UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U NOVOM SADU

Sanja Dukić

Teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena i njihova primena na pozitivnu stabilnost matrica

MASTER RAD

Novi Sad, 2013

SADRŽAJ

Ključna dokumentacija

Rezime **2**

Uvod **3**

1. Teorija matrica **6**

1.1. Preliminarne definicije i tvrđenja teorije matrica 6
1.2. Dijagonalna dominacija 8
1.3. Lokalizacija karakterističnih korena 9
1.4. Generalizovano dijagonalne dominantne matrice **11**

2. Teoreme Geršgorinovog tipa i njihova primena na pozitivnu stabilnost matrice **13**

2.1. Uvod 13
2.2. SDD matrice 15
2.3. Matrice Ostrovskog 19
2.4. $\alpha 1$ – matrice 22
2.5. $\alpha 2$ – matrice 25
2.6. Σ - SDD matrice 27
2.7. Matrice Nekrasova 31
2.8. S - Nekrasov matrice 33

3. Funkcije u MATLAB-u za implementaciju oblasti lokalizacije **36**

Popis slika **45**

O autoru **46**

Literatura **47**

REZIME

U mnogim situacijama vezanim za diskusiju matematičkog modela neke pojave dovoljno je nekad poznavati samo oblasti lokalizacije spektra matrice u modelu, a ne i tačne vrednosti karakterističnih korena. U ovom radu želimo da prikažemo mogućnost primene teorema Geršgorinovog tipa кod ispitivanja pozitivne stabilnosti matrice.

U radu je dat pregled nekih poznatih potklasa regularnih H – matrica i njihovih veza sa odgovarajućim oblastima lokalizacije. Za nas su od posebnog značaja matrice sa pozitivnim dijagonalnim elementima, za koje pokazujemo da se čitave lokalizacione oblasti njihovih karakterističnih korena nalaze u desnoj poluravni. Sa stanovišta stabilnosti dinamičkih sistema primena teorema o lokalizaciji karakterističnih korena na pozitivnu stabilnost matrica ima veliki značaj, budući da je dinamički sistem stabilan, ako se svi karakteristični koreni matrice nalaze u jednoj poluravni.

UVOD

There is no certainty in sciences where one of the mathematical sciences cannot be applied, or which are not in relation with these mathematics.

Leonardo da Vinci

Matematika je, zbog svoje precizne i elegantne aparature, našla primenu u svim prirodnim, pa i u društvenim naukama. To je sasvim razumljivo, kada se ima u vidu da je matematika kao naučna disciplina po svojoj strukturi takva, da je, formulišući izvesnu prirodnu pojavu, u stanju da prati i kontroliše tok te pojave.

Grana primenjene matematike koja matematičkim sredstvima opisuje ponašanje složenih, u početku fizičkih i hemijskih, a danas i društvenih, računarskih, bioloških i sličnih sistema koji se menjaju u prostoru i vremenu, dobija sve više na značaju razvojem mernih uređaja i tehnologije, kao i kompjuterizacijom. Najpre se u fizici javlja potreba za sastavljanjem modela kretanja nekog fizičkog sistema preko jednačina, dok danas teorija dinamičkih sistema ne opisuje samo fenomene fizike i hemije, nego i biologije, ekologije, ekonomije, bežičnih mreža itd.

Zahvaljujući opsegu i raznovrsnosti matematičkih modela javljaju se različite mogućnosti pristupa takvim modelima i njihovog rešavanja. Jedna od najznačajnih karakteristika dinamičkog sistema jeste njegova stabilnost. Za nas je posebno interesantna činjenica da se u jednom matematičkom modelu, sistem jednačina koji opisuje neku pojavu može prevesti u oblik matrične jednačine, pa se posmatranjem lokalizacionih oblasti karakterističnih korena date matrice, može diskutovati stabilnost matrice matematičkog modela.

Budući da razmatramo karakteristične korene matrice i njihovu oblast lokalizacije, neizostavna je primena čuvene Geršgorinove teoreme, kao i primena ekvivalentnih tvrđenja o regularnosti matrice.

U radu je prikazan značaj nekih uopštenja Geršgorinove teoreme kod određivanja lokalizacionih oblasti za karakteristične korene matrice. Dat je pregled nekih poznatih potklasa regularnih H – matrica i njihovih veza sa odgovarajućim oblastima lokalizacije. Na osnovu klasa regularnih matrica stvorene su različite oblasti lokalizacije.

Inspirisani činjenicom da je u mnogim situacijama vezanim za diskusiju matematičkog modela neke pojave dovoljno poznavati samo oblasti lokalizacije, a ne i tačne vrednosti karakterističnih korena, u ovom radu želimo da prikažemo ***mogućnost primene teorema Geršgorinovog tipa na ispitivanje pozitivne stabilnosti matrice.*** Sa stanovišta stabilnosti dinamičkih sistema ova veza ima veliki značaj, budući da je ***dinamički sistem stabilan, ako se svi karakteristični koreni matrice nalaze u jednoj poluravni.***

Razmatranjem različitih matematičkih modela dolazimo do zaključka da su osobine kao što su: nenegativnost matrica, pozitivna definitnost, pozitivna stabilnost i dijagonalna dominacija uglavnom predmet diskusije prilikom analize matematičkog modela i da imaju veoma značajnu ulogu prilikom iste.

Konkretno u radu [Joh05] u kojem je razmatran matematički model kretanja ćelija pod uticajem sile adhezije, matrica modela je simetrična, pozitivno semi - definitna i dijagonalno dominantna. Kako je za proveravanje regularnosti matrice potrebno izračunavanje determinante, koje iziskuje vreme i prilično mnogo računa, pogotovo za matrice većih dimenzija, (ovde je reč o ćelijskom sistemu), uslovi koji definišu pripadnost nekoj potklasi regularnih H – matrica u velikoj meri olakšavaju rad.

Otuda i potiče ideja o pregledu nekih potklasa regularnih H – matrica, kao i ideja o lokalizaciji karakterističnih korena koja spektar matrice sa pozitivnim dijagonalnim elementima "smešta" u desnu poluravan. Dalje, recimo u radu [MK13] takođe nailazimo na značajnu primenu dijagonalne dominacije i oblasti lokalizacije karakterističnih korena matrice u optimizaciji bežičnih senzor mreža.

Motivaciju zapravo pronalazimo prilikom razmatranja matematičkih modela različitih pojava u korisnosti i efikasnoj proverljivosti uslova koji definišu neku potklasu H – matrica, kao i u primeni teorema Geršgorinovog tipa, na osnovu kojih diskutujemo pozitivnu stabilnost matrice. Uoči analize i rešavanja matematičkih modela, mogu se dalje diskutovati i pozitivna definitnost ili neka druga osobina matrica.

U prvom poglavlju date su preliminarne definicije i tvrđenja koja smo koristili u radu. Zatim su u istom poglavlju navedeni pojmovi dijagonalne dominacije, lokalizacije karakterističnih korena i definicija generalizovano dijagonalno dominantnih matrica, odnosno regularnih H - matrica. U svakoj sekciji navedeni su ključni pojmovi, koji kasnije imaju primenu u radu ili su detaljnije obrađivani.

U drugom poglavlju sledi pregled potklasa regularnih H – matrica i njihovih veza sa odgovarajućim oblastima lokalizacije. Prateći stil rada u svakoj od sekcija definisaćemo klasu regularnih H – matrica, a potom dati ekvivalentnu teoremu kojom se definiše oblast lokalizacije karakterističnih korena matrice. Budući da posmatramo oblast lokalizacije karakterističnih korena, za nas su od posebnog značaja matrice sa osobinom pozitivnosti dijagonalnih elemenata, za čije karakteristične korene pokazujemo da se čitava lokalizaciona oblast nalazi u desnoj poluravni i da su takve matrice pozitivno stabilne.

U trećem poglavlju dati su kodovi u programskom paketu MATLAB koji su korišćeni pri crtanju oblasti lokalizacije karakterističnih matrica iz primera datih za svaku matricu koja pripada nekoj potklasi H - matrica.

1. TEORIJA MATRICA

1.1. Preliminarne definicije i tvrđenja teorije matrica

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $\mathbb{C}^n$ n - dimenzionalni kompleksni vektorski prostor svih vektor kolona $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, gde je svaki element x_i kompleksan broj ($x_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n$) i neka je $\mathbb{C}^{m\times n}$ prostor svih pravougaonih matrica formata $m \times n$, čiji su elementi kompleksni brojevi.

Matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ obeležavamo sa $A = [a_{ij}]$ ili je prikazujemo u obliku pravougaone šeme sa m vrsta i n kolona:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

gde su elementi $a_{ij} \in \mathbb{C}$, za sve $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

Na sličan način sa $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^{m\times n}$ označavamo, redom, realni n - dimenzionalni vektorski prostor vektor kolona i prostor $m \times n$ matrica sa realnim elementima. Matrice nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva nazivamo realnim (kompleksnim) matricama.

Matrica formata $n \times n$ naziva se kvadratna matrica reda n .

Neka je A kvadratna matrica reda n. Kada je $i = j$, a_{ii} se naziva dijagonalni element matrice A, a svi dijagonalni elementi matrice A čine glavnu dijagonalu. Kada je $i \neq j$, elemente a_{ij} nazivamo vandijagonalnim elementima matrice A.

Jedinična matrica I_n (ili samo I, ako nema opasnosti od zabune) je kvadratna matrica reda n, čiji su dijagonalni elementi jednaki jedinici, a vandijagonalni su jednaki nuli.

Kvadratna matrica A je invertibilna ili regularna (nesingularna), ako postoji kvadratna matrica B, takva da je $AB = BA = I$.

Ako postoji matrica B koja zadovoljava gornju jednakost, ona postoji jedinstveno, naziva se inverzna matrica za matricu A i označava se sa A^{-1}. Kvadratna matrica koja nije regularna naziva se singularna matrica.

Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Transponovana matrica od matrice A, u oznaci A^T, je matrica formata $n \times m$ čiji i,j – ti elemenat je j,i – ti elemenat od matrice A.

Matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je simetrična ako važi $A = A^T$, odnosno $a_{ij} = a_{ji}$, za svako $i,j = 1,\dots,n$.

Neka je $N = \{1,2,\dots,n\}$ i $\pi: N \longrightarrow N$ proizvoljna permutacija. Ako je $i < j$ i $\pi(i) > \pi(j)$ tada kažemo da je $(\pi(i),\pi(j))$ inverzija permutacije π. Broj svih inverzija permutacije π označavamo sa $Inv(\pi)$.

$$Inv(\pi) = |\{(\pi(i),\pi(j)) : i < j \wedge \pi(i) > \pi(j)\}| .$$

Determinanta kvadratne matrice $A = [a_{ij}]$ reda n je preslikavanje matrice reda n u skalarnu veličinu, definisano sa

$$det(A) = \sum_{\pi\epsilon N} (-1)^{Inv(\pi)} a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\pi(n).}$$

Koriste se još i oznake $|A|$ i $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Ako je A kvadratna matrica reda n, onda se matrica $\lambda I - A$ (gde je λ skalar) naziva karakteristična matrica matrice A.

Polinom po λ, $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ naziva se karakteristični polinom matrice A. $p(\lambda)$ je polinom n-tog stepena, a koeficijent uz λ^n je 1.

Jednačina $\det(\lambda I - A) = 0$ naziva se karakteristična jednačina matrice A.

Karakteristični koreni kvadratne matrice A reda n su koreni njene karakteristične jednačine.

Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, skup njenih karakterističnih korena λ_i, $i = 1,\dots,n$ nazivamo ***spektar*** kvadratne matrice A i obeležavamo ga $\sigma(A)$, odnosno

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : det(\lambda I - A) = 0\}.$$

Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ karakteristični koreni matrice A, onda se $\rho(A) = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ naziva ***spektralni radijus*** matrice A.

Teorema 1.1.1 Stepeni red $\sum_{k\geq 0} A^k$ konvergira ako i samo ako je $\rho(A) < 1$. Kada je taj stepeni red konvergentan, tada je $I - A$ regularna matrica i $\sum_{k\geq 0} A^k = (I - A)^{-1}$.

1.2. Dijagonalna dominacija

U čitavom radu skup indeksa ćemo označavati sa $N \coloneqq \{1,2,\dots,n\}$.

Za proizvoljnu kvadratnu matricu A reda n, ***sumu modula vandijagonalnih elemenata i - te vrste*** matrice A označavaćemo sa

$$r_i(A) = \sum_{j\in N\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i \in N. \tag{1.1}$$

Ako je matrica A reda 1, definišemo $r_1(A) \coloneqq 0$.

U nastavku ćemo, najpre, definisati pojam stroge dijagonalne dominacije matrice. Zatim ćemo navesti poznati rezultat o regularnosti, koji je u literaturi poznatiji kao čuvena Levi - Deplankova teorema.

Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je ***strogo dijagonalno dominantna*** **(SDD)** matrica, ako važi

$$|a_{ii}| > r_i(A), \text{ za svako } i \in N. \tag{1.2}$$

Teorema 1.2.1 (Levi - Deplankova teorema[1]):

Ako je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ strogo dijagonalno dominantna matrica, odnosno, ako važi

$$|a_{ii}| > r_i(A), \text{ za svako } i \in N,$$

onda je A regularna matrica.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, da matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jeste strogo dijagonalno dominantna, ali da je singularna. Tada postoji neki nenula vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in$

[1] *Lévy - Desplanques*

$\mathbb{C}^n$, takav da je $Ax = 0$, ili ekvivalentno $\sum_{j\in N} a_{ij}x_j = 0$, za svako $i \in N$. Kako je $x \neq 0$, postoji indeks $k \in N$, tako da važi

$$0 < |x_k| = max\{|x_i| : i \in N\}.$$

Za takvo k imamo

$$\sum_{i\in N\setminus\{k\}} a_{ki}x_i = -a_{kk}\, x_k,$$

odakle, primenom nejednakosti trougla dobijamo sledeće:

$$|a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{i\in N\setminus\{k\}} |a_{ki}| \cdot |x_i| \leq \sum_{i\in N\setminus\{k\}} |a_{ki}| \cdot |x_k| = |x_k| \cdot r_k(A).$$

Nakon deljenja gornjeg izraza sa $|x_k| > 0$, dobijamo $|a_{kk}| \leq r_k(A)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je matrica strogo dijagonalno dominantna. □

Na osnovu uslova (1.2) koji ih definiše, matrice su dobile ime strogo dijagonalno dominantne matrice ili, skraćeno, SDD matrice. Kada nije u pitanju stroga dijagonalna dominacija, već samo dijagonalna dominacija definišemo ***dijagonalno dominantne matrice.***

Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je ***dijagonalno dominantna (DD)*** matrica, ako za svaki indeks $i \in N$ važi da je

$$|a_{ii}| \geq r_i(A),$$

i postoji bar jedan indeks $k \in N$ tako da važi stroga nejednakost, tj.

$$|a_{kk}| > r_k(A). \tag{1.3}$$

1.3. Lokalizacija karakterističnih korena

Jedna od ekvivalentnih formulacija *Levi – Deplankove teoreme* je čuvena ***Geršgorinova teorema*** [Var04].

Zanimljivo je to, što do relativno skoro, nije bila jasno i precizno definisana ekvivalencija između ta dva rezultata. Tek 2004. godine R. S. Varga [Var04] tu ekvivalenciju naziva ***rekurentnim principom***, koji sem što važi za pomenute dve teoreme, predstavlja i opšti odnos teorema o regularnosti matrica i teorema o lokalizaciji spektra. Više detalja o tom odnosu dajemo u drugom poglavlju ovog rada.

Da bismo formulisali Geršgorinovu teoremu označimo sa:

$$\Gamma_i(A) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}| \leq r_i(A), \ \ i \in N \ \}$$
$$\Gamma(A) \coloneqq \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A)$$

$\Gamma_i(A)$ je ***i - ti Geršgorinov krug*** matrice A i predstavlja zatvoreni krug u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$, sa centrom u dijagonalnom elementu a_{ii} i poluprečnikom $r_i(A)$.

Skup $\Gamma(A)$ definišemo kao uniju n Geršgorinovih krugova matrice A i zovemo ga ***Geršgorinov skup***. Geršgorinov skup je zatvoren i organičen u skupu $\mathbb{C}$.

Teorema 1.3.1 (Geršgorinova[2] teorema 1931.):

Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i svako $\lambda \in \sigma(A)$, postoji indeks $k \in N$

tako da važi

$$|\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A). \tag{1.4}$$

Kako je $\lambda \in \sigma(A)$ proizvoljno, važi

$$\sigma(A) \subseteq \ \Gamma(A).$$

Dokaz:

Za bilo koje $\lambda \in \sigma(A)$, neka je $0 \neq x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ njemu odgovarajući karakteristični vektor, tj. $Ax = \ \lambda x$. Dakle važi $\sum_{j \in N} a_{ij} x_j = \lambda \, x_i$, za svako $i \in N$.

Kako je $x \neq 0$, postoji indeks $k \in N$, tako da važi

$$0 < |x_k| = max\{|x_i| : i \in N\}.$$

Za takvo k imamo da je

$$\sum_{i \in N} a_{ki} x_i = \lambda \, x_k,$$

što je ekvivalentno sa

$$(\lambda - a_{kk}) x_k = \sum_{i \in N \setminus \{k\}} a_{ki} x_i.$$

[2] Semen Aronovich Geršgorin

Primenom nejednakosti trougla na prethodnu jednačinu dobijamo sledeće:

$$|\lambda - a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{i \in N \setminus \{k\}} |a_{ki}| \cdot |x_i| \leq \sum_{i \in N \setminus \{k\}} |a_{ki}| \cdot |x_k| = |x_k| \cdot r_k(A).$$

Nakon deljenja gornjeg izraza sa $|x_k| > 0$, dobijamo $|\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A)$.

Na osnovu definicije Geršgorinovih krugova sledi da je $\lambda \in \Gamma_k(A)$, pa je $\lambda \in \Gamma(A)$. Kako je $\lambda \in \sigma(A)$ proizvoljan karakteristični koren, sledi da je $\sigma(A) \subseteq \Gamma(A)$. □

1.4. Generalizovano dijagonalno dominantne matrice

Matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je ***generalizovano dijagonalno dominantna matrica***, ako postoji vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, takav da je

$$|a_{ii}| x_i > \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| x_j \,, \quad i \in N. \tag{1.5}$$

Specijalno, kada je u (1.5) vektor $x = [1,1, \dots ,1]^T$ prethodna relacija se svodi na (1.2), odnosno na uslov koji definiše SDD matrice. Ova ideja može se naći u radu [Ger31], u kojem se Geršgorin bavi lokalizacijom karakterističnih korena. Osnovna ideja je u tome da počevši od SDD matrice za koju znamo da je regularna, množenjem iste sa desne strane regularnom dijagonalnom matricom, dobijamo takođe regularnu matricu, pri čemu se nejednakosti koje opisuju SDD matrice (po vrstama) mogu zapisati kao (1.5).

Generalizovano dijagonalno dominantne matrice mogu se smatrati i uopštenjem M – matrica. U literaturi se mogu pronaći razne ekvivalentne definicije M - matrica, stoga u ovoj sekciji izdvajamo samo neke koje će biti od značaja u ovom radu.

Regularnu matricu A koja ima sve ne-pozitivne vandijagonalne elemente nazivamo M – matricom, ako je njena inverzna matrica ne-negativna, odnosno $A^{-1} \geq 0$.

Neka je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ proizvoljna matrica. Njena pridružena matrica

$$\langle A\rangle = [m_{ij}] \text{ je definisana sa } m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j \\ -|a_{ij}|, & i \neq j \end{cases}.$$

Takav oblik matrice naziva se L - oblik.

Definicija 1.4.1 Matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nazivamo regularnom H – matricom, ako je njena pridružena matrica $\langle A\rangle$ regularna M – matrica, odnosno ako postoji $\langle A\rangle^{-1}$ i ako je $\langle A\rangle^{-1} \geq 0$.

Teorema 1.4.2 Neka je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica koja ima L – oblik. Matrica A je

M – matrica, ako i samo ako postoji pozitivan vektor z, tako da je $Az > 0$.

Da li je određena matrica (regularna) H - matrica i način proveravanja da li data matrica pripada toj klasi i dalje spadaju u aktuelna pitanja.

Jedna karakterizacija H – matrica predstavljena je tvrđenjem koje kaže da je neka matrica A H – matrica, ako i samo ako se matrica A može skalirati u SDD oblik regularnom dijagonalnom matricom sa desne strane. Problem je nalaženje takve skalirajuće matrice. Prethodnu karakterizaciju navodimo u obliku teoreme.

Teorema 1.4.3 Proizvoljna matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je regularna H – matrica ako i samo ako je generalizovana dijagonalno dominantna, tj. ako postoji pozitivna dijagonalna matrica X, takva da je AX strogo dijagonalno dominantna.

Za sada je dovoljno da regularne H – matrice (ili GDD matrice) shvatimo kao najširu od svih klasa koje nas interesuju u ovom radu.

2. TEOREME GERŠGORINOVOG TIPA I NJIHOVA PRIMENA NA POZITIVNU STABILNOST MATRICA

2.1. Uvod

U ovom poglavlju je prikazan značaj nekih uopštenja Geršgorinove teoreme kod određivanja lokalizacionih oblasti za karakteristične korene matrice. Dat je pregled nekih potklasa regularnih H – matrica i njihovih veza sa odgovarajućim oblastima lokalizacije. Na osnovu klasa regularnih matrica stvorene su različite oblasti lokalizacije.

Inspirisani činjenicom da je u mnogim situacijama vezanim za diskusiju matematičkog modela neke pojave dovoljno poznavati samo oblasti lokalizacije, a ne i tačne vrednosti korena, u ovom radu želimo da prikažemo mogućnost primene teorema Geršgorinovog tipa na ispitivanje pozitivne stabilnosti matrice. Sa stanovišta stabilnosti dinamičkih sistema ova veza ima veliki značaj, budući da je dinamički sistem stabilan, ako se svi karakteristični koreni matrice nalaze u jednoj poluravni.

Definicija 2.1.1 Kompleksna kvadratna matrica A je ***pozitivno*** (negativno) ***stabilna***, ako je njeni karakteristični koreni leže u ***desnoj*** (levoj) ***poluravni.***

Budući da imamo za cilj lokalizaciju karakterističnih korena takvih matrica, vrlo bitno je napomenuti da generalno postoji jasna veza između tvrđenja o lokalizaciji karakterističnih korena i tvrđenja o regularnosti matrica, što smo u slučaju sa Geršgorinovom teoremom u sekciji 1.3 nazvali rekurentnim principom. [Var04]

Za razliku od Geršgorinovog skupa, koji se sastoji od krugova u kompleksnoj ravni, teoreme koje slede u ovom poglavlju uvode lokalizacije, koje se sastoje od "komplikovanijih" skupova. Stoga definišemo pojam ***teorema Grešgorinovog tipa***, gde ćemo precizno formulisati već pomenuti rekurentni princip. Potom navodimo ideju o primeni lokalizacije spektra matrice i njenoj vezi sa stabilnošću matrica čime dajemo jasan okvir ovom poglavlju.

Teorema 2.1.2: Ako je $\mathbb{K}$ potklasa (regularnih) H – matrica, onda za proizvoljnu matricu A važi

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma^{\mathbb{K}}(\mathrm{A}) \coloneqq \{\mathrm{z} |\, zI - A \notin \mathbb{K}\}.$$

Dokaz:

Neka je λ proizvoljan karakterističan koren matrice A. Tada je $\lambda I - A$ singularna matrica, pa ne može pripadati klasi $\mathbb{K}$ regularnih matrica. Dakle, $\lambda I - A \notin \mathbb{K}$, tj. $\lambda \in \Gamma^{\mathbb{K}}(\mathrm{A})$. □

U slučaju Geršgorinove teoreme, kada je $\Gamma^{\mathbb{K}}(\mathrm{A}) \equiv \Gamma(\mathrm{A})$, klasa $\mathbb{K}$ je klasa SDD matrica.

Na sličan način definišemo pojam *teoreme Geršgorinovog tipa*.

Teoremama Geršgorinovog tipa nazivaćemo teoreme koje daju oblast lokalizacije $\Gamma^{\mathbb{K}}(\mathrm{A})$, koja odgovara slučaju kada je odgovarajuća klasa matrica $\mathbb{K}$ potklasa klase $\mathbb{H}$, gde sa $\mathbb{H}$ obeležavamo klasu GDD matrica, tj. klasu H – matrica.

U narednim razmatranjima formulisaćemo tvrđenja vezana za oblasti lokalizacije karakterističnih korena matrica, koja u osnovi imaju sledeću ideju:

Prateći stil rada pod oznakom $\mathbb{K}^*$ podrazumevaćemo oznaku za neke od ***potklasa*** regularnih H - matrica, redom za klasu SDD matrica, Ostrovski matrica, $\alpha 1$ - matrica, $\alpha 2$ – matrica, za matrice iz klase Σ - SDD, Nekrasova i S - Nekrasova. U svakoj sekciji naznačićemo uvek koju klasu ćemo posmatrati i podrazumevati pod klasom $\mathbb{K}^*$.

Naime, cilj nam je da pokažemo da: ako matrica pripada nekoj potklasi $\mathbb{K}^*$ regularnih H - matrica i ako su svi dijagonalni elementi te matrice pozitivni, onda se svi karakteristični koreni matrice nalaze u desnoj poluravni. Ovo nam upravo daje odgovor o lokalizaciji karakterističnih korena matrice, odnosno o njenoj pozitivnoj stabilnosti.

Dalje, kao kriterijum za dokazivanje da pojedine klase matrica čine potklasu klase regularnih H - matrica, u radu će imati primenu sledeće tvrđenje, [BP94], koje govori o invarijantnosti klase regularnih H - matrica u odnosu na dijagonalnu aditivnost.

Teorema 2.1.3 Neka je $\mathbb{K}$ klasa regularnih kvadratnih matrica proizvoljnog reda sa nenula dijagonalnim elementima, takva da je $A \in \mathbb{K}$ ako i samo ako je $|A| + D \in \mathbb{K}$, gde je $|A| := \left[|a_{ij}|\right]$ i D proizvoljna nenegativna dijagonalna matrica. Tada je $\mathbb{K}$ potklasa klase regularnih H - matrica.

Dokaz:
Neka je $A \in \mathbb{K}$ proizvoljna matrica. Kako je $|\langle A\rangle| = |A| \in \mathbb{K}$, tada je i $\langle A\rangle \in \mathbb{K}$ pa je, dakle, regularna matrica.

Pokažimo da je $\langle A\rangle^{-1}$ nenegativna.

Ako posmatramo razlaganje $\langle A\rangle = D_A - B_A$, gde je $D_A \coloneqq diag(|a_{11}|, |a_{22}|, \dots, |a_{nn}|)$ i $B_A \coloneqq D_A - \langle A\rangle$, matrica D_A je očigledno, regularna nenegativna matrica. Tada možemo pisati $\langle A\rangle = D_A(I - {D_A}^{-1}B_A)$, odakle sledi da je $I - {D_A}^{-1}B_A$ regularna matrica i $\langle A\rangle^{-1} = (I - {D_A}^{-1}B_A)^{-1}{D_A}^{-1}$.

Kako je ${D_A}^{-1}B_A$ nenegativna, upotrebom tvrđenja o konvergeniciji geometrijskog reda matrica, [BP94], sledi da je $(I - {D_A}^{-1}B_A)^{-1}$ nenegativna matrica. Naime, može se pokazati da je $\rho\left({D_A}^{-1}B_A\right) \coloneqq max\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\left({D_A}^{-1}B_A\right)\right\} < 1$.

Pretpostavimo suprotno, da postoji $\lambda \in \sigma\left({D_A}^{-1}B_A\right)$, takav da je $|\lambda| \geq 1$.
Tada je $\lambda\, I - {D_A}^{-1}B_A = {D_A}^{-1}(\lambda D_A - B_A)$ singularna matrica.

Međutim, kako je $|\lambda| \geq 1$, možemo pisati $|\lambda D_A - B_A| = |\lambda|\, D_A + B_A = D_A + B_A + (|\lambda| - 1)\, D_A = |A| + D$, gde je $D \coloneqq (|\lambda| - 1)D_A$ nenegativna dijagonalna matrica.

Kako je $A \in \mathbb{K}$, tada i $|A| + D \in \mathbb{K}$, pa je na osnovu uslova teoreme, $\lambda D_A - B_A \in \mathbb{K}$, odakle sledi njena regularnost, čime smo dobili očiglednu kontradikciju.

Dakle, $\rho\left({D_A}^{-1}B_A\right) < 1$, odnosno, geometrijski red $\sum_{k=0}^{\infty}\left({D_A}^{-1}B_A\right)^k$ konvergira $(I - {D_A}^{-1}B_A)^{-1}$.
Kako je ${D_A}^{-1}B_A$ nenegativna, suma reda je nenegativna, čime je dokaz završen. □

Budući da, već poznata, klasa strogo dijagonalno dominantnih (SDD) matrica ima centralnu ulogu u ovim razmatranjima, pregled potklasa regularnih H – matrica započinjemo definisanjem SDD klase matrica. Potom slede matrice Ostrovskog, α - matrice, matrice klase Σ - SDD, Nekrasova i S - Nekrasova.

2.2. SDD matrice

Radi preglednosti, navodimo još jednom definiciju SDD matrica.

Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je strogo dijagonalno dominantna (SDD) matrica, ako važi

$$|a_{ii}| > r_i(A), \text{ za svako } i \in N.$$

Takođe, važi tvrđenje Levi – Deplanka:

Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ proizvoljna. Ako je A strogo dijagonalno dominantna, odnosno važi

$$|a_{ii}| > r_i(A), \text{ za svako } i \in N,$$

onda je A regularna matrica.

Dokaz Levi - Deplankove teoreme se može naći u prvom poglavlju.

Kako je klasa H - matrica klasa regularnih matrica u nastavku je prikazana karakterizacija H – matrica preko skalirajuće dijagonalne matrice. U sekciji 1.4 navedena je samo formulacija ove teoreme kojom se dokazuje da je neka matrica H – matrica, dok u ovom poglavlju dajemo detaljan dokaz.

Dakle, teorema koja sledi se primenjuje prilikom dokazivanja da je neka matrica H – matrica, međutim još uvek se regularna dijagonalna skalirajuća matrica efektivno može konstruisati samo u nekoliko slučajeva. Ovde je navodimo i dokazujemo i kako bismo naglasili značaj SDD matrica.

Teorema 2.2.1: Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je H – matrica ako i samo ako postoji regularna dijagonalna matrica X, takva da je AX strogo dijagonalno dominantna (SDD) matrica.

Dokaz:

$(\Longrightarrow)$

Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H – matrica, tada prema Teoremi 1.4.2 sledi da je njena pridružena matrica $\langle A\rangle$ M – matrica, odnosno postoji pozitivan vektor z, tako da je $\langle A\rangle z > 0$, $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$.

Dalje je $(\langle A\rangle \cdot z)_i = \sum_k (\langle A\rangle)_{ik} \cdot z_k = |a_{ii}| \cdot z_i - \sum_{k\neq i} |a_{ik}| \cdot z_k$, a kako je $\langle A\rangle z > 0$ onda je i $(\langle A\rangle \cdot z)_i > 0$, za svako i.

Iz prethodne jednakosti imamo $|a_{ii}| \cdot z_i - \sum_{k\neq i} |a_{ik}| \cdot z_k > 0$, $\forall i$, pa je

$|a_{ii}| \cdot z_i > \sum_{k\neq i} |a_{ik}| \cdot z_k$, $\forall i$, a kako je z pozitivan vektor važi $|a_{ii}| \cdot z_i > \sum_{k\neq i} |a_{ik} \cdot z_k|$ $\forall i$.

Dalje, za matricu X biramo $X \coloneqq diag(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Proveravamo da li je AX strogo dijagonalno dominantna (SDD) matrica.

Dakle, $(AX)_{ij} = a_{ij} z_{ij}$. $|a_{ii} \cdot z_i| > r_i(AX) = \sum_{k\neq i} a_{ik} \cdot z_k \Longrightarrow AX$ je SDD.

($\Leftarrow$)

Neka je sada X dijagonalna matrica takva da AX pripada klasi SDD matrica.

Neka je $X \coloneqq diag(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

Tada je $|a_{ii}x_i| > \sum_{k\neq i}|a_{ik} \cdot x_k|$, za svako i, pa sledi da je proizvod matrica AX je SDD matrica i važi $|a_{ii}| \cdot |x_i| > \sum_{k\neq i}|a_{ik}| \cdot |x_k|$, za svako i.

Posmatrajmo pridruženu matricu $\langle A \rangle$:

$\langle A \rangle$ je L – oblika.

Zatim, $z = \left[|x_{1|}, |x_2|, \dots, |x_n|\right]^T$, $z > 0$.

Ako je $\langle A \rangle z > 0$ onda važi $|a_{ii}| \cdot z_i > \sum_{k\neq i}|a_{ik} \cdot z_k|$, $\forall i$, gde je $z_i = |x_i|$ i $z_k = |x_k|$ prema Teoremi 1.4.2 zaključujemo da je $\langle A \rangle$ M – matrica, odnosno A je H – matrica. □

Dakle, ukoliko želimo da pokažemo da data matrica pripada klasi H – matrica, dovoljno je da pokažemo da postoji regularna dijagonalna matrica X takva da AX pripada proizvoljnoj potklasi H – matrica, u ovom slučaju klasi SDD matrica.

Očigledno, ako je matrica $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ strogo dijagonalno dominantna, onda je ona i H – matrica.

Opšte je poznato da za svaku matricu $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ važi $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, gde su A i A^T istovremeno regularne, odnosno singularne matrice. Dakle, primenom Teoreme 1.2.1 na A^T direktno zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.2 Neka je matrica $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ***strogo dijagonalno dominantna matrica po kolonama,*** odnosno važi

$$|a_{ii}| > c_i(A) \coloneqq r_i(A^T) = \sum_{j\neq i} |a_{ji}|, \tag{2.1}$$

za svako $i \in N$. Tada je matrica A regularna matrica, štaviše A je H - matrica.

Da je matrica SDD po kolonama H – matrica, dobijamo primenom Teoreme 2.1.3.

Ako pod klasom $\mathbb{K}^*$ podrazumevamo klasu strogo dijagonalno dominantnih matrica, onda formulišemo sledeću teoremu:

Teorema 2.2.3 Ako je A SDD matrica i ako su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni, onda se svi karakteristični koreni matrice A nalaze u desnoj poluravni.

Dokaz:

Neka je matrica A je SDD matrica i neka je $a_{ii} > 0$. Dakle, neka važi $|a_{ii}| > r_i(A)$, za svako $i \in N$.

Neka je λ proizvoljan karakterističan koren matrice A. Na osnovu Geršgorinove teoreme i Teoreme 2.1.2. važi

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i(A) < |a_{ii}| = a_{ii}.$$

Kako je $r_i(A) < a_{ii}$, za svako $i \in N$, svi Geršgorinovi krugovi imaju poluprečnik manji od rastojanja centra od koordinatnog početka, pa se nalaze u desnoj poluravni.

Budući da je Teoremom 1.3.1 oblast lokalizacije karakterističnih korena matrice definisana kao unija svih Geršgorinovih krugova zaključujemo da se čitava oblast lokalizacije karakterističnih korena za SDD matricu sa pozitivnim dijagonalnim elementima nalazi u desnoj poluravni. □

Dakle, ako matrica zadovoljava uslov (1.2), na osnovu Teoreme 1.2.1 sledi regularnost te matrice. A kako su svi dijagonalni elementi matrice pozitivni, prema Teoremi 2.2.3. zaključujemo da se svi njeni karakteristični koreni nalaze u desnoj poluravni. Matrica je tada pozitivno stabilna matrica na osnovu Definicije 2.1.1.

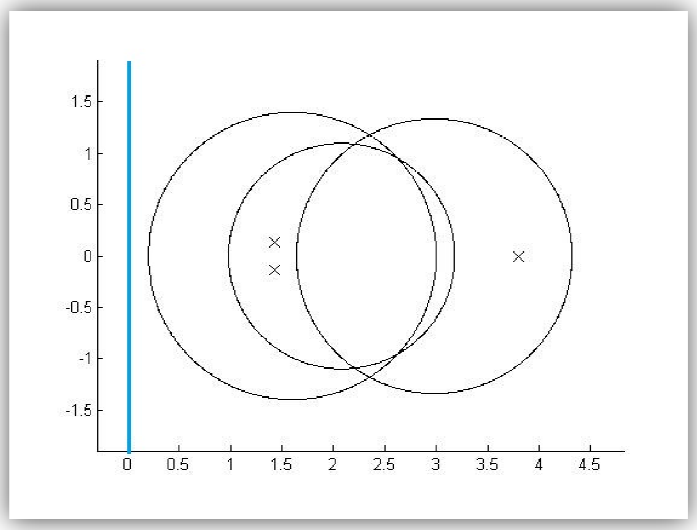
Primer 1.

Matrica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2.08 & 0 & 1.1 \\ 0.7 & 1.6 & 0.7 \\ 1.09 & 0.25 & 2.98 \end{bmatrix}$$

pripada klasi SDD – matrica, tj. zadovoljava uslov (1.2) za svako $i \in N$.

Na slici 1. prikazan je odgovarajući Geršgorinov skup za matricu A_1. Karakteristični koreni matrice A_1 označeni sa $\times$. Vidimo se da svi karakteristični koreni matrice A_1 nalaze u desnoj poluravni.



Slika 1. Geršgorinov skup za matricu A_1 iz Primera 1.

2.3. Matrice Ostrovskog (*Ostrowski*)

U ovoj sekciji definišemo klasu regularnih matrica, koja svoje postojanje duguje radu Ostrovskog, po kome je i dobila ime. Sledi njegov rezultat iz 1937. godine [Ost37] o regularnosti matrice.

Teorema 2.3.1 Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ proizvoljna. Ako elementi matrice A zadovoljavaju relaciju

$$|a_{ii}| \cdot |a_{jj}| > r_i(A) \cdot r_j(A), \tag{2.2}$$

za svako $i \neq j$, $i,j \in N$, onda je matrica A regularna matrica. Štaviše, matrica A je H – matrica.

Klasa matrica ***Ostrovskog*** opisana relacijom (2.2) se u literaturi [LT97] naziva i ***duplo dijagonalno dominantna klasa matrica.*** Primetimo da ona u sebi sadrži klasu SDD matrica po vrstama, tj. ova klasa matrica šira je nego klasa SDD matrica. Dakle, ako je matrica SDD, tada je i DDD. [KCV09]

Da su DDD matrice ujedno i regularne H – matrice, direktna je posledica Teoreme 2.1.3.

U svom radu [Bra47] Brauer ponovo otkriva ovaj rezultat o regularnosti i to kao posledicu odgovarajućeg tvrđenja u vezi sa lokalizacijom karakterističnih korena.

Analogon ovoj teoremi je sledeći Brauerov rezultat [Bra47]:

Teorema 2.3.2 Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ i svako $\lambda \in \sigma(A)$, postoji par različitih indeksa $i, j \in N$, tako da važi

$$\lambda \in K_{ij}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq r_i(A) \cdot r_j(A)\}. \tag{2.3}$$

Stoga, svi karakteristični koreni pripadaju skupu

$$\mathcal{K}(A) := \bigcup_{\substack{i,j\in N \\ i\neq j}} K_{ij}(A).$$

Primetimo, najpre, da je, za razliku od Geršgorinovog skupa, Brauerov skup sačinjen od kompaktnih oblasti u kompleksnoj ravni. Iako one, takođe, zavise od dijagonalnih elemenata i suma po vrstama, njihov oblik nije krug.

Generalno, kriva koja se dobija prilikom lokalizacije u literaturi se naziva Kazinijev[3] oval ili Kazinijeva elipsa. Stoga ćemo skup $K_{ij}(A)$ zvati *(i, j)* - ti Brauerov oval Kazinija matrice *A*.

Ukoliko matrica ispunjava uslov (2.2) ona je po definiciji matrica *Ostrovskog* i pod klasom $\mathbb{K}^*$ podrazumevamo klasu strogo duplo dijagonalno dominantnih matrica, odnosno klasu matrica *Ostrovskog*.

[3] Ime potiče od italijanskog astronoma, Giovanni Domenico Cassini (1625.-1712.)

Teorema 2.3.3 Ako je A matrica *Ostrovskog* i ako su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni, onda se svi karakteristični koreni matrice A nalaze u desnoj poluravni.

Dokaz:

Neka je $a_{ii} > 0$ i neka je matrica A je matrica *Ostrovskog*. Dakle, važi uslov (2.2):

$$|a_{ii}| \cdot |a_{jj}| > r_i(A) \cdot \ r_j(A), \text{ za svako } i \neq j, \quad i, j \in N.$$

Neka je λ karakterističan koren matrice A. Na osnovu Teoreme 2.3.2 i Teoreme 2.1.2 važi

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot |\lambda - a_{jj}| \leq r_i(A) \cdot \ r_j(A) < |a_{ii}| \cdot |a_{jj}| = a_{ii} \cdot a_{jj}.$$

Na osnovu $|\lambda - a_{ii}| \cdot |\lambda - a_{jj}| < a_{ii} \cdot a_{jj}$, za svako $i, j \in N, i \neq j$, dobijamo tzv. Brauerove ovale Kazinija se nalaze u desnoj poluravni. Budući da je oblast lokalizacije definisana kao unija svih Brauerovih ovala Kazinija, zaključujemo da se čitava oblast lokalizacije karakterističnih korena (Brauerov skup) za matricu Ostrovskog sa pozitivnim dijagonalnim elementima nalazi u desnoj poluravni. □

Dakle, ako matrica zadovoljava uslov (2.2), na osnovu Teoreme 1.2.1 sledi regularnost te matrice. A kako su svi dijagonalni elementi matrice pozitivni, prema Teoremi 2.3.3 zaključujemo da su svi njeni karakteristični koreni smešteni u desnoj poluravni. Matrica je tada pozitivno stabilna matrica na osnovu Definicije 2.1.1.

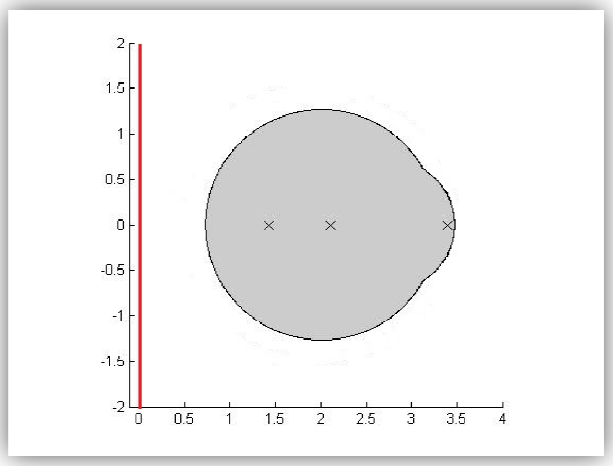
Primer 2.

Matrica

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2.9 & 0.1 & 0.5 \\ 0.9 & 1.9 & 0.6 \\ 0.18 & 0.9 & 2.12 \end{bmatrix}$$

pripada klasi matrica Ostrovskog, tj. zadovoljava uslov (2.2) za svako $i \neq j, \ i, j \in N$.

Na slici 2. prikazan je odgovarajući Brauerov skup za odgovarajuću matricu. Karakteristični koreni matrice A_2 označeni sa $\times$.



Slika 2. Brauerov skup za matricu A_2 iz Primera 2.

Čuvene klase regularnih matrica koje slede, poznate su nam opet zahvaljujući Ostrovskom , a nazivamo ih klasama α - matrica.

2.4. $\alpha 1$ – matrice

Definicija 2.4.1 Matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nazivamo $\boldsymbol{\alpha 1}$ – ***matricom***, ako postoji $\alpha \in [0,1]$, tako da za svako $i \in N$, važi

$$|a_{ii}| > \alpha\, r_i(A) + (1-\alpha) c_i(A). \tag{2.4}$$

Teorema 2.4.2 (Ostrowski) Ako je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\alpha 1$ – matrica, onda je ona regularna, štaviše ona je H – matrica. [Ost37]

Ova klasa matrica je jedna od generalizacija klase SDD matrica i potklasa je klase H - matrica. Kao i do sada, u oblasti lokalizacije karakterističnih korena, važi teorema ekvivalentna Teoremi 2.4.2

Teorema 2.4.3. Svi karakteristični koreni matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pripadaju skupu

$$\mathcal{A}_1(A) := \bigcap_{0\le\alpha\le 1} \bigcup_{i\in N} \Gamma_i^{\alpha 1}(A),$$

gde je

$$\Gamma_i^{\alpha 1}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A)\}\,,\ i \in N.$$

Pod klasom $\mathbb{K}^*$ podrazumevaćemo sada klasu $\alpha 1$ – matrica.

Teorema 2.4.4. Ako je matrica A $\alpha 1$ – matrica i ako su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni, onda se svi karakteristični koreni matrice A nalaze u desnoj poluravni.

Dokaz:

Neka je matrica A je $\alpha 1$ – matrica i neka je $a_{ii} > 0$ za svako i. Ako je matrica A $\alpha 1$ – matrica onda važi uslov (2.4)

$$|a_{ii}| > \alpha\, r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A), \text{ za sve } i \in N.$$

Neka je λ proizvoljan karakterističan koren matrice A. Na osnovu Teoreme 2.4.3 i Teoreme 2.1.2 važi

$$|\lambda - a_{ii}| \le \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A) < |a_{ii}| = a_{ii}.$$

Budući da važi gornja nejednakost unija svih krugova koji sadrže karakteristične korene matrice nalaziće se u desnoj poluravni. Formiranjem preseka po svim izborima parametra α dobijamo oblast lokalizacije koja očigledno leži u svakoj od oblasti $\bigcup_{i\in N}\Gamma_i^{\alpha 1}(A)$, pa zaključujemo da se čitava oblast lokalizacije $\mathcal{A}_1(A)$ za $\alpha 1$ – matricu sa pozitivnim dijagonalnim elementima nalazi u desnoj poluravni □

Dakle, ako matrica zadovoljava uslov (2.4), na osnovu Teoreme 1.2.1 sledi regularnost te matrice. Kako su svi dijagonalni elementi matrice pozitivni, prema Teoremi 2.4.4 zaključujemo da su svi njeni karakteristični koreni smešteni u desnoj poluravni. Matrica je tada pozitivno stabilna matrica na osnovu Definicije 2.1.1.

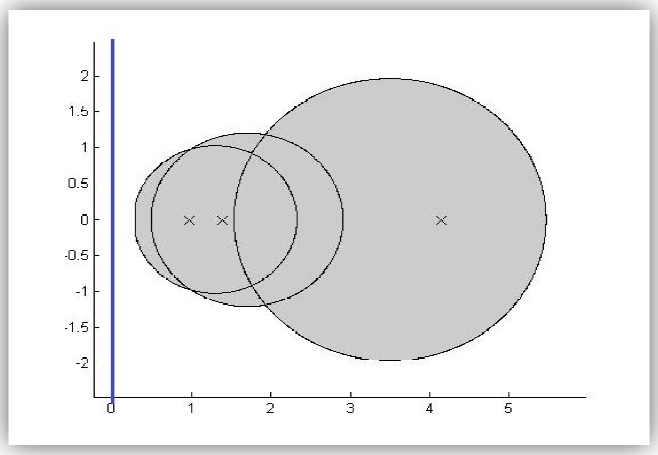
Primer 3.

Matrica

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3.5 & 0.8 & 1.7 \\ 0.87 & 1.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.1 & 1.3 \end{bmatrix}$$

pripada klasi $\alpha 1$ – matrica, tj. zadovoljava uslov (2.4) za svako $i \in N$.

Na slici 3. prikazan je odgovarajući skup Ostrovskog za matricu A_3 za vrednost parametra $\alpha = 0.6$. Karakteristični koreni označeni sa $\times$.



Slika 3. Skup Ostrovskog za $\alpha 1$– matricu A_3 iz Primera 3.

2.5. $\alpha 2$ – matrice

Definicija 2.5.1: Matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nazivamo $\boldsymbol{\alpha 2}$ – ***matricom,*** ako postoji $\alpha \in [0,1]$, tako da za svako $i \in N$, važi

$$|a_{ii}| > r_i(A)^{\alpha} \cdot c_i(A)^{(1-\alpha)}. \qquad (2.5)$$

Primetimo da za različite vrednosti parametra α dobijamo različite uslove za regularnost matrice. Tako za krajnje tačke intervala $[0,1]$ dobijamo već poznate uslove za pripadnost nekoj klasi. Za $\alpha = 1$, uslov (2.5) postaje isti kao SDD uslov (1.2), dok za $\alpha = 0$ je isti kao uslov (2.1). Dakle, klasa $\alpha 2$ – matrica u sebi, kao potklase, sadrži klasu SDD matrica po vrstama i klasu SDD matrica po kolonama.

Teorema 2.5.2 (Ostrowski) Ako je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\alpha 2$ – matrica, onda je ona regularna, štaviše ona je H – matrica. [Ost37]

Ova klasa matrica je takođe jedna od generalizacija klase SDD matrica i potklasa je klase H - matrica. Kao i do sada, u oblasti lokalizacije karakterističnih korena, važi teorema ekvivalentna Teoremi 2.5.2.

Teorema 2.5.3 Svi karakteristični koreni matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pripadaju skupu

$$\mathcal{A}_2(A) := \bigcap_{0\le\alpha\le 1} \bigcup_{i\in N} \Gamma_i^{\alpha 2}(A),$$

gde je

$$\Gamma_i^{\alpha 2}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i(A)^{\alpha} \cdot c_i(A)^{1-\alpha}\}, \qquad i \in N.$$

Ako elementi matrice zadovoljaju uslov (2.5), matrica će biti $\alpha 2$ – matrica. Pod klasom $\mathbb{K}^*$ podrazumevamo klasu $\alpha 2$ – matrica i formulišemo sledeću teoremu:

Teorema 2.5.4 Ako je matrica A $\alpha 2$ – matrica i ako su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni, onda se svi karakteristični koreni matrice A nalaze u desnoj poluravni.

Dokaz:

Neka je matrica A je $\alpha 2$ – matrica. Onda važi uslov (2.5), pa je

$$|a_{ii}| > r_i(A)^{\alpha} \cdot c_i(A)^{(1-\alpha)}, \text{ za sve } i \in N.$$

Neka je λ proizvoljan karakterističan koren matrice A. Na osnovu Teoreme 2.5.3 i Teoreme 2.1.2 važi

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i(A)^{\alpha} \cdot c_i(A)^{(1-\alpha)} < |a_{ii}| = a_{ii}.$$

Budući da važi gornja nejednakost, unija svih krugova koji sadrže karakteristične korene matrice nalaziće se u desnoj poluravni. Formiranjem preseka po svim izborima parametra α dobijamo oblast lokalizacije koja leži u svakoj od oblasti $\bigcup_{i \in N} \Gamma_i^{\alpha 2}(A)$, pa zaključujemo da se čitava oblast lokalizacije $\mathcal{A}_2(A)$ za $\alpha 2$ – matricu sa pozitivnim dijagonalnim elementima nalazi u desnoj poluravni □

Zaključujemo, dakle, da ako matrica zadovoljava uslov (2.5), na osnovu Teoreme 1.2.1 sledi regularnost te matrice. A kako su svi dijagonalni elementi matrice pozitivni, prema Teoremi 2.5.4. sledi da se svi njeni karakteristični koreni nalaze u desnoj poluravni. Matrica je tada pozitivno stabilna matrica na osnovu Definicije 2.1.1.

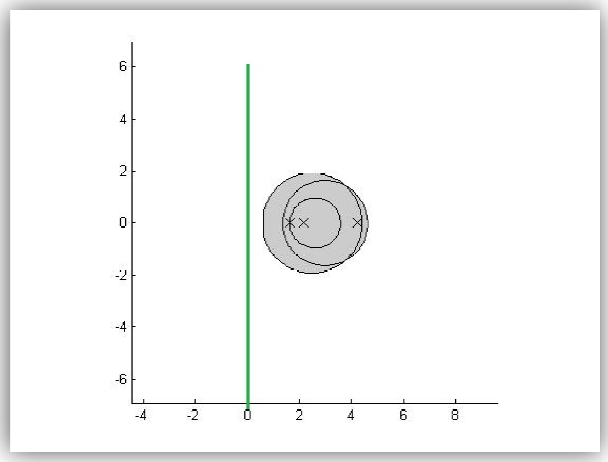
Primer 4.

Matrica

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2.48 & 0 & 1.5 \\ 1.7 & 2.6 & 0.7 \\ 1.09 & 0.25 & 2.98 \end{bmatrix}$$

pripada klasi $\alpha 2$– matrica, tj. zadovoljava uslov (2.5) za svako $i \in N$.

Na slici 4. prikazan je odgovarajući skup Ostrovskog za matricu A_4 za vrednost parametra $\alpha = 0.6$. Karakteristični koreni matrice A_4 označeni su sa $\times$.



Slika 4. Skup Ostrovskog za $\alpha 2-$ matricu A_4 iz Primera 4.

2.6. Σ - SDD matrice

U sekcijama koje slede koristićemo još neke oznake, pa pored oznake za skup indeksa $N \coloneqq \{1,2,\dots,n\}$ imamo još:

S - podskup indeksa $S \subsetneq N$,

$\bar{S}$ - komplement skupa S u odnosu na N, $\bar{S} \coloneqq N \setminus S$.

Definicija 2.6.1. Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ proizvoljna matrica i neka je skup $S \subseteq N$ neprazan podskup indeksa. Matrica A je ***S – strogo dijagonalno dominantna*** (S - SDD) matrica ako važi

$$|a_{ii}| > r_i^S(A), \text{ za svako } i \in S, \tag{2.6}$$

$$(|a_{ii}| - r_i^S(A)) \cdot \left(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right) > r_i^{\bar{S}}(A) \cdot r_j^S(A) \text{ za svako } i \in S, j \in \bar{S}, \tag{2.7}$$

gde je

$$r_i^S(A) \coloneqq \sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}|.$$

Primetimo da ako je $S = N$, onda je $\bar{S} = \emptyset$ i tada se gornja relacija svodi na $|a_{ii}| > r_i(A)$, za sve $i \in N$, što nam je poznato kao osobina stroge dijagonalne dominacije matrice A. Dakle, ako je matrica SDD matrica, onda je ona i S - SDD matrica za sve podskupove S od skupa indeksa N. Različite formulacije definicija i osobina ove klase matrica, kao i detaljnije objašnjenje, mogu se pronaći u [Cve06], [CKV04] i [GX92].

Prethodna definicija se može preformulisati u njoj ekvivalentnu definiciju:

Definicija 2.6.2 Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ proizvoljna i neka je skup $S \subseteq N$ neprazan podskup indeksa. Matrica A je S – strogo dijagonalno dominantna (S - SDD) matrica ako važi

$$|a_{ii}| > r_i{}^S(A), \text{ za bar jedno } i \in S \tag{2.8}$$

$$(|a_{ii}| - r_i{}^S(A)) \cdot (|a_{jj}| - r_j{}^{\bar{S}}(A)) > r_i{}^{\bar{S}}(A) \cdot r_j{}^S(A) \tag{2.9}$$

za sve $i \in S, j \in \bar{S}$.

Više o drugim ekvivalentnim definicijama sa navedenim može se pronaći i u radu [MC05].

Dakle, u literaturi se matrice koje ispunjavaju uslove date u Definiciji 2.6.1 nazivaju S – strogo dijagonalno dominantne matrice, odnosno, kraće S – SDD matrice, pri čemu je S fiksirani skup indeksa za koji važe uslovi (2.6) i (2.7).

Jasno, pošto je S proizvoljan neprazan podskup indeksa, može se definisati i šira klasa matrica dopuštanjem da skup S varira. U literaturi se tako dobijena klasa matrica obeležava sa $\mathcal{S}$ – SDD [Cve06] ili sa Σ - SDD [BC09]. Dakle, matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ Σ – SDD matrica, ako i samo ako postoji neprazan skup indeksa $S \subseteq N$ takav da za svako $i \in S$ i $j \in \bar{S}$ važe uslovi (2.6) i (2.7).

Teorema 2.6.3 ***(Cvetković-Kostić-Varga)*** Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ proizvoljna matrica i neka je skup $S \subseteq N$ neprazan podskup indeksa. Ako za svaka dva indeksa $i \in S$ i $j \in \bar{S} := N \setminus S$ važe uslovi (2.6) i (2.7), tada je A regularna matrica.

U oblasti lokalizacije karakterističnih korena ekvivalentan rezultat daje sledeća teorema dokazana u [CKV04].

Teorema 2.6.4 ***(Cvetković-Kostić-Varga)*** Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ proizvoljna matrica i $\lambda \in \sigma(A)$ njen proizvoljan karakteristični koren. Tada za svaki neprazan skup indeksa $S \subseteq N$ postoje $i \in S$ i $j \in \bar{S}$ takvi da

$$\lambda \in \Gamma_i^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^S(A)\}, \ i \in S$$

i $\lambda \in V_{ij}^{S}(A) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \left(|z - a_{ii}| - {r_i}^{S}(A)\right) \cdot \left(\left|z - a_{jj}\right| - {r_j}^{\bar{S}}(A)\right) \leq {r_i}^{\bar{S}}(A) \cdot {r_j}^{S}(A)\}$.

Tada, za svaki neprazan skup $S \subseteq N$,

$$\sigma(A) \subseteq C^{S}(A) \coloneqq \left(\bigcup_{i \in S} \Gamma_i^{S}(A)\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} V_{ij}^{S}(A)\right).$$

Bolja oblast lokalizacije karakterističnih korena je predstavljena skupom

$$\mathcal{C}(A) \coloneqq \bigcap_{\substack{S \subset N \\ S \neq \emptyset, S \neq N}} C^{S}(A).$$

Ako elementi matrice zadovoljaju uslove (2.6) i (2.7), matrica je Σ - SDD matrica, pa pod klasom $\mathbb{K}^{*}$ podrazumevamo klasu Σ - SDD matrica.

Formulišemo sledeću teoremu:

Teorema 2.6.5 Ako je matrica A Σ - SDD matrica i ako su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni, onda se svi karakteristični koreni matrice A nalaze u desnoj poluravni.

Dokaz:

Ako je matrica Σ – SDD, onda važe uslovi (2.6) i (2.7) i tada za svaki neprazan skup indeksa $S \subseteq N$ postoje $i \in S$ i $j \in \bar{S}$ takvi da

$$|a_{ii}| > {r_i}^{S}(A),$$

$$(|a_{ii}| - {r_i}^{S}(A))\left(\left|a_{jj}\right| - {r_j}^{\bar{S}}(A)\right) > {r_i}^{\bar{S}}(A){r_j}^{S}(A).$$

Iz uslova (2.6) i (2.7) zaključujemo da važi $|a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A)$.

Neka je λ karakterističan koren matrice A. Na osnovu Teoreme 2.6.4 i Teoreme 2.1.2 tada važi da za svaki neprazan skup indeksa $S \subseteq N$ postoje $i \in S$ i $j \in \bar{S}$ takvi da

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i^S(A) < |a_{ii}| = a_{ii},$$

$$|\lambda - a_{jj}| \leq r_j^{\bar{S}}(A) < |a_{jj}| = a_{jj},$$

i

$$\left(|\lambda - a_{ii}| - r_i^S(A)\right) \cdot \left(|\lambda - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right) \leq r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A) < \left(|a_{ii}| - r_i^S(A)\right) \cdot \left(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right)$$
$$= \left(a_{ii} - r_i^S(A)\right) \cdot \left(a_{jj} - r_j^{\bar{S}}(A)\right).$$

Budući da važe gornje nejednakosti unija svih krugova i svih krivih koje sadrže karakteristične korene matrice nalaziće se u desnoj poluravni. Formiranjem preseka $\mathcal{C}(A) := \bigcap_{\substack{S \subset N \\ S \neq \emptyset, S \neq N}} C^S(A)$ po svim izborima skupa S dobijamo oblast lokalizacije koja leži u svakoj oblasti $C^S(A)$, pa zaključujemo da se čitava oblast lokalizacije za Σ – SDD matricu sa pozitivnim dijagonalnim elementima nalazi u desnoj poluravni. □

Dakle, ako matrica zadovoljava uslov (2.6) i (2.7) na osnovu Teoreme 1.2.1 sledi regularnost te matrice. A kako su svi dijagonalni elementi matrice pozitivni, prema Teoremi 2.6.5 zaključujemo da su svi njeni karakteristični koreni smešteni u desnoj poluravni. Matrica je tada pozitivno stabilna matrica na osnovu Definicije 2.1.1.

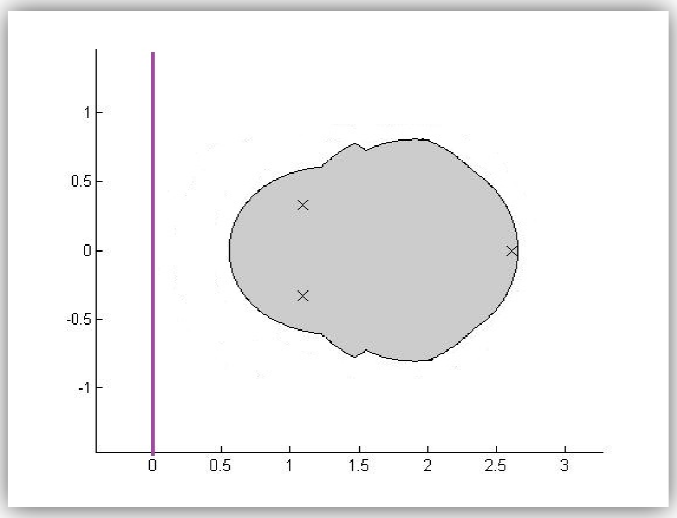
Primer 5.

Matrica

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.9 & 1 & 0.01 \\ 0.47 & 0.5 & 1.8 \end{bmatrix}$$

pripada klasi Σ - SDD matrica, tj. zadovoljava uslove (2.6) i (2.7).

Na slici 5. prikazan je odgovarajuća Σ - SDD lokalizacija karakterističnih korena matrice A_5 . Karakteristični koreni matrice A_5 označeni sa ×.



Slika 5. Lokalizacija Σ - SDD za matricu A_5 iz Primera 5.

2.7. Matrice Nekrasova

Definišemo, najpre, $h_i(A)$ rekurentnom formulom:

$$h_1(A) \coloneqq \sum_{j\neq 1} |a_{1j}|, \tag{2.10}$$

$$h_i(A) \coloneqq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|. \tag{2.11}$$

Definicija 2.7.1 Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$, naziva se Nekrasova matrica, ako za svako $i \in N$, važi da je

$$|a_{ii}| > h_i(A). \tag{2.12}$$

Poznato je da je klasa Nekrasovih matrica šira od klase SDD matrica, dok je s druge strane, klasa Nekrasovih matrica potklasa H - matrica [CDDL11], [Cve06] i [Szu06].

Dovoljan uslov za regularnost matrice daje nam sledeća teorema [Szu06]:

Teorema 2.7.2 Ako je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica *Nekrasova*, onda je ona regularna.

Dalje, matrica $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ naziva se permutaciona matrica, ako postoji permutacija, $\pi: N \longrightarrow N$, tako da

$P = [p_{ij}] \coloneqq [\delta_{i\pi(j)}] \in \{0,1\}^{n\times n}$, gde je

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & ako\ je\ i = j \\ 0, & ako\ je\ i \neq j \end{cases}$ poznat *Kronekerov δ simbol.*

Ako postoji permutaciona matrica *P* tako da je PAP^T *Nekrasova* matrica, onda matricu *A* nazivamo *Gudkov* matricom [CKR09].

Teorema2.7.3 Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ proizvoljna matrica i neka je λ proizvoljan karakterističan koren matrice *A*. Tada

$$\lambda \in \Gamma_i^h(A) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq h_i(A),\ i \in N\},$$

pa se svi karakteristični koreni nalaze u

$$\Gamma^h(A) \coloneqq \bigcup_{\substack{i,j\in N \\ i\neq j}} \Gamma_i^h(A).$$

Napomenimo da je u ovom slučaju crtanje oblasti lokalizacije karakterističnih korena matrice Nekrasova veoma otežano, budući da su veličine h_i definisane rekurentnom relacijom, stoga su slika i primer sa lokalizacijom spektra u ovoj sekciji izostavljeni.

Teorema 2.7.4 Ako je matrica A matrica *Nekrasova* i ako su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni, onda se svi karakteristični koreni matrice A nalaze u desnoj poluravni.

Dokaz:

Neka su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni i matrica A je matrica Nekrasova. Onda važi uslov (2.12), pa je

$$|a_{ii}| > h_i(A), \text{ za svako } i \in N.$$

U teoremi 2.7.3 skup koji sadrži karakteristične korene je definisan sa $\Gamma_i^h(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq h_i(A),\ i \in N\}$. Na osnovu njegove definicije i osobina matrice A iz teoreme 2.7.3 zaključujemo da se unija takvih skupova data sa $\bigcup_{\substack{i,j\in N \\ i\neq j}} \Gamma_i^h(A)$, odnosno čitava oblast lokalizacije karakterističnih korena matrice A nalazi u desnoj poluravni. □

Analogno prethodnim razmatranjima dolazimo do zaključka da je matrica Nekrasova sa pozitivnim dijagonalnim elementima pozitivno stabilna matrica.

2.8. *S – Nekrasov* matrice

Definicija 2.8.1. Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ proizvoljna i neka je skup $S \subseteq N$ neprazan podskup indeksa. Matrica A je *S – Nekrasova* matrica ako važi

$$|a_{ii}| > h_i^{\,S}(A), \text{ za svako } i \in S, \tag{2.13}$$

$$|a_{jj}| > h_j^{\,\bar{S}}(A), \text{ za svako } j \in \bar{S}, \tag{2.14}$$

$$\left(|a_{ii}| - h_i^{\,S}(A)\right) \cdot \left(|a_{jj}| - h_j^{\,\bar{S}}(A)\right) > h_i^{\,\bar{S}}(A) \cdot h_j^{\,S}(A) \text{ za svako } i \in S, j \in \bar{S}. \tag{2.15}$$

Sledi odgovarajući rezultat o regularnosti *S – Nekrasov* matrica:

Teorema 2.8.2 Ako je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$ *S – Nekrasov* matrica, onda je A regularna, štaviše A je H – matrica.

Dokaz se može može pronaći u [CKR09], a ideja dokaza se sastoji u tome da se pronađe skalirajuća matrica X analogno Teoremi 2.2.1 i da se primeni Teorema 2.1.3.

Teorema 2.8.3 Neka je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ proizvoljna matrica. Tada za svaki neprazan skup indeksa $S \subseteq N$ postoje $i \in S$ i $j \in \bar{S}$ takvi da je

$$\Gamma_i^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq h_i^S(A)\},\ i \in S\ ,$$

$$\Gamma_j^{\bar{S}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq h_j^{\bar{S}}(A)\},\ j \in \bar{S},$$

i

$$G_{ij}^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : \left(|z - a_{ii}| - {h_i}^S(A)\right)\left(|z - a_{jj}| - {h_j}^{\bar{S}}(A)\right) \leq {h_i}^{\bar{S}}(A)\ {h_j}^S(A)\}.$$

Tada svi karakteristični koreni matrice A pripadaju skupu

$$\Gamma^S(A) := \left(\bigcup_{i\in S} \Gamma_i^S(A)\right) \cup \left(\bigcup_{j\in \bar{S}} \Gamma_j^{\bar{S}}(A)\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{i\in S\\ j\in \bar{S}}} G_{ij}^S(A)\right).$$

Očigledno je bolja oblast lokalizacije karakterističnih korena predstavljena skupom

$$\Theta(A) := \bigcap_{\substack{S\subset N\\ S\neq\emptyset, S\neq N}} \Gamma^S(A).$$

Kao u prethodnom, tako i u ovom slučaju crtanje oblasti lokalizacije karakterističnih korena S – Nekrasov matrice je veoma otežano, budući da su veličine ${h_i}^S$ i ${h_j}^{\bar{S}}$ definisane rekurentnom relacijom, stoga su slika i primer sa lokalizacijom spektra u ovoj sekciji izostavljeni.

Neka je klasa $\mathbb{K}^*$ klasa S - *Nekrasov* matrica. Kao i u dosadašnjim sekcijama, sledi tvrđenje o lokalizaciji karakterističnih korena S - *Nekrasov* matrice sa pozitivnim dijagonalnim elementima.

Teorema 2.8.4 Ako je matrica A S - *Nekrasov* matrica i ako su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni, onda se svi karakteristični koreni matrice A nalaze u desnoj poluravni.

Dokaz:

Neka su svi dijagonalni elementi matrice A pozitivni i neka je matrica A je S -*Nekrasov* matrica. Onda važe uslovi (2.13), (2.14) i (2.15), odnosno za svaki neprazan skup indeksa $S \subseteq N$ postoje $i \in S$ i $j \in \bar{S}$ takvi da je

$$|a_{ii}| > {h_i}^S(A),$$

$$|a_{jj}| > {h_j}^{\bar{S}}(A),$$

$$\left(|a_{ii}| - {h_i}^S(A)\right) \cdot \left(\left|a_{jj}\right| - {h_j}^{\bar{S}}(A)\right) > {h_i}^{\bar{S}}(A) \cdot {h_j}^S(A).$$

Neka je λ karakterističan koren matrice A. Imamo da je

$$|\lambda - a_{ii}| \leq h_i^S(A) < |a_{ii}| = a_{ii}\ ,$$

$$\left|\lambda - a_{jj}\right| \leq h_j^{\bar{S}}(A) < |a_{jj}| = a_{jj}.$$

U teoremi 2.8.3 skup koji će sadržati karakteristične korene definisan je sa

$$G_{ij}^S(A) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \left(|z - a_{ii}| - {h_i}^S(A)\right)\left(\left|z - a_{jj}\right| - {h_j}^{\bar{S}}(A)\right) \leq {h_i}^{\bar{S}}(A)\ {h_j}^S(A)\}.$$

Na osnovu njegove definicije i osobina matrice A iz teoreme 2.8.4 zaključujemo da se unija $\bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} G_{ij}^S(A)$ (takvih skupova) nalazi u desnoj poluravni.

Budući da važe gornje nejednakosti unija svih krugova i svih krivih koje sadrže karakteristične korene matrice nalaziće se u desnoj poluravni. Formiranjem preseka po svim izborima skupa S dobijamo oblast lokalizacije koja leži u svakoj oblasti $\Gamma^S(A)$ pa zaključujemo da se čitava oblast lokalizacije $\Theta(A)$ za S - Nekrasov matricu sa pozitivnim dijagonalnim elementima nalazi u desnoj poluravni. □

Analogno prethodnim razmatranjima dolazimo do zaključka da je matrica iz klase S - Nekrasova sa pozitivnim dijagonalnim elementima pozitivno stabilna matrica.

3. Funkcije u MATLAB-u za implementaciju oblasti lokalizacije

U ovoj sekciji su navedeni kodovi funkcija u programskom paketu MATLAB, pomoću kojih su formirane slike u radu.

Bitno je napomenuti da su kodovi fokusirani na potrebe rada, stoga se često ne radi o optimalnom programskom kodu za formiranje odgovarajuće oblasti lokalizacije. Ipak, čitalac koji poznaje osnove programiranja u MATLAB-u može, na osnovu izloženih ideja, relativno lako prilagoditi funkcije svojim potrebama.

Promenljiva eps u svim funkcijama predstavlja argument pomoću koga se zadaje preciznost crtanja grafika. Vrednosti sa kojima su formirani grafici u radu su eps = 0.1, eps = 0.01 odnosno eps = 0.001, u zavisnosti od slučaja do slučaja. Promenljive A i B su argumenti kojima se zadaju matrice za koje crtamo oblasti lokalizacije. Ostali argumenti variraju od slučaja do slučaja i predstavljaju specifičnost lokalizacije na koju se odnosi.

U nastavku, za svaki kod navodimo lokalizaciju koju prikazuje, kao i reference slika koje su pomoću njega formirane.

1. Funkcija za crtanje Geršgorinovog skupa, Slika 1.

```
function h=gers(A,eps);
[m,n]=size(A);
if m==n
a=diag(A);
r=sum(abs(A-diag(a))')';
h=clf; axis equal; hold on;
lr=min(real(a)-r);li=min(imag(a)-r);
ur=max(real(a)+r);ui=max(imag(a)+r);
[x,y]=meshgrid(1.1*lr:eps:1.1*ur,1.1*li:eps:1.1*ui);
f=abs(x+i*y-a(1))-r(1);
for j=2:n
f=min(f,abs(x+i*y-a(j))-r(j));
end
contour(x,y,-f,[0 0]);
plot(real(eig(A)),imag(eig(A)),'kx','MarkerSize',10);
for j=1:n
contour(x,y,abs(x+i*y-a(j))-r(j),[0 0],'k');
end
set(gca,'XLim',[lr-50*eps ur+50*eps],'YLim',[li-50*eps ui+50*eps]);
colormap([0 0 0; 0.8 0.8 0.8; 1 1 1]);
else
```

```
h=NaN;
End
```

2. **Funkcija za crtanje Brauerovog skupa, Slika 2**

```
function h=brauer(A,eps);
[m,n]=size(A);
if m==n
a=diag(A);
r=sum(abs(A-diag(a))’)’;
h=clf;
axis equal; hold on;
lr=min(real(a)-r)-50*eps;li=min(imag(a)-r)-50*eps;
ur=max(real(a)+r)+50*eps;ui=max(imag(a)+r)+50*eps;
[x,y]=meshgrid(lr:eps:ur,li:eps:ui);
f=abs(x+i*y-a(1)).*abs(x+i*y-a(2))-r(1)*r(2);
fg=abs(x+i*y-a(1))-r(1);
for j=1:n
fg=min(fg,abs(x+i*y-a(j))-r(j));
for k=j+1:n
f=min(f,abs(x+i*y-a(j)).*abs(x+i*y-a(k))-r(j)*r(k));
end
end
```

```
contourf(x,y,-f,[0 0],'k');
contour(x,y,-fg,[0 0],'k','LineWidth',2);
plot(real(eig(A)),imag(eig(A)),'kx','MarkerSize',10);
set(gca,'XLim',[lr ur],'YLim',[li ui]);
colormap([0 0 0; 0.8 0.8 0.8]);
else
h=NaN;
end
```

3. Funkcija za crtanje lokalizacije Ostrovskog za fiksiran parametar α, Slika 3

```
function h=ost(A,alpha,eps);
[m,n]=size(A);
if m==n
a=diag(A);
r=sum(abs(A-diag(a))')';
c=sum(abs(A-diag(a)))';
rad=r*alpha.*c*(1-alpha);
%h=clf;
axis equal; hold on;
lr=min(real(a)-rad);li=min(imag(a)-rad);
ur=max(real(a)+rad);ui=max(imag(a)+rad);
[x,y]=meshgrid(1.1*lr:eps:1.1*ur,1.1*li:eps:1.1*ui);
```

```
f=abs(x+i*y-a(1))-rad(1);
for j=2:n
f=min(f,abs(x+i*y-a(j))-rad(j));
end
contourf(x,y,-f,[0 0]);
plot(real(eig(A)),imag(eig(A)),'kx','MarkerSize',10);
for j=1:n
contour(x,y,abs(x+i*y-a(j))-rad(j),[0 0],'k');
end
set(gca,'XLim',[lr-50*eps ur+50*eps],'YLim',[li-50*eps ui+50*eps]);
colormap([0 0 0; 0.8 0.8 0.8; 1 1 1]);
else
h=NaN;
end
```

4. Funkcija za crtanje lokalizacije Ostrovskog za fiksiran parametar α, Slika 4

```
function h=ost(A,alpha,eps);
[m,n]=size(A);
if m==n
a=diag(A);
r=sum(abs(A-diag(a))')';
c=sum(abs(A-diag(a)))';
```

```
rad=r.^alpha.*c.^(1-alpha);
%h=clf;
axis equal; hold on;
lr=min(real(a)-rad);li=min(imag(a)-rad);
ur=max(real(a)+rad);ui=max(imag(a)+rad);
[x,y]=meshgrid(1.1*lr:eps:1.1*ur,1.1*li:eps:1.1*ui);
f=abs(x+i*y-a(1))-rad(1);
for j=2:n
f=min(f,abs(x+i*y-a(j))-rad(j));
end
contourf(x,y,-f,[0 0]);
plot(real(eig(A)),imag(eig(A)),'kx','MarkerSize',10);
for j=1:n
contour(x,y,abs(x+i*y-a(j))-rad(j),[0 0],'k');
end
set(gca,'XLim',[lr-50*eps ur+50*eps],'YLim',[li-50*eps ui+50*eps]);
colormap([0 0 0; 0.8 0.8 0.8; 1 1 1]);
else
h=NaN;
end
```

5. Funkcija za crtanje Σ − SDD skupa, Slika 5.

```
function h=ckv(A,eps);
[m,n]=size(A);
if m==n
 a=diag(A);B=abs(A-diag(a))';
 r=sum(B)';
 h=clf; axis equal; hold on;
 lr=min(real(a)-r)-50*eps;li=min(imag(a)-r)-50*eps;
 ur=max(real(a)+r)+50*eps;ui=max(imag(a)+r)+50*eps;
 [x,y]=meshgrid(lr:eps:ur,li:eps:ui);
 g=NaN*ones(size(x));
 for p=1:n-1
 P=nchoosek(1:n,p);
 gf=NaN*ones(size(x));
 for t=1:size(P,1)
 S=P(t,:);
 Sbar=1:n;Sbar(S)=[];
 if size(S,2)==1
 rS=B(S,:)';
 else
 rS=sum(B(S,:))';
```

```
end
if size(Sbar,2)==1
rSbar=B(Sbar,:)’;
else
rSbar=sum(B(Sbar,:))’;
end
f=NaN*ones(size(x));
for j=S
f=min(f,abs(x+i*y-a(j))-rS(j));
for k=Sbar
f=min(f,(abs(x+i*y-a(j))-rS(j)).*(abs(x+i*y-a(k))-
rSbar(k))-rSbar(j)*rS(k));
end
end
gf=max(gf,f);
contour(x,y,f,[0 0],’k’);
end
g=max(g,gf);
end
contourf(x,y,-g+1,[1 1],’k’);
plot(real(eig(A)),imag(eig(A)),’kx’,’MarkerSize’,10);
set(gca,’XLim’,[lr ur],’YLim’,[li ui]);
```

```
colormap([0 0 0; 0.8 0.8 0.8]);
else
h=NaN;
        end
```

POPIS SLIKA

1. Slika 1. Geršgorinov skup za matricu A_1 iz Primera 1. 20
2. Slika 2. Brauerov skup za matricu A_2 iz Primera 2. 23
3. Slika 3. Skup Ostrovskog za $\alpha 1-$ matricu A_3 iz Primera 3. 25
4. Slika 4. Skup Ostrovskog za $\alpha 2-$ matricu A_4 iz Primera 4. 28
5. Slika 5. Lokalizacija $\Sigma -$ SDD za matricu A_5 iz Primera 5. 32

O AUTORU

Sanja Dukić je rođena 21. oktobra 1985. godine u Senti. Gimnaziju opšteg smera završila je u Novom Kneževcu 2004. godine kao nosilac *„Vukove diplome“*. Iste godine se upisuje na Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, na smer matematika finansija. Po završetku treće godine studija nemačka služba za razmenu studenata - *DAAD (Deutsche Akademische Austausch Dienst*) je nagrađuje stipendijom za izuzetan uspeh tokom studiranja i leto 2008. provodi u Berlinu na *Goethe*-ovom institutu učeći nemački jezik. Februara 2010. godine završava osnovne akademske studije kao diplomirani matematičar – matematika finansija sa prosečnom ocenom *8.90*. Počinje da radi u Gimnaziji koju je završila u svom rodnom mestu. Na jesen 2011. godine upisuje master akademske studije na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, na odseku za primenjenu matematiku, studijski program – matematika u tehnici. Položila je sve ispite sa prosečnom ocenom 9.57. Redovnim prisustvom *sc:ala* seminaru na Prirodno - matematičkom fakultetu usavršava svoje znanje i proširuje vidike u matematičkim disciplinama. Takođe, i dalje neguje učenje stranih jezika.

U Novom Sadu, decembar 2013.

Sanja Dukić, sanjadukic@eunet.rs

LITERATURA

[ASY96] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems, Springer, 1996

[BC09] Bru R., Cvetković Lj., Kostić V., Pedroche F., Sums of σ - strictly diagonally dominant matrices, Linear and Multilinear Algebra 57.

[BC10] Bru, R., Cvetković, Lj., Kostić, V., Pedroche, F., Characterization of α1 and α2 matrices. *Cent. Eur. J. Math.***8(1)** (2010), 32–40.

[BP94] Berman A., Plemons R. J., Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences, Classics in Applied MAthematics, vol. 9, SIAM, Philadelphia, 1994.

[Bra47] Brauer A., Limits for the characteristic roots of a matrix ii, Duke Math. J. 14 (1947), 21–26.

[CD11] Cvetković Lj., Dai P.-F., Doroslovački K., Li Y.-T., Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices. Appl. Math. Comput. (submitted) http://arxiv.org/abs/1112.5868

[CK05a] Cvetković Lj., Kostić V., New criteria for identifying H - matrices, J. Comput Appl. Math. (2005), 265–278.

[CK06] Cvetković Lj. , Kostić V., Between Geršgorin and minimal Geršgorin set, J. Comput Appl.Math. 196 (2006), no. 2, 452–458.

[CK09] Cvetković Lj., Kostić V., Bru R., Pedroche F., A simple generalization of Geršgorin's theorem, submited.

[CKR09] Cvetković Lj., Kostić V., Rauški S., A new subclass of H-matrices, Applied Mathematics and Computation 208(2009) 206-210

[CKV04] Cvetković Lj., Kostić V., Varga R. S., A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion set, ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis) 18 (2004), 73–80.

[Cve06] Cvetković Lj., H - matrix theory vs. eigenvalue localization, Numerical Algorithms 42 (2006), no. 3-4, 229–245.

[Des87] Desplanques J., théorem d'algébre, J. de Math. Spec. 9 (1887), 12–13.

[Ger31] Geršgorin S., Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1 (1931), 749–754.

[Gud66] Gudkov V.V., On a certain test for nonsingularity of matrices, Latv. Mat. Ezhegodnik 1965, Zinatne, Riga (1966) 385–390.

[GW92] Gao Y., Wang X., Criteria for generalized diagonally dominant matrices, Linear Algebr. Appl. 169 (1992), 257–268.

[Had03] Hadamard J., Lecones sur la propagations des ondes, Hermann et fils, Paris, 1903, reprinted in 1949 by Chalsea, New York.

[HJ85] Horn R. A., Johnson C. R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[HJ91] Horn R. A. and Johnson C. R., Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Hua95] Huang, T.Z.: A note on generalized diagonally dominant matrices. Linear Algebra Appl. **225** 237–242 (1995)

[Joh05] Johnson J. P., A mathematical model of adhesion interactions between living cells, Department of Mathematics, Brigham Young University, 2005.

[Kol03] Kolotilina L. Yu., Generalizations of Ostrowski-Brauer Theorem, Linear Algebra Appl. 364 (2003), 65–80.

[KCV09] Kostić, V., Cvetković, Lj., Varga, R.S., Geršgorin-type localizations of generalized eigenvalues. Numer. Linear Algebra Appl. 16, 11-12 (2009,) 883-898.

[Lev81] Lévy L., Sur le possibilité du l'equlibre électrique, C. R. Acad. Paris 93 (1881), 706–708.

[Hog07] Hogben L., Handbook of linear algebra, Discrete matrhematics and its applications, Iowa State University, Ames, Iowa, USA 2007.

[HZ01] Qiya Hu and Jun Zou. An iterative method with variable relaxation parameters for saddle-point problems. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2001.

[LH96] D. A. Lauffenburger ,A. F. Horwitz. Cell migration: A physically integrated molecular process. Cell, 84:359–369, 1996.

[LT85] Lancaster P., Tismenetsky M., The Theory of Matrices: with Applications, Academic Press, New York, NY, USA, 1985.

[LT97] Li B., Tsatsomeros M. J., Doubly diagonally dominant matrices, Linear Algebra Appl. 261 (1997), 221–235.

[MC05] Morača, N., Cvetković, Lj., Algorithm for checking S-SDD matrices, ICNAAM 2005 Extended Abstracts. Simos, T.E., Psihoyios, G., Tsitouras, Ch. (eds.), Wiley, 382–384 (2005)

[Min00] Minkowski H., Zur theorie der einheiten in den algebraichen zahlkörpern, Nachr. Königlichen Ges. Wiss. Göttingen Math. - Phys. Kl., 90-93. Gesamelte Abh. 1 (1900), 316–319.

[MK13] Mračević A.,Kostić. V., Prednosti dijagonalne dominacije u optimizaciji bežičnih senzor mreža, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2013

[Ost37] Ostrowski A. M., Über die Determinanten mit überviegender Hauptdiagonale, Coment. Math. Helv. 10 (1937), 69–96.

[Ost51] Ostrowski A. M., Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen, Compositio Math. 9 (1951), 209–226.

[Tau49] Taussky O., On reccuring theorem on determinants, Amer. Math. Monthly 95 (1949), 801–812.

[Szu06] Szulc T., Some remarks on a theorem of Gudkov, Linear Algebra Appl. 225 (1995) 221–235.

[Var04] Varga R.S., Geršgorin and His Circles, Springer-Verlag, New York, 2004.

[VK99] Varga R. S., Kraustengl A., On Gerschgorin-type problems and ovals of Cassini, ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis) 8 (1999), 15–20.