SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Jednačina i njeno rešenje

Jednakost u kojoj figuriše jedna ili više nepoznatih veličina se zove **jednačina**.

Stepen jednačine jednak je najvišem stepenu nepoznate u datoj jednačini.

Primeri: $3x^2 - 9x + 6 = 0;\ -3x + 2y + z = 4;\ x - xy^3 = 1;\ x^3 + 2xy = 3.$

> **Rešenje jednačine** sa n nepoznatih je svaka uređena n-torka brojeva koja identički zadovoljava datu jednačinu: ako elemente ove n-torke zamenimo redom umesto nepoznatih, posmatrana jednačina će preći u brojevnu jednakost.

Primer: Jednačina iz prethodnog primera $3x^2 - 9x + 6 = 0$ je jednačina sa jednom nepoznatom, tako da je njeno rešenje broj. Postoje dva broja koja zadovoljavaju datu jednačinu, što znači da ona ima dva rešenja. Jedno rešenje je broj 1, a drugo broj 2, jer je

$$3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 6 = 0 \quad \text{i} \quad 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 6 = 0.$$

Primer: U prvom primeru smo imali i jednačinu sa tri nepoznate

$$-3x + 2y + z = 4,$$

pa je njeno rešenje uređena trojka brojeva. Na primer, jedno rešenje je uređena trojka $(-1, 0, 1)$ jer je

$$-3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 = 4.$$

Posmatrana jednačina ima beskonačno mnogo rešenja jer svaka uređena trojka $(\alpha, \beta, 4 + 3\alpha - 2\beta),\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zadovoljava datu jednačinu:

$$-3\alpha + 2\beta + 4 + 3\alpha - 2\beta = 4.$$

Sistem jednačina i njegovo rešenje

Skup od dve ili više jednačina sa dve ili više nepoznatih se zove **sistem jednačina**.

Primeri: Skup jednačina

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \end{aligned}$$

predstavlja sistem od jedne kvadratne i jedne linearne jednačine sa dve nepoznate, dok

$$\begin{aligned} x - 3y + 8z &= 2 \\ 2x + y - 4z &= 5 \end{aligned}$$

predstavlja sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznate.

Sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva je konjukcija jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1}$$

gde su $n, m \in \mathbf{N}$, a_{ij} i b_i realni (kompleksni) brojevi za $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.
Elementi a_{ij} za $1 \leq i \leq m$ i $a \leq j \leq n$ se nazivaju **koeficijenti,** a elementi b_i za $1 \leq i \leq m$ **slobodni članovi.**

Rešenje sistema linearnih jednačina sa n nepoznatih je uređena n-torka brojeva koja identički zadovoljava sve jednačine sistema.

Skup rešenja sistema linearnih jednačina sa n nepoznatih je skup svih uređenih n-torki koje su rešenje datog sistema.

Primer: Dat je sistem tri linearne jednačina sa dve nepoznate

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y &= 3. \end{aligned}$$

Jedino rešenje ovog sistema je uređeni par $(1, 1)$. Da je, na primer, u trećoj jednačini ovog sistema slobodni član 4 :

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y &= 4, \end{aligned}$$

onda ovaj sistem ne bi imao rešenje jer uređeni par $(1, 1)$ koji zadovoljava prve dve jednačine sistema, ne zadovoljava treću jednačinu tog sistema.

Sistem linearnih jednačina u kome je broj nepoznatih jednak broju jednačina se zove **kvadratni sistem**.

Broj rešenja sistema:

Što se tiče broja rešenja sistema linearnih jednačina, razlikujemo sledeća tri slučaja

- sistem ima tačno jedno rešenje - **određen sistem**
- sistem ima beskonačno mnogo rešenja - **neodređen sistem**
- sistem nema rešenje - sistem je **nemoguć** (kontradiktoran, protivurečan).

U prva dva slučaja, kada sistem IMA rešenje, on je **saglasan**.

Homogen sistem lineranih jednačina

Sistem linearnih jednačina kod koga su svi slobodni članovi jednaki nuli ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) se zove **homogen sistem**. U suprotnom, ako postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ za koje je $b_i \neq 0$, sistem je nehomogen.

Primer: Dat je sistem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Skup rešenja ovog sistema je $R_S = \{(\alpha, \alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Homogen sistem je uvek saglasan jer n-torka čiji su svi elemetni jednaki nuli uvek zadovoljava sve jednačine, tj. homogen sistem uvek ima bar **trivijalno rešenje**: $(0, \ldots, 0)$.

Ekvivalentni sistemi lineranih jednačina

Gausov metod se najčešće koristi za rešavanje sistema linearnih jednačina, a zasniva se na konstruisanju ekvivalentnih sistema.

Ekvivalentni sistemi linearnih jednačina su oni sistemi čiji su skupovi rešenja isti. Dobijaju se primenom elementarnih transformacija.

Elementarne transformacije

Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:

1. Zamena mesta jednačinama.
2. Množenje neke jednačine brojem različitim od nule.
3. Dodavanje neke jednačine pomnožene brojem različitim od nule nekoj drugoj jednačini.

Ove transformacije ne menjaju skup rešenja sistema linearnih jednačina, tj. njihovom primenom se dobijaju sistemi linearnih jednačina koji su ekvivalentni polaznom sistemu.

• Gausov[1] algoritam

Gausov algoritam je postupak za rešavanje proizvoljnog sistema linearnih jednačina. Ovaj postupak se još zove i *Gausov metod eliminacije* jer se sastoji u postepenom eliminisanju nepoznatih iz sistema. Tako se dati sistem pomoću elementarnih transformacija svodi na tzv. trougaoni ili trapezni sistem koji je ekvivalentan polaznom sistemu.

Dokazano je da se proizvoljan sistem linearnih jednačina ne može rešiti primenom elementarnih transformacija sa manje aritmetičkih operacija od broja koji se dobija primenom Gausovog algoritma.

Neka je dat sistem od m linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}\\
a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}\\
&\ldots\\
a_{m1}^{(1)}x_1 + a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)},
\end{aligned}$$

sa n nepoznatih i neka je $a_{11}^{(1)} \neq 0$.

[1] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - nemački matematičar

Prvu jednačinu sistema pomnožimo sa $-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ i dodamo drugoj, zatim je pomnožimo sa $-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ i dodamo trećoj, itd. Postupak ponavljamo sve dok prvu jednačinu pomnoženu sa $-\frac{a_{m1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ ne dodamo i poslednjoj jednačini.

Tako se dobija sistem:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ &\ldots \\ a_{m2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n &= b_m^{(2)} \end{aligned}$$

u kome je **pomoću prve jednačine nepoznata x_1 eliminisana iz ostalih jednačina**.

Ako se pri ovakvoj transformaciji sistema pojavi jednačina oblika $0 = c$ gde je $c \neq 0$, onda je sistem kontradiktoran jer ta jednačina nema rešenja, i postupak je završen. Ako to nije slučaj, postupak se nastavlja tako što prvo izostavimo sve jednačine oblika $0 = 0$, ako postoje, jer je bilo koja n-torka brojeva rešenje ovakve jednačine, tako da se njenim izostavljanjem dobija ekvivalentan sistem.

U novodobijenom sistemu sa p ($p \leq m$) jednačina uočimo koeficijent $a_{22}^{(2)}$. Pretpostavimo da je $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Pomnožimo sada drugu jednačinu sa $-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ i dodamo je trećoj, a zatim sa $-\frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ i dodamo četvrtoj, itd. Tako se dobija sistem:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
a_{33}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \\
&\ldots \\
a_{p3}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{pn}^{(3)}x_n &= b_p^{(3)},
\end{aligned}$$

$(p \leq m)$. Postupak se nastavlja na isti način kao i u prethodnom koraku. Ako se pojavi jednačina oblika $0 = c$ gde je $c \neq 0$, onda je sistem kontradiktoran, odbacuju se jednačine $0 = 0$ ako ih ima, a zatim se prelazi na eliminaciju nepoznate x_3 u jednačinama od četvrte do poslednje jednačine.

Na kraju se dobija sistem

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
&\ldots \\
a_{rr}^{(r)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(r)}x_n &= b_r^{(r)},
\end{aligned}$$

$(r \leq m)$, gde je $a_{11}^{(1)}a_{22}^{(2)}a_{33}^{(3)} \ldots a_{rr}^{(r)} \neq 0$.

- Ako je $r = n$, dobija se tzv. trougaoni sistem. Iz poslednje jednačine se može izračunati nepoznata

  $$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

  koja se onda zamenjuje u pretposlednju jednačinu iz koje se onda jednoznačno izračunava nepoznata x_{n-1}. Postupak izračunavanja nepoznatih se nastavlja sve dok se ne izračuna nepoznata x_1 iz prve jednačine. U ovom slučaju je sistem **određen**.

- Ako je $r < n$, dobija se tzv. trapezni sistem i nepoznata x_r se izražava preko $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Zamenom x_r u prethodnu jednačinu, x_{r-1} se takođe izražava preko $x_{r+1}, \ldots, x_n$ i tako redom dok nepoznate $x_1, \ldots, x_r$ ne budu na jedinstven način izražene preko nepoznatih $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Kako se nepoznate $x_{r+1}, \ldots, x_n$ mogu birati proizvoljno, rešenja ima beskonačno mnogo i sistem je neodređen. Takav sistem je $(n-r)$**-struko neodređen**. Pri tome nepoznate $x_{r+1}, \ldots, x_n$ zovemo **slobodne nepoznate** ili **parametri**.

Primer: Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 3y & + & 8z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ -2x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

Primer: Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 1. \end{array}$$

Primer: Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & -3 \\ -2x & + & 2y & + & 4z & = & 6 \\ 3x & - & 3y & - & 6z & = & -9. \end{array}$$

Primer: Rešiti sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & 2y & & & = & 20. \end{array}$$

Napomena: Sistem u kome je broj nepoznatih veći od broja jednačina ne može biti određen.