

1. Naći sve proste implikante i minimalne DNF Bulove funkcije f date tabelom:

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0

Rešenje $f(x, y, z, u) = xyz u + xyz' u + xy' z u' + xy' z' u' + x' y z u' + x' y z' u' + x' y' z u' + x' y' z' u'$ je SDNF bulove funkcije f . Proste implikante su : $y'u', x'u', xyu, yz'u, x'y'z'$. Minimalne disjunktivne normalne forme su: $y'u' + x'u' + xyu + yz'u$ i $y'u' + x'u' + xyu + x'y'z'$.

2. Odrediti kompleksne brojeve α i β , kao i rešenja jednačine $(z - \alpha)^6 = \beta$, tako da 0 i 1 budu rešenja te jednačine, pri čemu imaginarni delovi svih rešenja su nenegativni. Koju figuru u kompleksnoj ravni obrazuju rešenja jednačine $(z - \alpha)^6 = \beta$?

Rešenje Jasno je da su $z_0 = 0$ i $z_1 = 1$ susedna temena pravilnoga šestougla $z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$, čija sva temena su sva rešenja jednačine $(z - \alpha)^6 = \beta$. Kompleksni broj α je centar toga šestougla i očividno treće teme jednakokraničnog trougla $z_0 z_1 \alpha$, pa je $\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ako sad u datu jednačinu $(z - \alpha)^6 = \beta$ uvrstimo $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ i $z = 0$, dobija se $\beta = 1$. Sada se lako dobijaju ostala rešenja rotacijom oko α za ugao $\frac{\pi}{3}$ tj. $z_k = \alpha + (z_{k-1} - \alpha)e^{i\frac{\pi}{3}}$ za $k = 2, 3, 4, 5$ odnosno $z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_4 = i\sqrt{3}$, $z_5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Neka je $(z - w)^4 = v$ kompleksna jednačina po nepoznatoj z . **(a)** Šta obrazuju u kompleksnoj ravni rešenja jednačine $(z - w)^4 = v$ i odrediti sve vrednosti za w ako su 0 i 1 rešenja jednačine $(z - w)^4 = v$. **(b)** Faktorirati nad poljima \mathbb{R} i \mathbb{C} polinom f definisan sa $f(w) = 4w^3 - 6w^2 + 4w - 1$.

Rešenje (a) Za fiksne w i v važi: ako je $v = 0$, tada jednačina ima jedno rešenje $z = w$ (tačka); ako je $v \neq 0$, tada jednačina ima 4 rešenja $z_i = w + \sqrt[4]{v}$ koja čine kvadrat sa težištem (presekom dijagonala) w i poluprečnikom opisane kružnice $\sqrt[4]{|v|}$. Ako su 0 i 1 dva od četiri temena tog kvadrata, tada je skup svih temena tog kvadrata $K_1 = \{0, 1, 1 + i, i\}$ ili $K_2 = \{0, 1, -1 - i, -i\}$ ili $K_3 = \{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\}$. Preseci dijagonala ovih kvadrata su redom $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ i $w_3 = \frac{1}{2}$. **(b)** $4w^3 - 6w^2 + 4w - 1 = 0 \Leftrightarrow -w^4 + 4w^3 - 6w^2 + 4w - 1 = -w^4 \Leftrightarrow -(w - 1)^4 = -w^4 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{w-1}{w}\right)^4 = 1 \wedge w \neq 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{w-1}{w} = \sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\} \wedge w \neq 1\right) \Leftrightarrow \frac{w-1}{w} \in \{i, -1, -i\} \Leftrightarrow w \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\}$, te je $f(w) = (w - \frac{1}{2})(w - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)(w - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = (w - \frac{1}{2})(w^2 - w + 2)$.

4. Naći proste implikante i minimalne disjunktivne normalne forme Bulove funkcije date tablicom:

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
y	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
z	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
u	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1

Rešenje Proste implikante su: $y'u', xyu, xzu, xy'z, x'z'u, x'y'z', yz'u$. Minimalne disjunktivne normalne forme su: $MDNF_1 = y'u' + xzu + xyu + x'z'u$, $MDNF_2 = y'u' + xzu + yz'u + x'y'z'$, $MDNF_3 = y'u' + xzu + yz'u + x'z'u$, $MDNF_4 = y'u' + xy'z + xyu + x'z'u$.

5. Neka je $A = \{f \mid f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}\}$. **(a)** Da li je (A, \circ) polugrupa s neutralnim elementom, gde je \circ kompozicija funkcija? **(b)** Da li je (A, \circ) grupa? **(c)** Naći sve $B \subseteq A$ takve da je (B, \circ) grupa.

Rešenje (a) (A, \circ) je grupoid jer po definiciji kompozicije funkcija iz $A = \{f \mid f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, gde je $f_1 = \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 01 \\ 01 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$ i $f_4 = \begin{pmatrix} 01 \\ 11 \end{pmatrix}$ sledi da je kompozicija svake dve funkcije iz skupa A opet funkcija iz skupa A . Asocijativnost kompozicije sledi iz $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$. Neutralni element je identička funkcija $f_2 = \begin{pmatrix} 01 \\ 01 \end{pmatrix}$, jer je za nju očividno $f_2 \circ f_i = f_i \circ f_2 = f_i$ za svako $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) (A, \circ) nije grupa jer naprimer element $f_1 = \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix}$ nema sebi inverzni zbog $f_1 \circ f_1 = f_1 \neq f_2, f_1 \circ f_2 = f_1 \neq f_2, f_1 \circ f_3 = f_1 \neq f_2, f_1 \circ f_4 = f_1 \neq f_2$.

(c) $B = \{f_2, f_3\}, B = \{f_2\}, B = \{f_1\}, B = \{f_4\}$.

6. Neka su $P = t^4 + t^3 + t^2 + 2$ i $Q = t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 4t + 3$ polinomi nad poljem \mathbb{Z}_5 . Naći polinom $R = NZD(P, Q)$ i faktorizirati polinome P, Q i R nad poljem \mathbb{Z}_5 .

Rešenje

$R = NZD(P, Q) = (t + 4)(t^2 + 4t + 1), P = (t + 4)(t^2 + 4t + 1)(t + 3)$ i $Q = (t + 4)(t^2 + 4t + 1)(t^2 + 2)$.

7. Neka su $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije definisane sa $f(x) = 1, g(x) = \cos x, h(x) = \cos^2 x$. Ispitati da li je $\mathbf{A} = (A, +, \cdot)$ prsten, gde je $A = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_{a,b}(x) = a + b \cos x \wedge a, b \in \mathbb{R}\}$, a $+$ i \cdot su uobičajene operacije sabiranja i množenja funkcija tj. $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ i $(\varphi \cdot \psi)(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

Rešenje

$(A, +)$ je grupoid jer je $f_{a,b}(x) + f_{c,d}(x) = a + b \cos x + c + d \cos x = a + c + (b + d) \cos x = f_{a+c, b+d}(x)$ tj. $f_{a+c, b+d} \in A$. Komutativnost i asocijativnost operacije sabiranja funkcija sledi iz definicije te operacije i komutativnosti i asocijativnosti sabiranja realnih brojeva. Neutralni element za operaciju $+$ je $f_{0,0}$. Inverzni za $f_{a,b}$ je $f_{-a,-b}$. Znači $\mathbf{A} = (A, +)$ je Abelova grupa.

(A, \cdot) nije grupoid jer je $f_{a,b}(x) \cdot f_{c,d}(x) = (a + b \cos x)(c + d \cos x) = ac + (ad + bc) \cos x + bd \cos^2 x$ što nije oblika $p + q \cos x$. Prema tome $\mathbf{A} = (A, +, \cdot)$ nije prsten.

8. (a) Naći vrednosti parametara $a, b, c \in \mathbb{R}$ za koje je $1 + i$ koren polinoma $f(x) = x^5 - 5x^4 + ax^3 - 16x^2 + bx + c$. (b) Faktorizirati nad poljem kompleksnih brojeva polinom $g(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 12$.

Rešenje a) Zamenom $x = 1 + i$ u $x^5 - 5x^4 + ax^3 - 16x^2 + bx + c = 0$ i izjednačavanjem realnog i imaginarnog dela sa 0 dobija se $b = -2a + 36$ i $c = 4a - 52$. Znači skup svih traženih trojki (a, b, c) je $\{(a, -2a + 36, 4a - 52) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

b) Kako se za $a = 10$ dobija baš $g(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 12$, to znači da je $g(1 + i) = g(1 - i) = 0$ tj. g je deljiv sa $(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2$, pa njihovim deljenjem se dobija da je $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 12 = (x^2 - 2x + 2)(x^3 - 3x^2 + 2x - 6)$. Potencijalni kandidati za racionalne nule polinoma $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ su $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ i efektivnim proveravanjem (Hornerovom šemom) dobijamo da je 3 njegova nula, što znači da je $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x - 3)(x^2 + 2)$. Najzad imamo da je $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 12 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x - 3)(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$.

9. Neka su $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ funkcije definisane sa

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = 1 - x \quad f_4(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

i neka je $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$. Dokazati da je (G, \circ) grupa. Da li je grupa (G, \circ) izomorfna sa grupom $(\mathbb{Z}_6, +)$ (odgovor obrazložiti)?

Rešenje

(G, \circ) je grupoid jer zatvorenost operacije \circ sledi iz Kejljeve tablice. Asocijativnost važi za kompoziciju funkcija. Prva vrsta je jednaka graničnoj vrsti i prva kolona je jednaka graničnoj koloni što znači da je f_1 neutralni element. Kako se taj neutralni element pojavljuje tačno jedanput u svakoj vrsti i koloni i kako je simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu to sledi da svaki element iz G ima sebi inverzni. Znači (G, \circ) jeste grupa. Kako grupa (G, \circ) nije komutativna, jer je $f_2 \circ f_3 \neq f_3 \circ f_2$, to sledi da (G, \circ) i $(\mathbb{Z}_6, +)$ nisu izomorfne jer $(\mathbb{Z}_6, +)$ jeste komutativna grupa.

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

10. Odrediti realne brojeve a i b tako da polinom $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ bude potpun kvadrat, a zatim izvršiti faktorizaciju nad poljima \mathbb{C}, \mathbb{R} i \mathbb{Q} .

Rešenje Iz $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 = (\pm x^2 + cx + d)^2 = x^4 + c^2x^2 + d^2 \pm 2cx^3 \pm 2dx^2 + 2cdx$ sledi sistem jednačina $a = \pm 2c, b = c^2 \pm 2d, -8 = 2cd, 1 = d^2$, čijim rešavanjem dobijamo da je

$(a, b) \in \{(-8, 18), (8, 14)\}$. Znači $p(x) = (x^2 \pm (4x - 1))^2$. Nad poljem \mathbb{Q} ne postoji faktorizacija, a nad poljima \mathbb{C} odnosno \mathbb{R} faktorizacija je $(x^2 + 4x - 1)^2 = (x + 2 - \sqrt{5})^2(x + 2 + \sqrt{5})^2$ tj. $(x^2 - 4x + 1)^2 = (x - 2 - \sqrt{3})^2(x - 2 + \sqrt{3})^2$.

11. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$ i $z_2 = -5 - i$. Naći kompleksni broj z takav da je $|z| = 2\sqrt{26}$ i $\sphericalangle z_1 O z = \frac{1}{3} \sphericalangle z_1 O z_2$, gde su svi uglovi orijentisani.

Rešenje Kako je $\frac{z}{|z|} = \frac{z_1}{|z_1|} \cdot e^{i\theta}$, gde je $\theta = \frac{1}{3} \sphericalangle z_1 O z_2 = \frac{1}{3} \arg \frac{z_2}{z_1} = \frac{\pi}{4}$, sledi $z = -2 + 10i$.

12. Odrediti skup rešenja jednačine $|\frac{z}{1-iz}| = 1$, nacrtati ga u kompleksnoj ravni i odrediti skupove njihovih argumenata i modula.

Rešenje $|\frac{z}{1-iz}| = 1 \Leftrightarrow |z| = |1-iz| \Leftrightarrow z\bar{z} = (1-iz)\overline{(1-iz)} \Leftrightarrow z\bar{z} = (1-iz)(1+i\bar{z}) \Leftrightarrow z - \bar{z} = -i \Leftrightarrow 2iI_m(z) = -i \Leftrightarrow I_m(z) = -\frac{1}{2}$. Znači, skup rešenja date jednačine u kompleksnoj ravni je prava paralelna realnoj osi koja seče imaginarnu osu u $-\frac{1}{2}i$. Skup argumenata je $(-\pi, 0)$, a skup modula je skup svih realnih brojeva većih ili jednakih od $\frac{1}{2}$.

13. Ispitati da li je $(S, *, \cdot, f, 0, 1)$ Bulova algebra gde je $S = \{0, 1\}$ podskup skupa celih brojeva, operacija f definisana sa $f(x) = 1 - x$ i operacija $*$ definisana sa $x * y = f(f(x) \cdot f(y))$ (tj. $x * y = x + y - xy$), gde su $-$ i \cdot poznate operacije oduzimanja i množenja u skupu celih brojeva \mathbb{Z} .

Rešenje Dokazaćemo da bijekcija $F : S \rightarrow \{\perp, \top\}$ definisana sa $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \perp & \top \end{pmatrix}$ jeste homomorfizam (tj. izomorfizam) strukture $(S, *, \cdot, f, 0, 1)$ i Bulove algebre $(\{\perp, \top\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$. Izomorfizam je očevidan

iz sledećih tablica.

$*$	0	1	\vee	\perp	\top	\cdot	0	1	\wedge	\perp	\top	x	$f(x)$	x	$\neg x$
0	0	1	\perp	\perp	\top	0	0	0	\perp	\perp	\perp	0	1	\perp	\top
1	1	1	\top	\top	\top	1	0	1	\top	\perp	\top	1	0	\top	\perp

14. a) Rešiti jednačinu $(\frac{-w}{1-w})^5 = 1$ u skupu kompleksnih brojeva. b) Dokazati da jednačina $(\frac{-w}{1-w})^5 = 1$ je ekvivalentna sa jednačinom $1 - 5w + 10w^2 - 10w^3 + 5w^4 = 0$. c) Korišćenjem rezultata pod a) i b) dokazati da je $1 - 5w + 10w^2 - 10w^3 + 5w^4 = 5(w^2 - w + \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{5}})(w^2 - w + \frac{1}{4\sin^2 \frac{2\pi}{5}})$ i da je $\sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{5}{4}$ i $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Ako se umesto 5 uzme $2\ell + 1$ dobija se uopštenje $\sin \frac{\pi}{2\ell+1} \sin \frac{2\pi}{2\ell+1} \dots \sin \frac{\ell\pi}{2\ell+1} = \frac{\sqrt{2\ell+1}}{2^\ell}$.

Rešenje a) Domen rešavanja jednačine je $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. $(\frac{-w}{1-w})^5 = 1 \Leftrightarrow \frac{w}{w-1} = \sqrt[5]{1} \in \{e^{\frac{2k\pi}{5}i} | k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$. Jednačina $\frac{w}{w-1} = 1$ nema rešenja, te je $(\frac{-w}{1-w})^5 = 1 \Leftrightarrow w = (w-1)e^{\frac{2k\pi}{5}i}, k \in \{-2, -1, 1, 2\} \Leftrightarrow w(1 - e^{\frac{2k\pi}{5}i}) = -e^{\frac{2k\pi}{5}i}, k \in \{-2, -1, 1, 2\} \Leftrightarrow w = \frac{e^{\frac{2k\pi}{5}i}}{e^{\frac{2k\pi}{5}i} - 1} = \frac{e^{\frac{2k\pi}{5}i}}{e^{\frac{k\pi}{5}i}(e^{\frac{k\pi}{5}i} - e^{-\frac{k\pi}{5}i})} = \frac{e^{\frac{k\pi}{5}i}}{2i \sin \frac{k\pi}{5}}, k \in \{-2, -1, 1, 2\}$ b) $(\frac{-w}{1-w})^5 = 1 \Leftrightarrow -w^5 = (1-w)^5 = 1 - 5w + 10w^2 - 10w^3 + 5w^4 - w^5 \Leftrightarrow 1 - 5w + 10w^2 - 10w^3 + 5w^4 = 0$. c) Iz b) sledi da su rešenja jednačine $(\frac{-w}{1-w})^5 = 1$ koreni polinoma $1 - 5w + 10w^2 - 10w^3 + 5w^4$, te je $1 - 5w + 10w^2 - 10w^3 + 5w^4 = 5(w^2 - 2Re(\frac{e^{\frac{\pi}{5}i}}{2i \sin \frac{\pi}{5}})w + |\frac{e^{\frac{\pi}{5}i}}{2i \sin \frac{\pi}{5}}|^2)(w^2 - 2Re(\frac{e^{\frac{2\pi}{5}i}}{2i \sin \frac{2\pi}{5}})w + |\frac{e^{\frac{2\pi}{5}i}}{2i \sin \frac{2\pi}{5}}|^2) = 5(w^2 - w + \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{5}})(w^2 - w + \frac{1}{4\sin^2 \frac{2\pi}{5}})$. Iz $1 - 5w + 10w^2 - 10w^3 + 5w^4 = 5(w^2 - w + \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{5}})(w^2 - w + \frac{1}{4\sin^2 \frac{2\pi}{5}}) = 5w^4 - 10w^3 + 5(\frac{1}{4\sin^2 \frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{5}} + 1)w^2 - 5(\frac{1}{4\sin^2 \frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{5}})w + \frac{5}{16\sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5}}$ izjednačavanjem koeficijenata uz w i slobodnih članova sledi tvrđenje.

15. Neka je na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bez nule definisana relacija $\rho: z_1 \rho z_2 \Leftrightarrow \arg(z_1) = \arg(z_2)$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. Dati geometrijsku interpretaciju klasa iz faktor skupa \mathbb{C}^*/ρ . Dokazati da je $(\mathbb{C}^*/\rho, \circ)$ komutativna grupa, gde je operacija \circ definisana sa $C_{z_1} \circ C_{z_2} = C_{z_1 z_2}$, za svake dve klase C_{z_1} i C_{z_2} iz \mathbb{C}^*/ρ . Dokazati da je funkcija $\varphi: \mathbb{C}^*/\rho \rightarrow \{e^{i\theta} | \theta \in (-\pi, \pi]\}$ definisana sa $\varphi(C_z) = e^{i \arg z}$ izomorfizam grupa $(\mathbb{C}^*/\rho, \circ)$ i $(\{e^{i\theta} | \theta \in (-\pi, \pi]\}, \cdot)$.

Rešenje Refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ slede iz refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti relacije $=$. Kako je $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ ako i samo ako su vektori $\vec{Oz_1}$ i $\vec{Oz_2}$ istog pravca i

smera tj. ako i samo ako se poklapaju poluprava koja ishodi iz O i sadrži z_1 i poluprava koja ishodi iz O i sadrži z_2 , to klasu nekog elementa $z \in \mathbb{C}^*$ čine svi oni $w \in \mathbb{C}^*$ koji pripadaju polpravoj koja ishodi iz O i sadrži z . Dakle, klase možemo interpretirati kao polprave koje ishode iz koordinatnog početka. Operacija \circ je dobro definisana jer iz $C_{z_1} = C_{w_1} \wedge C_{z_2} = C_{w_2}$ sledi $\arg(z_1) = \arg(w_1) \wedge \arg(z_2) = \arg(w_2)$, odakle sledi $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(w_1) + \arg(w_2) = \arg(w_1 w_2)$, te je $C_{z_1} \circ C_{z_2} = C_{z_1 z_2} = C_{w_1 w_2} = C_{w_1} \circ C_{w_2}$. Operacija \circ je očigledno zatvorena ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{C}^*$), asocijativna ($(C_{z_1} \circ C_{z_2}) \circ C_{z_3} = C_{(z_1 z_2) z_3} = C_{z_1 (z_2 z_3)} = C_{z_1} \circ (C_{z_2} \circ C_{z_3})$), komutativna, neutralni element je pozitivni deo realne ose $C_1 = C_{156} = \dots$ ($C_1 \circ C_z = C_{1 \cdot z} = C_z$), a inverzni element klase C_z je klasa $C_{\bar{z}}$ ($C_z \circ C_{\bar{z}} = C_{z\bar{z}} = C_{|z|^2} = C_1$, jer je $|z|^2$ pozitivan realan broj).

Funkcija φ je injektivna jer iz $\varphi(C_z) = e^{i \arg z} = e^{i \arg w} = \varphi(C_w)$ sledi $\arg z = \arg w$, odakle je $z \rho w$ tj. $C_z = C_w$. Funkcija φ je i surjektivna jer za proizvoljno $e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ važi $\varphi(C_{e^{i\theta}}) = e^{i\theta}$. Funkcija φ je homomorfizam jer važi $\varphi(C_z \circ C_w) = \varphi(C_{zw}) = e^{i \arg(zw)} = e^{i(\arg z + \arg w)} = e^{i \arg z} e^{i \arg w} = \varphi(C_z) \varphi(C_w)$.

16. Polinom P je definisan sa $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256$. Napisati polinom $P : \mathbf{a}$) po stepenima od $x - 1$, \mathbf{b}) kao proizvod četiri kvadratna trinoma čiji su koeficijenti realni brojevi.

Rešenje Primenom algoritma za deljenje polinoma dobijamo $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256 = (x - 1)(x^7 + x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 77x + 77) + 333 = (x - 1)((x - 1)(x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 22x + 99) + 176) + 333 = \dots = (x - 1)^8 + 8(x - 1)^7 + 24(x - 1)^6 + 32(x - 1)^5 + 26(x - 1)^4 + 40(x - 1)^3 + 128(x - 1)^2 + 176(x - 1) + 333$.

Kako je polinom $P(x) = x^8 - 4x^6 + 16x^4 - 64x^2 + 256$ jednak zbiru prvih 5 članova geometrijskog niza sa prvim članom 256 i koeficijentom progresije $-\frac{1}{4}x^2$, primenom formule za zbir članova geometrijskog

$$niza dobijamo $P(x) = 256 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{4}x^2)^5}{1 - (-\frac{1}{4}x^2)} = 256 \cdot \frac{1 + \frac{1}{4^5}x^{10}}{1 + \frac{1}{4}x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{4^5}x^{10} = 0 \wedge 1 + \frac{1}{4}x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$$

$$x = \sqrt[10]{-4^5} = \sqrt[10]{4^5 e^{\pi i}} = \{2e^{\frac{(2k+1)\pi}{10}} \mid k \in \mathbb{Z}\} \wedge x \neq \sqrt{-4} = \{2i, -2i\} \Leftrightarrow x \in \{2e^{\pm \frac{\pi}{10}i}, 2e^{\pm \frac{3\pi}{10}i}, 2e^{\pm \frac{7\pi}{10}i}, 2e^{\pm \frac{9\pi}{10}i}\}.$$

Kako je $(x - 2e^{\varphi i})(x - 2e^{-\varphi i}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(2e^{\varphi i})x + |2e^{\varphi i}|^2 = x^2 - 4 \cos \varphi x + 4$, sledi da je

$$P(x) = (x^2 - 4 \cos \frac{\pi}{10} x + 4)(x^2 - 4 \cos \frac{3\pi}{10} x + 4)(x^2 - 4 \cos \frac{7\pi}{10} x + 4)(x^2 - 4 \cos \frac{9\pi}{10} x + 4).$$

17. Ispitati svodljivost polinoma $x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ redom nad poljima \mathbb{Q} , \mathbb{R} i \mathbb{C} , a zatim ga predstaviti kao proizvod nesvodljivih polinoma redom nad svim tim poljima.

Rešenje Svaki polinom stepena većeg od 2 je svodljiv i nad \mathbb{R} i nad \mathbb{C} , a pošto je broj $1 \in \mathbb{Q}$ očigledno jedan koren polinoma, to je on svodljiv i nad \mathbb{Q} . Nad \mathbb{C} možemo polinom posmatrati kao zbir prvih 8 članova geometrijskog niza sa prvim članom -1 i koeficijentom progresije $-x$, pa dobijamo $P(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x - e^{\frac{\pi}{4}i})(x - e^{-\frac{\pi}{4}i})(x - e^{\frac{\pi}{2}i})(x - e^{-\frac{\pi}{2}i})(x - e^{\frac{3\pi}{4}i})(x - e^{-\frac{3\pi}{4}i})$, a nad \mathbb{R} je $P(x) = (x - 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$. Kako $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ i $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ nisu polinomi nad \mathbb{Q} , a njihovim množenjem dobijamo $x^4 + 1$, to faktorizacija nad \mathbb{Q} glasi $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$.

18. Data je Bulova funkcija

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1

Naći $SKNF$, proste implikante i minimalne DNF .

Rešenje $SKNF = (x + y + z' + u)(x + y + z' + u')(x' + y + z' + u)(x' + y' + z + u)(x' + y' + z' + u)$. Proste implikante: $x'y, x'z', yu, xy'z, y'z'u', xy'u', xzu$. $MDNF_1 : x'y + x'z' + yu + xy'z + y'z'u'$, $MDNF_2 : x'y + x'z' + yu + xy'z + xy'u'$, $MDNF_3 : x'y + x'z' + yu + xy'u' + xzy$.

19. Ostaci pri deljenju polinoma P sa $(x - 1)$, $(x - 2)$ i $(x + 1)$ su redom 2, 3 i 6. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma P sa $(x - 1)(x - 2)(x + 1)$.

Rešenje Iz uslova zadatka i teoreme o deljenju polinoma sledi $P(x) = (x - 1)q_1(x) + 2$, $P(x) = (x - 2)q_2(x) + 3$ i $P(x) = (x + 1)q_3(x) + 6$, kao i $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)q(x) + ax^2 + bx + c$. Ako

u poslednju jednakost uvrstimo redom brojeve 1, 2, -1 to korišćenjem i prve tri jednakosti dobijamo sistem jednačina $2 = P(1) = a + b + c$, $3 = P(2) = 4a + 2b + c$ i $6 = P(-1) = a - b + c$, čije rešenje je $(a, b, c) = (1, -2, 3)$.

20. Data je Bulova funkcija sledećom tabelom:

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1

a) Napisati njenu SKNF i SDNF.
b) Naći proste implikante.
c) Naći minimalne DNF.

Rešenje Savršena disjunktivna normalna forma je

$$f(x, y, z, u) = x'y'z'u' + x'y'z'u + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xy'z'u + xyz'u + xyzu$$

Savršena konjunktivna normalna forma je $f(x, y, z, u) = (x+y+z'+u)(x+y'+z+u)(x+y'+z'+u) \cdot (x'+y+z+u')(x'+y+z'+u')(x'+y'+z+u)(x'+y'+z'+u)$. Proste implikante su: $yu, x'u, x'y'z', y'z'u', xy'u'$. Minimalne DNF su: $f(x, y, z, u) = yu + xy'u' + x'u + y'z'u'$ i $f(x, y, z, u) = yu + xy'u' + x'u + x'y'z'$.

21. Neka je $A = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\}$. Dokazati da je (A, \cdot) komutativna grupa koja je izomorfna sa grupom $(\mathbb{Z}_5, +)$.

Rešenje $A = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} | z \in \sqrt[5]{1}\} = \{e^{\frac{2k\pi}{5}i} | k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$. Neka je $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}_5$ funkcija definisana sa $\varphi(e^{\frac{2k\pi}{5}i}) = k, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcija φ je po konstrukciji očigledno bijektivna, a jeste i homomorfizam jer je $\varphi(e^{\frac{2k\pi}{5}i} e^{\frac{2m\pi}{5}i}) = \varphi(e^{\frac{2(k+m)\pi}{5}i}) = k +_5 m$ za sve $k, m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dakle, φ je izomorfizam, te su strukture (A, \cdot) i $(\mathbb{Z}_5, +)$ izomorfne, te kako je $(\mathbb{Z}_5, +)$ komutativna grupa, zbog izomorfizma je i (A, \cdot) komutativna grupa.

22. Izračunati polinom $R(x)$ koji je najveći zajednički delilac polinoma $P(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ i $Q(x) = x^8 + x^6 + 2x^4 + x^2 + 1$ i faktorizirati polinome $P(x), Q(x)$ i $R(x)$ nad poljima \mathbb{C}, \mathbb{R} i \mathbb{Q} .

Rešenje

$$R(x) = x^4 + 1 = (x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1),$$

$$P(x) = (x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + i)(x - i) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1),$$

$$Q(x) = (x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^4 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

23. Odrediti vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ tako da $1 + i$ bude koren polinoma $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + ax^2 + 12x - 6$, i za tu vrednost parametra a faktorizirati $P(x)$ nad poljem realnih brojeva.

Rešenje Iz $P(1+i) = 22i + ai = 0$ sledi $a = -11$. Za polinom P sa realnim koeficijentima mora tada biti i $P(1+i) = P(\overline{1+i}) = P(1-i) = 0$, tj. polinom P mora biti deljiv sa $(x - (1+i))(x - (1-i)) = x^2 - 2x + 2$. Deljenjem se dobija $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^3 - x^2 + 3x - 3)$. Proverom kandidata $\pm 1, \pm 3$ za racionalne korene polinoma $x^3 - x^2 + 3x - 3$ se dobija da 1 jeste njegov koren, te je $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x^2 + 3)$.

24. Neka su a, b, c, d funkcije iz skupa \mathbb{R}^2 u skup \mathbb{R}^2 definisane sa

$$a(x, y) = (-x, -y), b(x, y) = (-x, y), c(x, y) = (x, -y), d(x, y) = (x, y),$$

i neka je $F = \{a, b, c, d\}$.

a) Dokazati da je $\mathcal{F} = (F, \circ)$ komutativna grupa (\circ je kompozicija funkcija).

b) Naći sve podgrupe grupe \mathcal{F} .

Rešenje

a) Popunjavanjem Kejljeve tablice vidimo da je operacija zatvorena u F . Npr. imamo da je $(a \circ b)(x, y) = a(b(x, y)) = a(-x, y) = -(-x), -y = (x, -y) = c(x, y)$, odnosno $a \circ b = c$. Kompozicija funkcija je asocijativna operacija (teorema), i takođe iz tablice vidimo da je neutralni element d , kao i da je svaki element sam sebi inverzan.

\cdot	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

b) Osim trivijalnih podgrupa \mathcal{F} i $(\{d\}, \circ)$, zbog Lagranžove teoreme mogu da postoje samo još dvoelementne podgrupe, i one moraju sadržati neutralni element. Ispitivanjem tih kandidata $(\{d, a\}, \circ), (\{d, b\}, \circ)$ i $(\{d, c\}, \circ)$, tj. iz njihovih Kejljevih tablica vidimo da to zaista jesu podgrupe.

25. Neka su p_1, p_2 i p_3 funkcije (tj. permutacije) skupa $S = \{1, 2, 3\}$ definisane sa

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

i neka je \circ kompozicija funkcija skupa $A = \{p_1, p_2, p_3\}$. Napisati Kejljev tablicu operacije \circ i ispitati da li je (A, \circ) Abelova grupa.

Rešenje

Tablica se dobija korišćenjem definicija funkcija p_1, p_2 i p_3 i kompozicije. Na primer,

$$(p_1 \circ p_2)(1) = p_1(p_2(1)) = p_1(2) = 1. \quad \text{Analogno je } (p_1 \circ p_2)(2) = 2 \text{ i } (p_1 \circ p_2)(3) = 3,$$

\circ	p_1	p_2	p_3
p_1	p_2	p_3	p_1
p_2	p_3	p_1	p_2
p_3	p_1	p_2	p_3

što znači da je $p_1 \circ p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = p_3$. Na isti način popunjavamo ostatak tablice.

p_3 je neutralni elemenat jer su treća vrsta i treća kolona jednake graničnoj vrsti, odnosno graničnoj koloni. Svaki elemenat ima sebi inverzni jer se p_3 pojavljuje u svakoj vrsti i koloni tačno jedanput i simetrično je raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu. Operacija je komutativna jer je cela tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Kompozicija funkcija je asocijativna.

26. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $z^3 = \bar{z} + |z|$. **Rešenje** Smenom $z = \rho e^{i\varphi}$, za $\rho \geq 0$ i $\varphi \in (-\pi, \pi]$ sledi

$$\begin{aligned} z^3 = \bar{z} + |z| &\Leftrightarrow \rho^3 e^{3i\varphi} = \rho e^{-i\varphi} + \rho = \rho(1 + e^{-i\varphi}) \Leftrightarrow \rho^3 e^{3i\varphi} = \rho e^{-\frac{i\varphi}{2}} (e^{\frac{i\varphi}{2}} + e^{-\frac{i\varphi}{2}}) = 2\rho \cos \frac{\varphi}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ &\Leftrightarrow (\rho^3 = 2\rho \cos \frac{\varphi}{2} \wedge 3\varphi = -\frac{\varphi}{2} + 2k\pi) \Leftrightarrow (\rho = 0 \vee (\rho^2 = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \wedge 7\varphi = 4k\pi)) \Leftrightarrow (z = 0 \vee (\rho = \sqrt{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \wedge \varphi = \frac{4}{7}k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \varphi \in (-\pi, \pi])) \\ &\Leftrightarrow (z = 0 \vee (\rho = \sqrt{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \wedge \varphi \in \{0, \pm \frac{2\pi}{7}, \pm \frac{4\pi}{7}, \pm \frac{6\pi}{7}\})) \\ &\Leftrightarrow z \in \{0\} \cup \left\{ \sqrt{2 \cos \frac{k\pi}{7}} e^{\pm \frac{2k\pi}{7}} \mid k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \right\}. \end{aligned}$$

27. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu $z^3 = i\bar{z}$.

Rešenje Uvođenjem smene $z = \rho e^{i\varphi}$, za $\rho \geq 0$ i $\varphi \in (-\pi, \pi]$, dobijamo

$$\begin{aligned} (\rho e^{i\varphi})^3 = i \overline{\rho e^{i\varphi}} &\Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \rho e^{-i\varphi} \Leftrightarrow \rho^3 e^{3i\varphi} = \rho e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \Leftrightarrow (\rho^3 = \rho \wedge 3\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\rho \in \{0, 1\} \wedge \varphi = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \{-2, -1, 0, 1\}) \Leftrightarrow z \in \{0, e^{-\frac{7\pi}{8}}, e^{-\frac{3\pi}{8}}, e^{\frac{\pi}{8}}, e^{\frac{5\pi}{8}}\}. \end{aligned}$$

28. Neka je $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1$ polinom. **a)** Izračunati $f(e^{\frac{\pi}{3}i})$. **b)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem racionalnih brojeva \mathbb{Q} . **c)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem \mathbb{Z}_3 . Napomena: Nad \mathbb{Z}_3 je $x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 = x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x + 1$

Rešenje Nad \mathbb{Q} je $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x + 1)$, a nad \mathbb{Z}_3 je $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 2x + 1)(x^3 + 2x + 1) = (x + 1)^2(x^3 + 2x + 1)$.

29. Dat je polinom $f(x) = x^8 + x^4 + 1$. **(a)** Izračunati $f(e^{\frac{\pi}{6}i})$, $f(e^{\frac{\pi}{3}i})$, $f(e^{\frac{2\pi}{3}i})$ i $f(e^{\frac{5\pi}{6}i})$. **(b)** Napisati polinom $f(x)$ kao proizvod nesvodljivih polinoma redom nad poljima \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} i \mathbb{Z}_3 .

30. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za strukturu $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$, gde su za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ funkcije $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisane sa $f_1(x, y) = (-y, -x)$, $f_2(x, y) = (y, x)$, $f_3(x, y) = (x, y)$, $f_4(x, y) = (-x, -y)$.

31. Neka je $f(x) = x^5 + x + 1$ polinom. **a)** Izračunati $f(e^{\frac{2\pi}{3}i})$. **b)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem racionalnih brojeva \mathbb{Q} . **c)** Napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem \mathbb{Z}_3 .