MATRICE I DETERMINANTE

Za određivanje broja rešenja sistema linearnih jednačina, kao i za samo izračunavanje tih rešenja ako postoje, dovoljno je poznavati koeficijente sistema i slobodne članove.

Posmatranje ovih veličina zapisanih u obliku **pravougaone šeme brojeva** zahteva uvođenje dva nova pojma - pojma matrice i pojma determinante.

Definicija matrice i osnovni pojmovi

Matrica je pravougaona šema brojeva i te brojeve zovemo **elementi matrice**, horizontalne redove **vrste**, a veritkalne **kolone**.

Broj vrsta i kolona određuje **format matrice** - za matricu koja ima m vrsta i n kolona kažemo da je formata $m \times n$. Ako element i-te vrste i j-te kolone označimo sa a_{ij}, onda je matrica A sa elementima a_{ij} data sa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ili kraće $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$, tj. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Izdvajamo:

- **nula matrica** - matrica čiji su svi elementi jednaki nuli

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

  oznaka je 0

- **matrica kolona** je matrica formata $m \times 1$, $m \in \mathbb{N}$, tj. svaka matrica koja ima samo jednu kolonu

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

- **matrica vrsta** je matrica formata $1 \times n$, $n \in \mathbb{N}$, tj. svaka matrica koja ima samo jednu vrstu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 15 & -3 & 4 & 50 \end{bmatrix}, \ldots$$

- **kvadratna matrica** je matrica koja ima jednak broj vrsta i kolona, tj. $m = n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 2 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 13 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 16 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \ldots$$

  Kod kvadratne matrice elementi a_{ii}, $i = 1, \ldots n$ čine **glavnu dijagonalu**, dok **sporednu dijagonalu** čine elementi koji se nalaze na dijagonali koja spaja desni gornji ugao sa levim donjim uglom.

- **jedinična matrica** je *kvadratna matrica* kod koje su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1, a svi elementi van glavne dijagonale jednaki 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

  oznaka je I ili E, a kada želimo da naglasimo format jedinične matrice, onda $I_2, I_3, \ldots$

Jednakost matrica

Dve **matrice su jednake** ako i samo ako imaju **isti format** i ako su im **odgovarajući elementi jednaki**.

Osnovne operacije sa matricama

Osnovne operacije sa matricama su:

- sabiranje matrica
- množenje matrice realnim brojem
- množenje matrica.

Sabiranje matrica

Sabirati se mogu samo matrice **istog formata**. Sabiranjem dve matrice formata $m \times n$ dobija se matrica formata $m \times n$ čiji **elemetni su jednaki zbiru odgovarajućih elemenata matrica koje se sabiraju**.

Dakle, ako treba sabrati matrice

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{i} \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}, \quad \text{onda je} \quad A + B = C,$$

$$\text{gde je} \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Množenje matrice realnim brojem

Matrica se množi realnim brojem α tako što se **svaki element matrice pomnoži tim brojem**.

Dakle, ako je

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{i} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{onda je} \quad \alpha A = C$$

$$\text{gde je} \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Množenjem matrice A brojem -1 dobija se **suprotna matrica** $-A$.

Oduzimanje matrica, $A-B$, je sabiranje matrice A i matrice $-B$ koja je suprotna matrici B.

Primer: Odrediti matricu A za koju je $2A-4I=B$ gde je $B=\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Množenje matrica

Proizvod matrica postoji samo ako je **broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge matrice**, tj. ako je broj elemenata u vrsti prve matrice jednak broju elemenata u koloni druge matrice.

Elementi matrice $C_{m\times n} = A_{m\times r}\cdot B_{r\times n}$ se dobijaju skalarnim množenjem odgovarajuće vrste matrice A i kolone matrice B. **Skalarni proizvod** vrste matrice A i kolone matrice B je broj koji se dobija množenjem odgovarajućih elemenata i sabiranjem dobijenih proizvoda. Skalarni proizvod i-te vrste i j-te kolone je broj

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}.$$

Dakle, ako je

$$A=[a_{ij}]_{m\times r} \quad \text{i} \quad B=[b_{ij}]_{r\times n}, \quad \text{onda je} \quad A\cdot B = C,$$

$$\text{gde je} \quad C=[c_{ij}]_{m\times n}, \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj},$$
$$i=1,\ldots,m, \qquad j=1,\ldots,n.$$

Primer: Odrediti $A \cdot B$ za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrica u opštem slučaju nije komutativna operacija! Može se pokazati da je množenje matrica asocijativno i da važi distributivnost u odnosu na operaciju sabiranja matrica, tj.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B).$$

Primer: Za matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ odrediti $A \cdot B, B \cdot A, A \cdot C$ i $C \cdot A$.

Za jediničnu matricu važi

$$A_{m\times n}I_n = I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}.$$

Dakle, množenje sa jediničnom matricom ne menja polaznu matricu.

Stepenovanje matrica

Stepenovanje matrice prirodnim brojem se definiše samo za kvadratne matrice:

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^n = A^{n-1}\cdot A, \quad n = 2,3,\ldots$$

Primer: Odrediti A^5 za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Svakom sistemu linearnih jednačina odgovara **matrica sistema** koju čine koeficijenti sistema. Slobodnim članovima odgovara **matrica kolona slobodnih članova**, a nepoznatima odgovara **matrica kolona nepoznatih**.

Primer: Sistemu linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & 0 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}$ odgovara matrični zapis $A \cdot X = B$ gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Determinante

Determinanta je vrednost koja se, na određeni način, pridružuje **kvadratnoj** matrici ili opštije, bilo kojoj kvadratnoj šemi brojeva.

Determinantu koja odgovara matrici A označavamo sa $det(A)$ ili $|A|$.

Determinanta reda 2, koja odgovara matrici formata 2×2, se sastoji od četiri elementa i zapisuje se u obliku

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Njena vrednost se računa tako što se od proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali oduzme proizvod elemenata na sporednoj dijagonali, tj.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.}$$

Primer: Izračunati determinantu koja odgovara matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Determinanta reda 3 koja odgovara matrici formata 3×3 je određena sa 9 elemenata i zapisuje se u obliku

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ako izostavimo vrstu i kolonu u kojoj se nalazi jedan element determinante (odnosno kvadratne matrice), preostali elementi će određivati determinantu nižeg reda koju nazivamo **minor** posmatranog elementa.

Ako se ovaj minor pomnoži sa $(-1)^{i+j}$, gde je i redni broj vrste, a j redni broj kolone posmatranog elementa, dobijamo **kofaktor** posmatranog elementa.

Na primer, minor elementa c_2 je

$$C_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3 - b_1a_3,$$

a kofaktor

$$\tilde{C}_2 = (-1)^{2+3}C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - b_1a_3).$$

Izračunavanje vrednosti determinante reda 3 se može svesti na računanje vrednosti određenih determinanti reda 2 razvijanjem determinante po nekoj od vrsta ili kolona.

Determinanta se razvija po elementima neke vrste (kolone) tako što se svaki elemenat posmatrane vrste (kolone) pomnoži odgovarajućim kofaktorom i dobijene vrednosti saberu.

Može se pokazati da razvoj po bilo kojoj vrsti ili koloni uvek daje isti rezultat koji predstavlja vrednost determinante.

Razvoj determinante reda 3 **po elementima prve vrste** je

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\
&= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3.
\end{aligned}$$

Razvoj determinante reda 3 **po elementima druge kolone** je

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + b_2(a_1c_3 - c_1a_3) - b_3(a_1c_2 - c_1a_2) \\ &= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3.\end{aligned}$$

Formula za izračunavanje vrednosti determinante reda 3 se zove **Sarusovo pravilo**:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3.$$

Primer: Izračunati vrednost determinante koja odgovara matrici $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 9 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Primer: Izračunati vrednost determinante koja odgovara matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Osobine determinanti

Osobine determinanti ćemo pokazati na determinanti reda 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

1. Determinanta ne menja vrednost ako vrste i kolone zamene ulogu.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

2. Ako dve vrste (kolone) zamene mesta, vrednost determinante menja znak.

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - b_1a_2).$$

3. Determinanta se množi brojem tako što se svi elementi **jedne** vrste (kolone) pomnože tim brojem.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda a_1b_2 - \lambda b_1a_2 = \lambda(a_1b_2 - b_1a_2) = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. Determinanta ne menja vrednost ako se elementi jedna vrste (kolone) dodaju odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone) prethodno pomnožene nekim brojem različitim od nule.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1b_2 + \lambda a_2b_2 - b_1a_2 - \lambda b_2a_2 \\ &= a_1b_2 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

5. Ako su svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki nuli, vrednost determinante je nula.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \cdot b_2 - 0 \cdot a_2 = 0.$$

6. Ako su elementi jedne vrste proporcionalni (ili jednaki) odgovarajućim elementima neke druge vrste, vrednost determinante je jednaka nuli.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix} = a\lambda b - b\lambda a = 0.$$

7. Ako elemente jedne vrste pomnožimo kofaktorima odgovarajućih elemenata neke druge vrste i dobijene proizvode saberemo, dobićemo vrednost 0.

8. Ako je A kvadratna matrica reda n onda važi

$$det(\alpha A) = \alpha^n det(A).$$

9. Ako su A i B kvadratne matrice istog reda onda važi

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B).$$

Primer: Izračunati $D = \begin{vmatrix} 1 & 21 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ računanjem samo jedne determinante reda 2.

Primer: Izračunati $D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Inverzna matrica

Inverzna matrica za kvadratnu matricu A, u oznaci A^{-1}, je matrica za koju važi
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Transponovana matrica matrice A, u oznaci A^T (ili A') je matrica kod koje su vrste i kolone zamenile uloge.

Primer: Odrediti transponovanu matricu za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 21 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 21 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

Osobine:

1. Ako je A kvadratna matrica, onda važi $|A^T| = |A|$.
2. $(A^T)^T = A$.
3. Ako su A i B matrice istog formata, onda važi $(A+B)^T = A^T + B^T$.
4. Ako su A i B kvadratne matrice, onda važi $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Adjungovana matrica za matricu A, u oznaci A^* je matrica čiji su elementi kofaktori odgovarajućih elemenata od A^T.

Posmatrajmo proizvoljnu matricu A formata 3×3 i njenu adjungovanu matricu A^*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A^* = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Kada se ove dve matrice pomnože, dobija se

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{13}\tilde{A}_{13} & a_{11}\tilde{A}_{21} + a_{12}\tilde{A}_{22} + a_{13}\tilde{A}_{23} & a_{11}\tilde{A}_{31} + a_{12}\tilde{A}_{32} + a_{13}\tilde{A}_{33} \\ a_{21}\tilde{A}_{11} + a_{22}\tilde{A}_{12} + a_{23}\tilde{A}_{13} & a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{23}\tilde{A}_{23} & a_{21}\tilde{A}_{31} + a_{22}\tilde{A}_{32} + a_{23}\tilde{A}_{33} \\ a_{31}\tilde{A}_{11} + a_{32}\tilde{A}_{12} + a_{33}\tilde{A}_{13} & a_{31}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{33} + a_{32}\tilde{A}_{23} & a_{31}\tilde{A}_{31} + a_{32}\tilde{A}_{32} + a_{33}\tilde{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Na osnovu 7. osobine determinanti sledi

$$\begin{aligned} a_{11}\tilde{A}_{21} + a_{12}\tilde{A}_{22} + a_{13}\tilde{A}_{23} = 0, &\quad a_{11}\tilde{A}_{31} + a_{12}\tilde{A}_{32} + a_{13}\tilde{A}_{33} = 0, \\ a_{21}\tilde{A}_{11} + a_{22}\tilde{A}_{12} + a_{23}\tilde{A}_{13} = 0, &\quad a_{21}\tilde{A}_{31} + a_{22}\tilde{A}_{32} + a_{23}\tilde{A}_{33} = 0, \\ a_{31}\tilde{A}_{11} + a_{32}\tilde{A}_{12} + a_{33}\tilde{A}_{13} = 0, &\quad a_{31}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{33} + a_{32}\tilde{A}_{23} = 0. \end{aligned}$$

Na osnovu razvoja po elementima prve, druge, odnosno treće vrste redom imamo

$$\begin{aligned} a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{13}\tilde{A}_{13} = |A|, \\ a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{23}\tilde{A}_{23} = |A|, \\ a_{31}\tilde{A}_{31} + a_{32}\tilde{A}_{32} + a_{33}\tilde{A}_{33} = |A|, \end{aligned}$$

dakle

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| \cdot I.$$

Na isti način se dobija i $A^* \cdot A = |A| \cdot I$.

Za $|A| \neq 0$ sledi

$$\frac{1}{|A|}A^* \cdot A = I \qquad \text{i} \qquad A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = I,$$

što na osnovu definicije inverzne matrice znači da se **inverzna matrica izračunava** na sledeći način:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*}$$

Matrica A za koju postoji inverzna matrica se zove **regularna matrica**, a uslov za postojanje inverzne matrice je $|A| \neq 0$.

Primer: Odrediti inverznu matricu za matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Osobine:

1. Ako su A i B regularne matrice istog formata, onda važi

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

2. Ako je A regularna matrica, onda je i njena transponovana matrica regularna i važi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3. Ako je A regularna matrica, onda važi $(A^{-1})^{-1} = A$.

4. Ako je A regularna matrica, onda važi $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Rešavanje sistema pomoću determinanti i matričnog računa

Kramerovo pravilo

Kvadratni sistemi se mogu rešavati koristeći determinante primenom Kramerovih formula.

Neka je dat kvadratni sistem od n jednačina sa n nepoznatih. Matrici sistema odgovara determinant reda n koja se zove **determinanta sistema** i označava sa D.

Svakoj nepoznatoj se takođe dodeljuje determinanta koja se od polazne determinante sistema dobija na sledeći način: **kolona koeficijenata koji u sistemu stoje uz posmatranu nepoznatu se zameni sa kolonom slobodnih članova.**

Za sistem tri linearne jednačine sa tri nepoznate

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array} \tag{1}$$

determinanta sistema i pomoćne determinante su date sa

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Neka je uređena trojka (x, y, z) rešenje sistema (1). Pomnožićemo determinantu sistema D sa x tako što ćemo sve elemente prve kolone pomnožiti sa x:

$$x \cdot D = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Sada ćemo prvoj koloni dodati drugu kolonu pomnoženu sa y, a zatim i treću kolonu pomnoženu sa z. Na osnovu osobine 4 determinanti, posmatrana determinanta ne menja svoju vrednost pri ovoj transformaciji, tako da je

$$x \cdot D = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dakle, dobili smo da je

$$x \cdot D = D_x.$$

Analogno se dolazi i do jednakosti

$$y \cdot D = D_y \quad \text{i} \quad z \cdot D = D_z.$$

Ako postoji jedinstveno rešenje sistema, onda postoje jedinstvene vrednosti nepoznatih x, y i z koje zaodovljavaju prethodne jednakosti, pa je

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad \text{i} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0.$$

Prethodno navedene formule pomoću kojih se izračunavaju nepoznate x, y, i z se zovu **Kramerove formule**.

Na osnovu Kramerovih formula vidimo da važi da ako je sistem određen (ima jedinstveno rešenje), onda važi $D \neq 0$. Važi i obrnuto. Ako je $D \neq 0$ i ako bi postojala dva rešenja (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) sistema (1), onda bi na osnovu prehtodnog razmatranja sledilo da važi

$$x_1 \cdot D = D_x \quad \text{i} \quad x_2 \cdot D = D_x.$$

Analogno i za ostale nepoznate. Oduzimanjem ove dve jednakosti sledi

$$(x_1 - x_2) \cdot D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0$$

zato što je $D \neq 0$. Dakle, dobija se $x_1 = x_2$, tj. da postoji samo jedno rešenje. Tako je pokazano:

> Kvadratni sistem linearnih jednačina je **određen** ako i samo ako je **detereminanta sistema različita od nule.**

Dakle, za kvadratni sistem linearnih jednačina reda n važi:

i) Ako je $D \neq 0$, onda imamo jedinstveno rešenje

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D} \right).$$

ii) Ako je $D = 0$ i bar jedno $D_{x_i} \neq 0$, $(i = 1, \dots, n)$, onda je sistem nemoguć.

iii) Ako su $D = D_{x_1} = D_{x_2} = \cdots = D_{x_n} = 0$, onda sistem može biti nemoguć ili neodređen, što se mora dodatno ispitati (pomoću Gausovog algoritma).

Primer: Sistem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

je očigledno dvostruko neodređen, a na osnovu osobine 6 determinanti sledi

$$D = D_x = D_y = D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Primer: Sistem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

je očigledno kontradiktoran iako je determinanta sistema ista kao u prethodnom primeru $D = 0$, a determinante koje odgovaraju svakoj nepoznatoj na osnovu osobine 6 determinanti su takođe jednake nuli. Na primer

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Priroda rešenja **homogenog kvadratnog sistema** se može odrediti na osnovu determinante sistema. Homogen sistem je uvek saglasan, tako da su moguća samo dva slučaja:

1. Ako je $D \neq 0$, onda je sistem određen. To jedino rešenje homogenog sistema je trivijano rešenje.

2. Ako je $D = 0$, sistem je neodređen, tj. ima beskonačno mnogo rešenja. Ova netrivijalna rešenja homogenog stistema se mogu odrediti primenom Gausovog algoritma.

Primer: Kramerovim pravilom rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 4. \end{array}$$

$(3, -1, 9)$

Matrične jednačine

Ranije smo videli da se sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}$$

može zapisati u matričnom obliku:

$$A \cdot X = B,$$

gde su

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, posmatrani sistem linearnih jednačina je ekvivalentan dobijenoj matričnoj jednačini, tako da se do rešenja sistema može doći i rešavanjem matrične jednačine

$$A \cdot X = B. \tag{2}$$

Matrična jednačina (2) se može rešiti samo ako je matrica A regularna, tj. ako važi $|A| \neq 0$ (ako je sistem određen). Rešenje se dobija množenjem jednačine s leve strane inverznom matricom A^{-1}, tj.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Kako je $A^{-1} \cdot A = I$, sledi $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$, tj.

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.}$$

Primer: Matričnim računom rešiti sistem

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 4. \end{array}$$

$(3, -1, 9)$

Primer: Rešiti matričnu jednačinu

$$X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 12 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Rang matrice

Rang matrice je jedan od najvažnijih pojmova koji opisuju matricu.

Podmatrica tipa $k \times k$ matrice $A_{m \times n}$ se dobija od A izostavljanjem $m - k$ vrsta i $n - k$ kolona.

Determinanta podmatrica tipa $k \times k$ od matrice A zove se **minor reda k** matrice A. Ovo je uopštenje minora reda $n - 1$ definisanog kao minor elementa determinante.

Rang matrice $A_{m \times n}$ u oznaci $rang(A)$ ili $r(A)$ je definisan na sledeći način:

- $rang(A) = 0$ ako je A nula matrica
- $rang(A) = r$ ako postoji minor reda r matrice A koji je različit od nule, a svi minori reda većeg od r, ukoliko ih ima, su jednaki nuli.

Primer: Najveći mogući red minora matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

je 3. Ali svi minori trećeg reda su jednaki nuli (proverite), pa je $rang(A) \leq 2$. Na primer, za jedan minor reda 2 važi

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

pa je $rang(A) = 2$.

Elementarne transformacije

Elementarne transformacije matrice A su:

1. Zamena mesta dve vrste (kolone).
2. Množenje elemenata neke vrste (kolone) brojem različitim od nule.
3. Dodavanje elementima jedne vrste (kolone) odgovarajućih elemenata proizvoljne druge vrste (kolone) pomnoženih nekim brojem različitim od nule.

Ako je matrica B dobijena elementarnim transformacijama matrice A, onda za matrice A i B kažemo da su **ekvivalentne** i pišemo $A \sim B$.

Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Matrica B ima **stepenastu formu** ako je oblika

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{rr} \neq 0$. Za ovakvu matricu važi da je $rang(B) = r$.

Rang matrice je jednak broju nenula vrsta ekvivalentne stepenaste (trapezne) matrice.

Za svaku matricu A postoji matrica B koja ima stepenastu formu, a za koju važi da je $A \sim B$.

Uočimo da je tada i $rang(A) = rang(B)$, kao i da se matrica B dobija primenom konačnog broja elementarnih transformacija na matricu A.

Kvadratna matrica $A = \left[\ a_{ij}\ \right]_{n\times n}$ je regularna $\iff$ $rang(A) = n$.

Dakle, regularna matrica ima rang jednak redu matrice.

Primer: Odrediti rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ -3 & -4 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$(rang(A) = 2)$

Primer: Odrediti rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 14 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(rang(A) = 3)$

Primer: Diskutovati rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & a-6 & -3 \\ -1 & a-3 & a^2-a-2 \end{bmatrix}$$

u zavisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$.

(Za $a \neq 0$ i $a \neq 1$ $rang(A) = 3$; za $a = 1,\ rang(A) = 2$; za $a = 0,\ rang(A) = 2$.)

Matrica sistema linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kao što smo ranije uveli, je matrica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Proširena matrica sistema $\overline{A}$ dobija se dopisivanjem kolone koja sadrži, redom, slobodne članove $b_1, b_2, \dots, b_m$ sistema na mesto $(n+1)$-ve kolone u matrici A :

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Kroneker-Kapelijeva teorema

Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih je **saglasan** ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice, tj.

$$rang(A) = rang(\overline{A}).$$

Sistem je nemoguć $\iff$ $rang(A) < rang(\overline{A})$.

Kvadratni sistem reda n je

- određen za $rang(A) = rang(\overline{A}) = n$
- neodređen za $rang(A) = rang(\overline{A}) < n$
- nemoguć za $rang(A) < rang(\overline{A})$.

Primer: Diskutovati i rešiti sistem jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & +v & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & -v & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & +av & = & 5 \end{array}$$

u zavisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$.

$rang(\overline{A}) = \begin{cases} 2, & a = 5, \\ 3, & a \neq 5, \end{cases} \qquad rang(A) = 2.$

Za $a \neq 5$ sistem nema rešenja.

Za $a = 5$ rešenje je $R = \{(2\beta - \gamma, \beta, \gamma, 1) |\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.