________

- Algebarska vrednost projekcije vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ je: **1)** skalar **2)** pozitivan skalar **3)** realan broj **4)** pozitivan realan broj **5)** vektor **6)** $\pm|\frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}|$ **7)** $\frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|}$ **8)** $\pm|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})|$
- Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektor $\vec{a}$ je: **1)** vektor **2)** $\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})$ **3)** realan broj **4)** $|\mathbf{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **5)** $\frac{\vec{a}\vec{x}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$
- Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nekolinearna vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$: **1)** $(\vec{x}-\mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\perp\vec{a}$ **2)** $(\vec{a}-\mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\|\vec{x}$ **3)** $(\vec{a}-\mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\nparallel\vec{x}$ **4)** $(\vec{a}-\mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\perp\vec{x}$ **5)** $(\vec{x}-\mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\|\vec{a}$
- Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AB i AD. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ i $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{PQ}=$
- Napisati $\vec{x}=(0,3,3)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(2,1,-1)$ i $\vec{c}=(1,2,1)$: $\vec{x}=$
- Linearna transformacija $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definisana sa $f(x,y)=(x-y,x+y,2x+5y)$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog
- Linearna transformacija $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definisana sa $f(x,y)=(x-y,-x+y,-5x+5y)$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog
- Linearna transformacija $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x,y,z)=(x-y-z,x+y+z)$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog
- Koordinate projekcije A' tačke $A(0,-3,0)$ na ravan određenu sa $x+2y+z=0$ su: $A'(\quad,\quad,\quad)$
- Neka su (a,b), (a,c) i (b,c) nezavisne uredjene dvojke vektora prostora V i neka je $a+b+c\neq 0$. Tada uređena dvojka vektora $(a+b+c,b+c)$ prostora V je: **1)** zavisna **2)** nezavisna **3)** ništa od prdhodnog
- Neka je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ nezavisna trojka vektora. Tada uređena trojka vektora $(\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ je: **1)** uvek zavisna **2)** uvek nezavisna **3)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.
- Neka su $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ proizoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})$ je: **1)** uvek zavisna **2)** uvek nezavisna **3)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.
- Neka je tačka P presek ravni $\alpha:\vec{n}\vec{r}=\vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a:\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$ i $\vec{n}\vec{a}\neq 0$. Tada je: **1)** $\vec{r}_P=\vec{r}_A+\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. **2)** $\vec{r}_P=\vec{r}_Q+\frac{(\vec{r}_A-\vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$. **3)** $\vec{r}_P=\vec{r}_A+\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{n}$. **4)** $\vec{r}_P=\vec{r}_A+\frac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{n}$. **5)** $\vec{r}_P=\vec{r}_A-\frac{(\vec{r}_A-\vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$.
- Vektori $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ i $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ su **komplanarni** ako je: **1)** rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}=3$ **2)** rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\leq 2$ **3)** rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\leq 3$ **4)** $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$ **5)** $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je nezavisna **6)** $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})\neq 0$ **7)** $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\ \vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$ **8)** $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0\ \Rightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$
- Ako su nenula vektori $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ i $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ **normalni** tada je: **1)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni **2)** rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\leq 2$ **3)** rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\leq 1$ **4)** rang $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}=1$ **5)** $\vec{a}\times\vec{b}=0$ **6)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ **7)** $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ **8)** $(\exists\lambda\in\mathbb{R})\ \vec{a}=\lambda\vec{b}$ **9)** $(\forall\lambda\in\mathbb{R})\ (\vec{a}\neq\lambda\vec{b}\ \wedge\ \lambda\vec{a}\neq\vec{b})$ **10)** $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})\,\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0\ \Rightarrow\ \alpha^2+\beta^2=0$
- Neka je $\varphi:V\to\mathbb{R}^2$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})=(x_1+x_2-x_3,x_1-x_2)$ gde su $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ i $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R},+,\cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih dvojki. Tada je funkcija $\varphi:V\to\mathbb{R}^2$ **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** linearna transformacija
- Ako je A kvadratna matrica reda 3, tada je: **1)** $\det A=0\Rightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=3$ **2)** $\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=3\Leftrightarrow\exists A^{-1}$ **3)** $\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=3\Rightarrow\det A\neq 0$ **4)** $\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=3\Leftarrow\det A\neq 0$ **5)** $\det A=0\Rightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}=0$ **6)** $\det A=0\Leftrightarrow\mathbf{rang}\,\mathrm{A}\leq 2$
- Linearna transformacija $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x,y,z)=(x-y-z,-2x+2y+2z)$ je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog

ZADACI:

1. U zavisnosti od vektora $\vec{r}_X$, $\vec{r}_Y$ i $\vec{r}_J$, gde su X,Y,J nekolinearne tačke, odrediti vektore položaja $\vec{r}_Z$ i $\vec{r}_U$ temena Z i U, tako da $XYZU$ bude kvadrat koji pripada ravni određenoj sa tačkama X,Y,J (napisati sva rešenja).

2. Diskutovati po $m,n\in\mathbb{R}$ i rešiti po $x,y\in\mathbb{R}$ sistem jednačina
$$\begin{aligned}2mx&+&my&=&3m-n\\-2x&-&4my&=&-2\end{aligned}$$

3. Neka je $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ linearna transformacija za koju je $f(-1,-4)=(1,-3,0)$ i $f(1,3)=(3,-2,2)$.
(a) Napisati matricu linearne transformacije f. (b) Izračunati $f(2,3)$.
(c) Izračunati $\dim\left(f\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. (d) Odrediti skup $\left\{v\in\mathbb{R}^2\mid f(v)=(0,0,0)\right\}$.