УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У НОВОМ САДУ

Тамара Копања

Увод у варијациони рачун са примјенама

МАСТЕР РАД

Нови Сад, 2020

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска документација
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	Дипломски – мастер рад
Аутор, **АУ**:	Тамара Копања
Ментор, **МН**:	Др Тибор Лукић, ванредни професор
Наслов рада, **НР**:	Увод у варијациони рачун са примјенама
Језик публикације, **ЈП**:	Српски / латиница
Језик извода, **ЈИ**:	Српски
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2020
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Нови Сад; трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	
Научна област, **НО**:	Примењена математика
Научна дисциплина, **НД**:	Обрада слике
Предметна одредница/Кqучне речи, **ПО**:	Обрада слике, варијациони рачун, метод опадајућег градијента, отклањање шума, активна контура
УДК	
Чува се, **ЧУ**:	У библиотеци Факултета техничких наука, Нови Сад
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Тема мастер рада је варијациони рачун. Урађени су примјери у којима се користи варијациони рачун за одређивање екстремних вриједности функционала. Описали смо нумерички поступак за рјешавање Ојлер-Лагранжове једначине која представља потребан услов за екстрем функционала. На крају рада наведени су примјери примјене варијационог рачуна, прије свега примјена у обради слике.
Датум прихватања теме, **ДП**:	
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	Др Синиша Бикић, ванредни професор	
	Члан:	Др Владимир Илић, доцент	Потпис ментора
	Члан, ментор:	Др Тибор Лукић, ванредни професор	

UNIVERSITY OF NOVI SAD ● **FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monographic publication
Type of record, **TR**:	Textual printed material
Contents code, **CC**:	Master Thesis
Author, **AU**:	Tamara Kopanja
Mentor, **MN**:	PhD Tibor Lukić, Associate Professor
Title, **TI**:	Introduction to the Calculus of Variations with Applications
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2020
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Novi Sad, Dositeja Obradovica sq. 6
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	
Scientific field, **SF**:	Applied Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Image Processing
Subject/Key words, **S/KW**:	image processing, calculus of variations, descent gradient method, denoising, active contour model
UC	
Holding data, **HD**:	The Library of Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Serbia
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	The topic of this master thesis is calculus of variations. Examples are done, that use calculus of variations to determine extreme values of functionals. We described numerical procedure for solving Euler-Lagrange equation that represents a necessary condition for an extremum of functionals. Finally, we showed some applications where calculus of variations is used, especially image processing.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	

Defended Board, **DB**:	President:	PhD Siniša Bikić, Associate Professor	
	Member:	PhD Vladimir Ilić, Assistant Professor	Menthor's sign
	Member, Mentor:	PhD Tibor Lukić, Associate Professor	

	УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ●**ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА** 21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6	Број:
	ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД	Датум:

(Податке уноси предметни наставник - ментор)

СТУДИЈСКИ ПРОГРАМ:	Математика у техници
РУКОВОДИЛАЦ СТУДИЈСКОГ ПРОГРАМА:	Др Зоран Овцин, доцент

Студент:	**Тамара Копања**	Број индекса:	V1 1/2019
Област:	**Примењена математика**		
Ментор:	Др Тибор Лукић, ванредни професор		

НА ОСНОВУ ПОДНЕТЕ ПРИЈАВЕ,ПРИЛОЖЕНЕ ДОКУМЕНТАЦИЈЕ И ОДРЕДБИ СТАТУТА ФАКУЛТЕТА ИЗДАЈЕ СЕ ЗАДАТАК ЗА МАСТЕР РАД, СА СЛЕДЕЋИМ ЕЛЕМЕНТИМА:
- проблем – тема рада;
- начин решавања проблема и начин практичне провере резултата рада, ако је таква провера неопходна;

НАСЛОВ МАСТЕР РАДА:

Увод у варијациони рачун са примјенама

ТЕКСТ ЗАДАТКА:

Задатак студента у оквиру овог мастер рада је да се упозна са уводним и актуелним резултатима из области варијационог рачуна и са могућностима примене у обради дигиталних слика.

Задатак, подразумева проучавање одговарајуће научне литературе. Очекује се да у оквиру мастер рада буде дат увод у теорију варијационог рачуна са најважнијим дефиницијама и теоремама. Теоретски увод проширити са приказом решења најзначајних математичких проблема из историје математике, као што су Брахистохрона, Дидонин- и Ферматов проблем, које су могу решти методама варијационог рачуна. Анализирати и приказати могућности примене варијационог рчуна у обради дигиталних слика, нарочито у области отклањања шума. различити и често коришћени математички модели за обраду дигиталних слика. Користећи MATLAB програмски пакет, навести одговарајуће експерименталне резултате.

У закључку се очекује да студент да преглед отворених проблема из посматране области, као и да у изложи своје идеје за даљи рад.

Руководилац студијског програма	Ментор рада:
Др Зоран Овцин, доцент	Др Тибор Лукић, ванредни професор

Примерак за: o - Студента;o -Ментора

Predgovor

Osnovna tema ovog rada je varijacioni račun: osnovni pojmovi, problemi i mogućnost primjene. Varijacioni račun, kao metoda za optimizaciju, se koristi za modelovanje i rješavanje važnih problema iz različitih oblasti. Prije svega to su mehanika, optika, obrada slike, medicina i mnogi drugi fizički i inženjerski problemi. Optimizacija ili matematičko programiranje se bavi problemima u kojima se traži minimum ili maksimum određenih matematčkih objekata. Naravno, oduvijek su ljudi željeli da optimizuju različite probleme. Tipični primjeri su minimizacija troškova ili maksimizacija dobiti. Riječ optimizacija vodi porijeklo iz latinskog jezika, *optimus* je superlativ riječi *bonus* i znači najbolji, najprikladniji. Ako želimo da jednom riječju obuhvatimo minumum i maksimum funkcije (u zavisnosti šta kod konkretne funkcije tražimo) možemo da kažemo ekstremna vrijednost. I riječ ekstrem vodi porijeklo iz latinskog jezika, nastala je od riječi *extremus* što znači krajnji ili posljednji. U zavisnosti od postavke problema čiji ekstrem želimo da odredimo koriste se različite metode i algoritmi. Varijacioni račun rješava probleme egzistencije i određivanja ekstrema datog integralnog funkcionala o kome ćemo govoriti u nastavku. Rad je podjeljen u nekoliko glava.

U uvodnoj glavi ćemo se vratiti na početak razvoja varijacionog računa a pomalo i na period prije početka. Spomenućemo matematičare koji su prethodili osnivanju i koji su učestvovali u začetku metode koje koristimo. Prije svega to su Njutn, braća Bernuli, Ojler i Lagranž.

Druga glava je posvećena osnovama varijacionog računa. Nakon što se kroz konkretne primjere „uvjerimo " da nam je potreban varijacioni račun uvodimo osnovne pojmove i definišemo varijaciju funkcije. Kada uvedemo potrebne pojmove formulisaćemo i dokazati fundamentalnu jednakost varijacionog računa, Ojler- Lagranžovu jednačinu koja predstavlja potreban uslov za pronalaženje ekstrema funkcionele. Izvešćemo Ojler- Lagranžovu jednačinu za neke specijalne slučajeve i riješiti neke karakteristične probleme varijacionog računa (poglavlje 2.4).

U trećoj glavi navodimo jedan numerički postupak za rješavanje Ojler-

Lagrnažove jednačine koja je u opštem slučaju (parcijalna) diferencijalna jednačina za koju nemamo utvrđen algoritam rješavanja. Često nije lako pronaći rješenje analitičkim putem pa su nam potrebni numerički postupci rješavanja. U ovom radu je prikazan metod opadajućeg gradijenta kao numerički postupak koji može da posluži i za rješavanje Ojler- Lagranžove jednačine.

Posljednja, četvrta glava govori o primjeni varijacionog računa. Date su dvije različite primjene i time je glava podjeljena na dva poglavlja. Jedno poglavlje je posvečeno modelu ekonomskog rasta gdje smo ukratko naveli osnovne ekonomske pojmove i modelirali problem optimizacije ekonomije što se može riješiti varijacionim računom. Drugo poglavlje govori o primjeni u obradi slike što je zanimljiva i aktuelna tema. Uz pomoć varijacionog računa možemo da riješimo problem zamućenosti, šuma na slici ili oivičiti posmatrani objekat na slici.

Na kraju je u zaključku dat kratak pregled rada.

***

Ljubav prema matematici presudila je da upišem studije matematike, a tokom osnovnih i master studija moji profesori su, prenoseći znanje i zainteresovanost za matematiku, potvrdili da je to bila ispravna odluka.

Želim da se zahvalim svom mentoru, prof. dr Tiboru Lukiću na nesebičnoj pomoći, razumijevanju i usmjeravanju u toku izrade ovog rada, kao i za preneseno znanje i upoznavanje sa mogućnostima primjene matematičkih metoda u jednoj zanimljivoj i za mene novoj oblasti, obradi slika. Zahvaljujem se i članovima komisije na korisnim savjetima koji su poboljšali ovaj rad.

Želim se zahvaliti ujaku i ujni na svemu što su mi pružili. Posebno se zahvaljujem mami, tati, sestri i Dejanu na beskrajnoj ljubavi, podršci i pomoći.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Zvaničan početak varijacionog računa kao matematičke oblasti ne možemo sa sigurnošću utvrditi. Grčki matematičari su se već bavili izoperimetrijskim problemom. Oni su tada, naravno, rješavali pretežno geometrijskim metodama tj. nije bilo govora o varijacionom računu kakav sad poznajemo ali su se zadaci i zainteresovanost matematičara za takve probleme već javljali. Prije svega to su Zenodorus i Papus iz čijih spisa smo saznali o problemima koji su rješavani. Heron iz Aleksandrije je prije nove ere definisao princip najkraće putanje svjetlosti što je kasnije istraživao i dokazivao Ferma[1] u svojim spisima 1662. godine. Sredinu 17. vijeka bismo mogli uzeti za početak ozbiljnijeg razvoja varijacionog računa iako ni tada naziv varijacija nije postojao ali su počele da se razvijaju tehnike i razmišljanja matematičara u smijeru koji vodi ka varijacionom računu. Jedan od matematičara koji je ostavio trag je upravo Ferma koji je želio minimizovati vrijeme prolaska svjetlosnog zraka kroz dvije sredine. Njegova istraživanja su bitna zbog toga što je Johan Bernuli[2] prilagodio njegove metode i koristio ih pri rješavanju problema brahistohrone. Osim toga, 1685. godine Isak Njutn[3] se u svom djelu *„Philosophiae naturalis principia mathematica* “ tj. *„Matematički principi prirodne filozofije“* bavio problemima pronalaženja rotirajućeg tijela, koje će gibajući se kroz fluid konstantnom brzinom minimizovati otpor fluida.

Ozbiljniji preokret nastaje kada je 1696. godine Johan Bernuli objavio

[1]Pierre de Fermat-francuski matematičar i pravnik iz 17. vijeka

[2]Johann Bernoulli- švajcarski matematičar, brat Jakoba Bernulija i otac od Danijela Bernulija koji je podučavao Lopitala matematici. Smatra se da je Lopitalovo pravilo zapravo pravilo Johana Bernulija.

[3]Sir Isaac Newton-engleski fizičar, astronom i matematičar koji se zajedno sa Lajbnicom smatra za tvorca infinitezimalnog računa

članak „Novi problemi čijem se rješenju pozivaju matematičari“[4] u kojem je bio postavljem problem o *brahistohroni*. U ovom problemu se određuje kriva po kojoj će se tijelo, koje se kreće pod dejstvom sopstvene teže, spustiti iz tačke A do tačke B za najkraće vrijeme. Prije njega ovaj problem je formulisao Galileo 1638. godine. Za dalji razvoj varijacionog računa najzaslužniji je Ojler[5] koji je postavio teoretske osnove varijacionog računa. Vođen Bernulijevom temom dao je nove zadatke 1744. u svom djelu „The Method of Finding Curves that Show Some Property of Maximum or Minimum“. Ojleru se javio tada mladi francuski matematičar Lagranž [6], te su oni zajedno uveli pojam varijacije 1755. godine, formulisali su osnovnu jednačinu i postavili temelje u varijacionom računu. Mnogi matematičari su se takođe bavili varijacionim računom, problemom optimizacije raznih pojava a zapažanja nekih od njih su prikazana u [1].

Bitno je da napomenemo da je varijacioni račun metoda nastala iz potrebe za modelovanjem i rješavanjem važnih matematičkih, fizičkih i inženjerskih problema. To je metoda koja je još uvijek aktuelna u rješavanju mnogih problema od kojih ćemo neke pomenuti u okviru rada.

[4] Problema Novum ad Cujus Solutionem Mathematici Invitantur

[5] Leonhard Euler-švajcarski matematičar i fizičar koji je živio u 18. vijeku. Radio je i bio vrlo uspješan u različitim oblastima matematike i danas mnoge teoreme i pojmovi nose njegovo ime.

[6] Joseph-Louis, comte de Lagrange

Glava 2

Uvod u varijacioni račun

2.1 Motivacija za uvođenje varijacionog računa

Da bi dobila na značaju, svaka teorija treba da bude korisna i primjenljiva u praksi. Metod varijacija jeste jedno moćno oruđe za optimizaciju. Prije upoznavanja sa osnovnim pojmovima varijacionog računa pogledajmo gdje možemo da iskoristimo naučeno. Navešćemo za početak neke od problema koji se rješavaju pomoću varijacionog računa: minimalna udaljenost između dvije tačke i Fermaov problem.

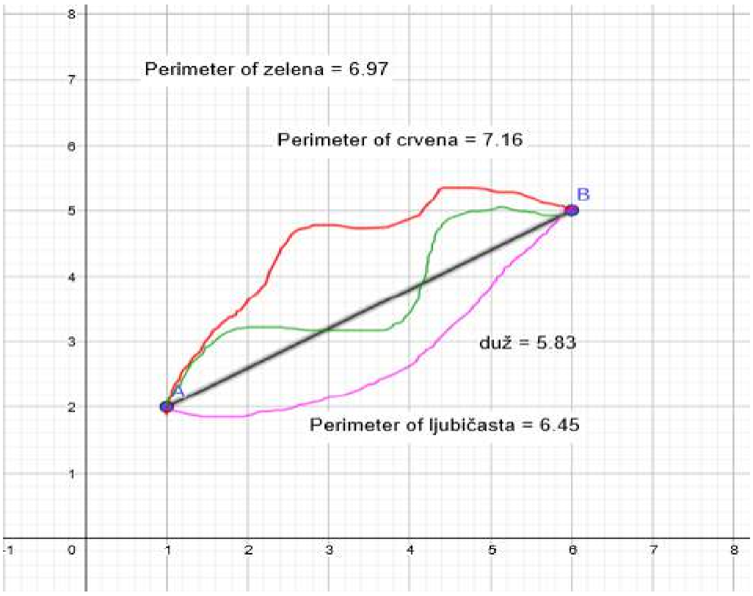
2.1.1 Problem nalaženja najkraćeg puta

Jedan od najjednostavnijih problema varijacionog računa je upravo problem nalaženja krive najmanje dužine koja spaja dvije tačke $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$. Označimo krivu koja spaja tačke sa $x(t)$. Tada je dužina krive jednaka:

$ds = \sqrt{(dt)^2 + (dx)^2} = \sqrt{1 + (x'(t)^2)}dt$ pri čemu je $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$. Odnosno:

$$s = I = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{1 + (x'(t)^2)}dt$$

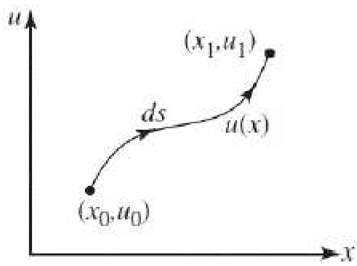
Jasno je da mora da važi: $x(a_1) = a_2$ i $x(b_1) = b_2$ jer kriva spaja tačke A i B. Ovaj problem će biti riješen kada se pronađe diferencijabilna funkcija $x(t)$ koja minimizira dužinu s tj. minimizira integral I i tu nam pomaže varijacioni račun (slika 2.1).



Slika 2.1: Proizvoljne krive od A do B, crtano u GeoGebri

2.1.2 Fermaov problem

Fizički zakoni, zakon prelamanja i odbijanja svjetlosti su direktna posljedica Fermaovog principa koji kaže:
Od svih puteva koje svjetlo može preći, svjetlo bira put koji ima najkraće vrijeme.



Slika 2.2: Proizvoljan put svjetlosti između dvije tačke [2]

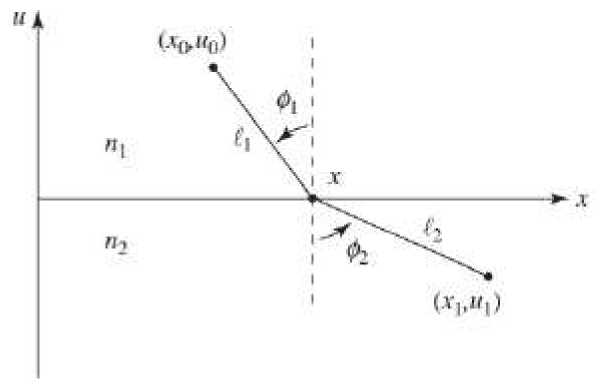
Dakle, naš zadatak je sada da minimiziramo vrijeme putovanja svjetlosti $T[u(x)]$, po svim putanjama $u(x)$ koje svjetlost može preći u datoj sredini između tačaka x_0 i x_1 u momentima t_0 i t_1.

$$T[u(x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{c(x,u)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x,u)}{c_0} ds$$

pri čemu je $c(x,u)$ brzina svjetlosti u datoj sredini, c_0 brzina svjetlosti u vakuumu, $n(x,u)$ indeks prelamanja svjetlosti, dt diferencijal vremena i ds diferencijalni element putanje $u(x)$.

• Slučaj kada imamo dvije homogene sredine sa konstantnim indeksima prelamanja n_1 i n_2

Označimo sa x granicu između ove dvije sredine.



Slika 2.3: Dvije homogene sredine sa indeksima n_1 i n_2 [2]

U homogenim sredinama svjetlost se prostire ravnomjerno-pravolinijski tj. putanja koja ima najkraće vrijeme ima i najmanju dužinu. Ono što trebamo da uradimo, jeste da pronađemo tačku x prelaska iz jedne sredine u drugu.

$$\begin{aligned}
T(x) &= \frac{1}{c_0}\Big[n_1 \int_{x_0}^{x} ds + n_2 \int_{x}^{x_1} ds\Big] \\
&= \frac{1}{c_0}\Big[n_1 l_1 + n_2 l_2\Big] \\
&= \frac{1}{c_0}\Big[n_1 \sqrt{(x-x_0)^2 + u_0^2} + n_2 \sqrt{(x_1 - x)^2 + u_1^2}\Big]
\end{aligned}$$

Primijetimo da vrijeme T zavisi od tačke prelaska iz jedne u drugu sredinu jer znamo da je kroz obe sredine putanja $u(x)$ prava linija. Zbog toga možemo da koristimo izvod funkcije jedne promjenljive $T(x)$ i potreban uslov za minimum funkcije tj. $\dfrac{dT}{dx} = 0$ što je ekvivalentno sa :

$$\frac{1}{2}n_1[(x-x_0)+u_0^2]^{-1/2}2(x-x_0)+\frac{1}{2}n_2[(x_1-x)^2+u_1^2]^{-1/2}(-2(x_1-x))=0$$

Sa slike 2.3 vidimo da je $\sin\phi_1 = \dfrac{x-x_0}{l_1}$ i $\sin\phi_2 = \dfrac{x_1-x}{l_2}$. Koristeći navedeno dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{n_1}{l_1}2l_1\sin\phi_1+\frac{1}{2}\frac{n_2}{l_2}(-2l_2\sin\phi_2) &= 0\\ n_1\sin\phi_1-n_2\sin\phi_2 &= 0\end{aligned}$$

Odnosno dobijamo dobro poznati zakon prelamanja svjetlosti (Snelov zakon): $n_1\sin\phi_1 = n_2\sin\phi_2$.
• Slučaj kada imamo da je indeks prelamanja $n(x,u)$ promjenljiva. Tada je:

$$T[u(x)] = \frac{1}{c_0}\int_{x_0}^{x_1} n(x,u)ds$$

Znamo na osnovu slike 2.2 da je $ds = \sqrt{dx^2+du^2}$, $u = u(x)$ i da je totalni diferencijal od $u(x)$ $du = \dfrac{du}{dx}dx$. Prema tome je:

$$T[u(x)] = \frac{1}{c_0}\int_{x_0}^{x_1} n(x,u)\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}dx$$

Dakle, da bismo riješili problem moramo minimizirati integral što se rješava varijacionim računom koji je u ovom slučaju malo složeniji jer imamo promjenljivu funkciju putanje $u(x)$ i promjenljivu funkciju indeksa prelamanja $n(x,u)$, te je potrebno više informacija o sredini kroz koju se svjetlost kreće.

2.2 Pojam varijacije

2.2.1 Osnovni pojmovi

Definisaćemo osnovne pojmove koji su nam potrebni za definisanje i rad sa varijacijama.

Definicija 1. ***Vektorski prostor*** *V nad poljem $\mathbb{R}$ je skup elemenata koji mogu da se sabiraju i množe skalarima iz $\mathbb{R}$ tako da za svaka dva elementa $u, v \in V$ i svako $a \in A$ važi: $u + v \in V \quad i \quad a \cdot u \in V$,*
sa sljedećim osobinama: $\forall u, v, w \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$,

VP1. $(u + v) + w = u + (v + w)$

VP2. $\exists 0 \in V : 0 + u = u + 0 = u$

VP3. $\forall u \in V, \exists - u \in V : u + (-u) = (-u) + u = 0$

VP4. $u + v = v + u$

VP5. $a(u + v) = au + av$

VP6. $(a + b)u = au + bu$

VP7. $a(bu) = (ab)u$

VP8. $1 \cdot u = u$

Sada je bitno da primjetimo da je skup neprekidnih funkcija na intervalu [a,b] $C_{[a,b]}$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Sabiranje neprekidnih funkcija i množenje neprekidne funkcije skalarom definisano na standardni način znamo da opet daje neprekidnu funkciju. Nama će u ovom radu od koristi biti neprekidne realne funkcije na intervalu $[a, b]$ koje imaju neprekidne izvode do trećeg reda. Primjetimo da pri tome dobijamo jedan vektorski potprostor od $C_{[a,b]}$.

Definicija 2. *Neka je X vektorski (linearan) prostor nad $\mathbb{R}$. Bilo koje preslikavanje iz X u $\mathbb{R}$ naziva se* ***funkcionela****.*

Podsjetimo se definicije parcijalnog izvoda u tački i Tejlorove teoreme.

Definicija 3. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : U \to \mathbb{R}$ i $1 \leq j \leq n$. Funkcija f ima j-ti parcijalni izvod u tački $x \in U$ ako postoji limes*

$$D_j f(x) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0; x + he_j \in U}} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

Koristićemo najčešće oznaku $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Funkcija f je parcijalno diferencijabilna ako za sve $x \in U$ i sve $j \in \{1, 2, ...n\}$ postoji j-ti parcijalni izvod, ako su ti izvodi pri tome neprekidni onda f zovemo neprekidno parcijalno diferencijabilna. Dalje, za svaku od $D_j f$ možemo ispitivati neprekidnu parcijalnu diferencijabilnost što onda predstavlja parcijalnu diferencijabilost drugog reda početne funkcije f. Sada ćemo navesti bez dokaza jednu teoremu koja će nam biti potrebna.

Teorema 1. ***Tejlorova teorema***
Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $N \in \mathbb{N}$, $f : U \to \mathbb{R}$ $(N + 1)$ put diferencijabilno neprekidna funkcija, $x, \overline{x} \in U$. Tada postoji $\tilde{x}$ tako da:

$$f(\overline{x}) = \sum_{|\alpha| \geq N} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} (\overline{x} - x)^\alpha + R_N$$

pri čemu je R_N funkcija ostatka koju možemo zapisati u više oblika npr: $\dfrac{1}{(N+1)!} D^{(N+1)} f(\tilde{x})(x - \tilde{x})^{N+1}$.

2.2.2 Prva varijacija

Neka je $f : x \to f(x)$ neprekidna funkcija realne promjenljive x sa neprekidnim izvodima do zaključno trećeg reda, pri čemu $x \in [a, b]$ i neka je $F[x, f(x), f'(x)]$ neprekidna realna funkcija sa neprekidnim izvodima do trećeg reda. Sa I ćemo označiti sljedeći integral :

$$I(f) = \int_a^b F[x, f(x), f'(x)] dx. \tag{2.1}$$

Vidimo da $I(f)$ preslikava funkciju $f(x)$ u određen realan broj. Dakle, $I(f)$ je funkcionela. Dolazimo do problema kojim ćemo se baviti a to je:
minimizirati (maksimizirati) funkcionelu $I(f)$, odnosno pronaći funkciju $f(x)$ za koju će funkcionela $I(f)$ imati ekstremnu (minimalnu ili maksimalnu) vrijednost.

Zadajemo granične uslove (granične tačke u kojima je funkcija f definisana) u obliku: $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$.

Ako pretpostavimo da funkcionela $I(f)$ ima ekstrem u $f=f(x)$, onda za svaku drugu funkciju (malu promjenu funkcije f) $\hat{f}(x)=f(x)+\varepsilon\varphi(x)$ gdje je ε je proizvoljno mali realan broj i φ neprekidno diferencijabilna funkcija sa graničnim uslovima

$$\hat{f}(a)=\alpha\rightarrow\varphi(a)=0$$
$$\hat{f}(b)=\beta\rightarrow\varphi(b)=0$$

važi
$I(\hat{f})>I(f)$ ako se za $f=f(x)$ dostiže minimum, a
$I(\hat{f})<I(f)$ ako se za $f=f(x)$ dostiže maksimum funkcionele $I(f)$ nad $x\in[a,b]$.

Definicija 4. *Varijacija funkcije f je $\delta f=\hat{f}(x)-f(x)=\varepsilon\varphi(x)$.*

Funkcija f je stacionarna funkcija a $\hat{f}$ neka njoj bliska funkcija. Dok smo sa df ili ∂f označavali promjenu od tačke do tačke tj promjena argumenta, sa δf označavamo promjenu funkcije bez promjene argumenta. Pokazaćemo dvije leme.

Lema 1. *Izvod varijacije funkcije $f=f(x)$ jednak je varijaciji izvoda.*

Dokaz. : Izvod varijacije je: $\frac{d}{dx}(\delta f)=\frac{d}{dx}(\varepsilon\varphi(x))=\varepsilon\frac{d\varphi(x)}{x}$
a varijacija izvoda $f(x)$ je:
$\delta(\frac{df(x)}{dx})=\frac{d\hat{f}(x)}{dx}-\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\hat{f}(x)-df(x)}{dx}=\frac{d(\varepsilon\varphi(x))}{dx}=\varepsilon\frac{d(\varphi(x))}{dx}$
čime je jednostavna lema dokazana. □

Takođe važi i sljedeća lema:

Lema 2. *Integral varijacije je jednak varijaciji integrala.*

Dokaz. $\delta(\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx)=\int_{x_0}^{x_1}\hat{f}(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx=$
$=\int_{x_0}^{x_1}[\hat{f}(x)-f(x)]dx=\int_{x_0}^{x_1}\delta f(x)dx$

□

Imajući u vidu gornje oznake, jasno je da funkcionela $I[f + \varepsilon\varphi(x)]$ dostiže svoj ekstrem za $\varepsilon = 0$, odnosno koristeći diferencijalni račun to znači da izvod funkcije $I[f + \epsilon\varphi(x)]$ po ε mora biti jednak 0 u tački $\varepsilon = 0$. Za ovaj izvod kažemo da je **prva varijacija** funkcionele I i označavamo sa δI, odnosno

$$\delta I = \frac{d}{d\varepsilon} I[f + \varepsilon\varphi(x)]\bigg|_{\varepsilon=0} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I[\hat{f}] &= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\int_a^b F[x, \hat{f}, \hat{f}']dx\right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \hat{f}}\frac{d\hat{f}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \hat{f}'}\frac{d\hat{f}'}{d\varepsilon}\right)dx \end{aligned}$$

Pošto x ne zavisi od ε slijedi da je $\dfrac{dx}{d\varepsilon} = 0$. Takođe, znajući da je $\hat{f}(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ slijedi da je

$$\frac{d\hat{f}}{d\varepsilon} = \varphi \qquad \text{i} \qquad \frac{d\hat{f}'}{d\varepsilon} = \varphi' \ .$$

Koristeći ovo dobijamo:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[\hat{f}] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{f}}\varphi + \frac{\partial F}{\partial \hat{f}'}\varphi'\right)dx \tag{2.3}$$

Kako ε ne učestvuje u integraciji možemo odmah uzeti vrijednost $\varepsilon = 0$ što nam treba po uslovu. Dobijamo:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[\hat{f}]\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}\varphi + \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi'\right)dx$$

Parcijalnom integracijom drugog člana u jednačini, uzimajući da je

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial F}{\partial f'} \qquad & dv &= \varphi', \quad \text{odnosno} \\ du &= \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}dx \qquad & v &= \varphi \end{aligned}$$

dobijamo sljedeće:

$$\delta I = \frac{d}{d\varepsilon} I[f + \varepsilon\varphi(x)]\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f}\varphi dx + \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi dx$$

odnosno kako smo na početku postavili uslov da je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ dobijamo konačno:

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}\varphi - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi\right) dx = 0$$

Zapisaćemo dobijenu jednakost u obliku:

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right) \varphi dx = 0 \tag{2.4}$$

jer će nam trebati za vrlo važna zapažanja.

2.3 Ojler-Lagranžova jednačina

Lema 3. *Neka važi* $\int_a^b S(x)h(x)dx = 0$ *za sve funkcije* $h = h(x) \in C^1[a,b]$ *za koje važi* $h(a) = h(b) = 0$*, pri čemu je* $S(x) \in C[a,b]$ *data funkcija. Tada je* $S \equiv 0$*.*

Dokaz. Datu lemu dokazaćemo svođenjem na kontradikciju. Dakle, pretpostavićemo da postoji $x_0 \in [a,b]$ za koje je $S(x_0) \neq 0$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $S(x_0) > 0$. Kako je S neprekidna funkcija, postoji interval $(c,d) \subset (a,b)$ takav da $x_0 \in (c,d)$ i važi da $S(x) > 0$ za sve $x \in (c,d)$.

Po uslovu je $h(x)$ proizvoljna funkcija, pa ćemo za h izabrati na sljedeći način:

$$h(x) = \begin{cases} (c-x)^2(d-x)^2 & \text{za } x \in (c,d) \\ 0 & \text{za } x \in [a,b] \setminus (c,d) \end{cases}$$

Primijetimo da je $h(a) = h(b) = 0$ za svaku funkciju h pa i za ovako odabranu. Posmatramo integral:

$$\int_a^b S(x)h(x)dx = \int_c^d S(x)(c-x)^2(d-x)^2 dx > 0$$

što je kontradikcija sa uslovom leme.

Dakle, zaključujemo da je $S(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]$ tj $S \equiv 0$ na $[a,b]$. □

Upravo dokazanu lemu ćemo iskoristiti da bismo izveli potreban uslov za pronalaženje ekstrema funkcionele, odnosno formulisanje jednačine poznatije kao Ojler-Lagranžova jednačina. Pogledajmo sada jednačinu 2.4. Na početku razmatranja funkcinele rekli smo da je F neprekidna i da su njeni izvodi do trećeg reda neprekidni. Zato je $\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}$ neprekidna funkcija na $[a,b]$. Takođe smo pretpostavili da je $\varphi \in C^{-1}[a,b]$ i da je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Na osnovu dokazane leme zaključujemo da je:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \tag{2.5}$$

Jednačina 2.5 koju smo dobili je **Ojler-Lagranžova jednačina**.

Kao što smo rekli, Ojler-Lagranžova jednačina je samo potreban uslov za ekstrem, ali nije i dovoljan. Slijedi drugi način za izvođenje Ojler-Lagranžove jednačine koji nam je bitan jer ćemo tu doći i do dovoljnog uslova za ekstrem funkcionele i pojma druge varijacije.

2.3.1 Druga varijacija

Imajući u vidu definiciju funkcionele I (1) i oznaku $\hat{f}$ zapisaćemo kako izgleda $I(\hat{f})$:

$$I(\hat{f}) = \int_a^b F[x, \hat{f}, \hat{f}']dx.$$

Priraštaj funkcionele je :

$$I(\hat{f}) - I(f) = \int_a^b \Big(F[x, \hat{f}, \hat{f}'] - F[x, f, f'] \Big) dx \tag{2.6}$$

Iskoristićemo Tejlorovu formulu na funkciju F u okolini tačke $f(x)$:

$$\begin{aligned} & F[x, \hat{f}, \hat{f}'] - F[x, f, f'] = \\ = \; & \frac{\partial F}{\partial f}(\hat{f} - f) + \frac{\partial F}{\partial f'}(\hat{f}' - f') + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial f}(\hat{f} - f) + \frac{\partial}{\partial f'}(\hat{f}' - f')\right]^2 F + R_3 \end{aligned}$$

Znamo da je $\delta f = \hat{f} - f = \varepsilon\varphi(x)$ i to uvrstimo u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$\begin{aligned} & F[x,\hat{f},\hat{f}'] - F[x,f,f'] = \\ = & \frac{\partial F}{\partial f}\varepsilon\varphi(x) + \frac{\partial F}{\partial f'}\varepsilon\varphi' + \frac{\partial^2 F}{2\partial f^2}\varepsilon^2\varphi^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'}\varepsilon^2\varphi\varphi' + \frac{\partial^2 F}{2\partial f'}\varepsilon\varphi'^2 + \frac{D^3 F}{3}(\hat{f} - f)^3 \end{aligned}$$

Koristeći :
$dF = \frac{\partial F}{\partial f}\varepsilon\varphi + \frac{\partial F}{\partial f'}\varepsilon\varphi'$
$d^2F = \frac{\partial^2 F}{2\partial f^2}\varepsilon^2\varphi^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial f\partial f'}\varepsilon^2\varphi\varphi' + \frac{\partial^2 F}{2\partial f'}\varepsilon\varphi'^2$
prethodnu formulu možemo zapisati kao:

$$F[x,\hat{f},\hat{f}'] - F[x,f,f'] = dF + \frac{1}{2}d^2F + R_3$$

Vrativši dobijene rezultate u jednakost (2.6), dobijamo priraštaj funkcionele u obliku:

$$\begin{aligned} & I(\hat{f}) - I(f) = \int_a^b \left(dF + \frac{1}{2}d^2F + R_3 \right) dx \\ = & \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}\varepsilon\varphi + \frac{\partial F}{\partial f'}\varepsilon\varphi' \right) dx + \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{2\partial f^2}\varepsilon^2\varphi^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial f\partial f'}\varepsilon^2\varphi\varphi' + \frac{\partial^2 F}{2\partial f'}\varepsilon^2\varphi'^2 \right) dx \\ + & \int_a^b R_3 dx \end{aligned}$$

Sa δI smo označavali prvu varijaciju, odnosno

$$\delta I = \int_a^b dF dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f}\varepsilon\varphi + \frac{\partial F}{\partial f'}\varepsilon\varphi' dx.$$

Sada uvodimo drugu varijaciju, tj. $\delta^2 I$:

$$\delta^2 I = \frac{1}{2!}\int_a^b d^2F dx = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{2\partial f^2}\varepsilon^2\varphi^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial f\partial f'}\varepsilon^2\varphi\varphi' + \frac{\partial^2 F}{2\partial f'}\varepsilon^2\varphi'^2 \right) dx.$$

Pišemo jednakost (2.6) u obliku:

$$\begin{aligned} I(\hat{f}) - I(f) &= \delta I + \delta^2 I + \int_a^b R_3 dx \\ &= \delta I + \delta^2 I + \int_a^b \frac{1}{3!}F(\tilde{f})\varepsilon^3\varphi^3 dx \end{aligned}$$

$$I(\hat{f}) - I(f) = \delta I + \delta^2 I + \varepsilon^3 \tilde{R}_3 \tag{2.7}$$

Vidimo da δI ima faktor ε, $\delta^2 I$ faktor ε^2 i treći sabirak ima faktor ε^3. Na početku smo definisali ε kao proizvoljno mali broj koji može biti i pozitivan i negativan. Tada je jasno da će $I(\hat{f}) - I(f)$ imati stalan znak za $\delta I = 0$ što nam daje potreban uslov za ekstrem funkcionele I. Došli smo do uslova koji trebamo srediti $\delta I = 0$**.** To možemo uraditi parcijalnom integracijom kao u prethodnom razmatranju ili možemo posmatrati:

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi \frac{\partial F}{\partial f'}\right) = \varphi' \frac{\partial F}{\partial f'} + \varphi \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}$$

iz čega slijedi: $\varphi' \frac{\partial F}{\partial f'} = \frac{d}{dx}\left(\varphi \frac{\partial F}{\partial f'}\right) - \varphi \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}$.
Ako to iskoristimo u izraz za δI dobijamo:

$$\delta I = \varepsilon \int_a^b \left[\varphi \frac{\partial F}{\partial f} + \left(\frac{d}{dx}\left(\varphi \frac{\partial F}{\partial f'}\right) - \varphi \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right] dx.$$

A kako je

$$\varepsilon \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\varphi \frac{\partial F}{\partial f'}\right) dx = \varepsilon \left(\varphi \frac{\partial F}{\partial f'}\right)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0$$

jer je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ po uslovu sa početka razmatranja funkcionela, onda δI ima oblik:

$$\delta I = \varepsilon \int_a^b \varphi \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right) dx.$$

Sada koristeći Lemu 3 vidimo da je $\delta I = 0$ ako je zadovoljen uslov

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0. \tag{2.8}$$

Posljednja jednačina je upravo Ojler-Lagranžova jednačina koju smo već jednom izveli na drugačiji način. Integralne krive koje zadovoljavaju Ojler-Lagranžovu jednačinu nazivaju se *ekstremale*.

Ono što sada želimo da uradimo jeste da formulišemo dovoljan uslov za ekstrem, odnosno želimo da vidimo da li je dobijeni ekstrem minimum ili maksimum funkcionele I. Ako pogledamo jednakost (2.7):

$$I(\hat{f}) - I(f) = \delta I + \delta^2 I + \varepsilon^3 \tilde{R}_3$$

vidimo da važi
$f = f(x)$ je minimum funkcionele ako je $I(\hat{f}) - I(f) > 0$ za sve $\hat{f}(x) =$

$f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ a to je tačno samo ako je druga varijacija $\delta^2 I > 0$, a $f = f(x)$ je maksimum funkcionele ako je $I(\hat{f}) - I(f) < 0$ za sve $\hat{f}(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ a to je tačno samo ako je druga varijacija $\delta^2 I < 0$.
Naravno, primijetimo da treći sabirak $\varepsilon^3 \tilde{R_3}$ ne utiče na znak priraštaja funkcionele jer smo ε birali kao proizvoljno mali broj. Takođe, kako je

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2!}\int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial f^2}\varphi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'}\varphi\varphi' + \frac{\partial^2 F}{\partial f'^2}\varphi'^2\right] dx$$

znak od $\delta^2 I$ nije nimalo lako odrediti, pa se često posmatra znak samo podintegralne funkcije. Zanimljivo istraživanje je predstavio Ležandr[1] 1786. u Parizu. Bio je zainteresovan za provjeru da li je dobijeni ekstrem minimum ili maksimum funkcionele. Ležandr je dokazao da se znak od $\delta^2 I$ poklapa sa znakom od $\dfrac{\partial^2 F}{\partial f'^2}$ što dosta pojednostavljuje provjeru pa se pri izračunavanju često koristi. [1]. Još jedan problem može biti nemogućnost rješavanja Ojler-Lagranžove jednačine. Dakle, tada nemamo ni stacionarnu funkciju koja bi mogla biti ekstrem. U tim slučajevima se treba pozabaviti rješavanjem diferencijalne jednačine numeričkim putem i traženje približnog rješenja čime ćemo se kasnije pozabaviti. Detaljnije pogledati u [3] i [2].

Kroz istoriju se ispostavilo da je varijacioni račun, kao metod optimizacije, efikasan pristup problemu ali rješavanje Ojler-Lagranžove jednačine može da prilično ograniči njegovu upotrebljivost. U opštem slučaju kada tražena funkcija zavisi od više veličina dobijamo parcijalno diferencijalnu jednačinu za koju nemamo utvrđen algoritam rješavanja. Sa druge strane, ne znamo ni da li postoji funkcija koja bi zadovoljavala posmatranu jednačinu. Dolazimo do obratnog tvrđenja: *Ako varijacioni problem ima ekstremnu vrijednost tada Ojler-Lagranžova jednačina ima rješenje*.

Upravo to je koristio Dirihle [2] da pokaže postojanje harmonične funkcije sa utvrđenim graničnim vrijednostima. Na taj način za jednačine koje se mogu dovesti u korespondenciju sa Ojler- Lagranžovom jednačinom znamo da rješenje postoji. Postavlja se pitanje pod kojim uslovima postoji minimum funkcionala. U jednom primjeru Vajerštras je pokazao da nije dovoljno da je funkcional konveksan i ograničen sa donje strane [4].

[1] Adrien-Marie Legendre-francuski matematičar

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet- njemački matematičar

2.3.2 Specijalni slučajevi Ojler-Lagranžove jednačine

U ovom odjeljku ćemo posmatrati neke specijalne slučajeve Ojler- Lagranžove jednačine koji nam pri rješavanju problema mogu biti od koristi. Prvo ćemo posmatrati slučaj kada funkcija F ne zavisi eksplicitno od zavisno promjenljive $f(x)$. U ovom slučaju imamo $F = F[x, f'(x)]$ i tada je jasno da je $\frac{\partial F}{\partial f} = 0$. Tada Ojler-Lagranžova jednačina postaje

$$-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

i zatim integracijom postaje

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = const.$$

Primijetimo da je zadatak sa najkraćim rastojanjem između tačaka primjer ovog specijalnog slučaja.

2.3.3 Beltramijeva jednakost

Zanimljivu situaciju imamo i ako funkcija F ne zavisi eksplicitno od nezavisno promjenljive x. Tada je $F = F[f(x), f'(x)]$ pa ćemo zamjeniti uloge zavisno i nezavisno promjenljivoj.

$$\begin{aligned} I[f(x)] &= \int_a^b F(f, f')dx \\ &= \int_a^b F[f, \left(\frac{dx}{df}\right)^{-1}]\frac{dx}{df}df \\ &= \int_{f_1}^{f_2} F[f, (x')^{-1}]x'df \\ &= \int_{f_1}^{f_2} \tilde{F}(f, x')df \end{aligned}$$

pri čemu je sada integracija po f, x' izvod x po f i $\tilde{F}[f, x'] = x'F[f, (x')^{-1}]$. Primijetimo da smo ovo sad sveli na prvi specijalan slučaj jer nemamo zavisnu promjenljivu $x(f)$.

Međutim, možemo da radimo i direktno preko Ojlerove formule bez svođenja na prvi specijalan slučaj što ćemo sada i uraditi jer želimo gotovu formulu za slučaj kada funkcija F ne zavisi od nezavisno promjenljive x.

Krećemo od Ojlerove jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

i pomnožimo je sa $\frac{df}{dx}$

$$\frac{\partial F}{\partial f}\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\frac{df}{dx} = 0. \tag{2.9}$$

Koristeći pravilo za izvod proizvoda funkcija, računamo izvod po x

$$\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2}$$

odakle slijedi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right)' - \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Uvrstićemo dobijeno u jednakost 2.9 i dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial f}\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right) + \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2} = 0. \tag{2.10}$$

Za funkciju $F = F(x, f, f')$ važi

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f}\frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2}$$

što ćemo namjestiti u oblik koji nam odgovara prebacivanjem prvog sabirka sa desne na lijevu stranu

$$\frac{\partial F}{\partial f}\frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Primjećujemo da je to što smo dobili zapravo zbir prvog i trećeg sabirka u jednakosti 2.10 pa uvrštavanjem dobijamo

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right) = 0.$$

U našem specijalnom slučaju imamo da je $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ pa posljednja jednakost postaje

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right) = 0.$$

Konačno integraljenjem po x dolazimo do

$$F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} = const \tag{2.11}$$

čime smo dobili formulu, **Beltramijeva jednakost**[3], ekvivalentnu Ojler-Lagranžovoj formuli za slučaj kada funkcija F ne zavisi direktno od nezavisno promjenljive x.

2.4 Neke primjene Ojler-Lagranžove formule

U ovom odjeljku ćemo na konkretnim primjerima vidjeti primjenu Ojler-Lagranžove formule. U pitanju je primjer koji smo definisali na početku [str. 10] i primjer brahistohrone.

2.4.1 Problem nalaženja najkraćeg puta

Dakle, minimiziramo funkcionelu koja sada zavisi od $t, x(t)$ i $x'(t)$

$$I = \int_{a_1}^{b_1} F dt = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{1 + (x'(t)^2)} dt$$

sa graničnim uslovima $x(a_1) = a_2$ i $x(b_1) = b_2$.

Ojler-Lagranžova jednakost za datu funkciju je:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'}.$$

Kako naša funkcionele ne zavisi direktno od x onda je $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.
Dalje, računamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{1}{2\sqrt{1 + x'^2}} 2x' = \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}}$$

Uvrštavanjem u Ojler-Lagranžovu jednačinu dobijamo:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \quad \text{tj.} \quad \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = const.$$

[3] Dobila je ime po italijanskom matematičaru Beltramiju (*Eugenio Beltrami*)

Praktično, to znači da je $x'(t) = m$, a dalje je $x(t) = mt + n$ gdje su m i n konstante. Uvrštavanjem graničnih uslova dobijamo sistem dvije jednačine sa dvije nepoznate m i n.

$$\begin{aligned} a_2 &= ma_1 + n \\ b_2 &= mb_1 + n \end{aligned}$$

Rješavanjem dobijamo :

$$x(t) = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}t + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - b_1}$$

što je i bilo prirodno rješenje da dobijemo pravu liniju kao nakraće rastojanje između dvije tačke.

2.4.2 Problem brahistohrone

Uradićemo još jedan poznati problem varijacionog računa, problem brahistohrone što u prevodu sa grčkog znači najkraće vrijeme, koji je neposredno prethodio zvaničnom nastanku varijacionog računa. Problem je prvi postavio Johan Bernuli u junu 1696. godine i time izazvao tadašnje matematičare da traže pogodna rješenja. Problem su riješili Jakob Bernuli, Lopital, Isak Njutn, Lajbnic i Erenfrid Valter. Po Njutnovoj biografiji koju je napisao muž njegove rođakinje John Conduitt Njutn je, idući kasno iz kancelarije kući, riješio problem oko 4h ujutru jer nije želio da zaspe dok ne riješi. Johan Bernuli je kasnije formulisao težu verziju problemu koju je sam riješio. Za više detalja o njihovim rješenjima pogledati [1], [2].

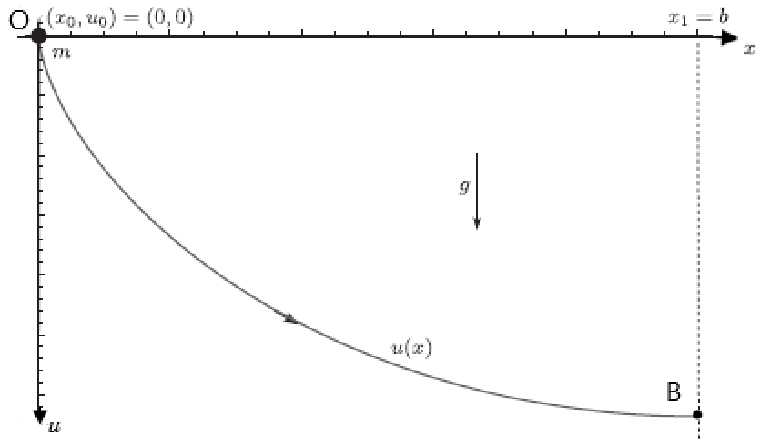
Problem glasi: Neka su tačke O i B dvije tačke u vertikalnoj ravni u odnosu na zemljinu površinu. Kriva po kojoj se kreće tijelo koje samo pod uticajem gravitacione sile ide od tačke O do tačke B za najkraće vrijeme naziva se brahistohrona.

Označimo masu tijela sa m i sa g gravitacionu konstantu (slika 2.4). Tražimo krivu $u = u(x)$ od tačke O $(0,0)$ do tačke B (b,β). Na osnovu zakona održanja energije (imamo ovdje kinetičku energiju- zbog kretanja i potencijalnu energiju- zbog promjene visine) važi

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgu = 0.$$

Dijeljenjem jednakosti sa $m(m > 0)$ dobijamo

$$\frac{1}{2}v^2 - gu = 0$$



Slika 2.4: Brahistohrona

iz čega direktno slijedi da je $v(x) = \sqrt{2gu(x)}$. Vrijeme kretanja tijela računamo kao količnik pređenog puta i brzine. Pređeni put, odnosno dužina krive od tačke O do tačke B, po promjenljivoj x je $\sqrt{1+u'^2}dx$. Prema tome vrijeme kretenja je $\dfrac{\sqrt{1+u'^2}dx}{\sqrt{2gu(x)}}$.

Dobijamo izraz za ukupno vrijeme kretanja koje zavisi od krive po kojoj se kreće je

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} dx.$$

Dakle, mi trebamo pronaći funkciju $u = u(x)$ koja minimizira funkcionelu $T(u)$. Konstanta $\dfrac{1}{\sqrt{2g}}$ nam ne utiče na ekstrem funkcionele. Za rješavanje ovog problema koristimo Beltramijevu jednakost jer kao što vidimo T ne zavisi direktno od nezavisno promjenljive x. Označimo podintegralnu funkciju kao i ranije sa F

$$F(x,u,u') = \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}.$$

Podsjetimo se da Beltramijeva jednakost glasi: $F - u'\dfrac{\partial F}{\partial u'} = c$, $c = const.$

U našem slučaju imamo

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{1}{2\sqrt{1+u'^2}} 2u' = \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}}$$

što ćemo uvrstiti u Beltramijuevu jednakost (uslov za ekstrem)

$$\begin{aligned} c &= F - u' \frac{\partial F}{\partial u'} \\ &= \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} - u' \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}} \\ &= \frac{1+u'^2-u'^2}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}}. \end{aligned}$$

Kvadriranjem jednakosti dolazimo do

$$c^2 = \frac{1}{u(1+u'^2)}$$

odnosno

$$u(1+u'^2) = \frac{1}{c^2} = r^2.$$

Koristimo $u' = \frac{du}{dx}$ i sređujemo jednakost:

$$\begin{aligned} u\left(1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) &= r^2 \\ 1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2 &= \frac{r^2}{u} \\ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 &= \frac{r^2}{u} - 1 \\ \frac{du}{dx} &= \sqrt{\frac{r^2-u}{u}} \\ dx &= \frac{du}{\sqrt{\frac{r^2-u}{u}}} \\ dx &= \sqrt{\frac{u}{r^2-u}} du \end{aligned}$$

Integraljenjem dobijamo:

$$x = \int \sqrt{\frac{u}{r^2 - u}} du.$$

Rješavamo integral korišćenjem smjene $u = r^2 \sin^2 \frac{t}{2}$ iz čega je
$du = r^2 \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} = r^2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$, $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
x &= \int \sqrt{\frac{r^2 \sin^2 \frac{t}{2}}{r^2 - r^2 \sin^2 \frac{t}{2}}}\ r^2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = \int \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}}}\ r^2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \\
&= \int r^2 \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = \int r^2 \sin \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt \\
&= r^2 \int \sin^2 \frac{t}{2} dt = r^2 \int \frac{1 - \cos t}{2} dt \\
&= \frac{r^2}{2} \int (1 - \cos t) dt = \frac{r^2}{2} (t - \sin t)
\end{aligned}$$

Smjenu koju smo koristili možemo zapisati u prikladnijem obliku:
$u = r^2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{r^2}{2}(1 - \cos t)$.
Konačno, imamo parametarski zadatu funkciju

$$\begin{aligned}
x &= \frac{r^2}{2}(t - \sin t) \\
u &= \frac{r^2}{2}(1 - \cos t)
\end{aligned}$$

koju zovemo cikloida[4] i time smo dobili krivu koja minimizira početni problem.

2.5 Prirodni granični uslovi

U dosadašnjem razmatranju, tražili smo funkciju koja je ekstrem funkcionele sa unaprijed zadatim graničnim uslovima, tj. znali smo da je $f(a) = \alpha$

[4]cikloida je kriva koju opisuje tačka na kružnici dok se kružnica kotrlja po x-osi bez trenja

i $f(b) = \beta$. Sada ćemo vidjeti šta se dešava ako nemamo zadate početne uslove. Sjetimo se da smo za δI nakon primjene integracije dobili:

$$\delta I = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f}\varphi dx + \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi dx.$$

Tada nam je drugi sabirak (dobijen parcijalnom integracijom) postao 0 upravo zbog zadatih graničnih uslova. Sada to nije slučaj. Međutim, znamo da mora da važi Ojler-Lagranžova jednačina da bi neka funkcija bila ekstrem, odnosno

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0.$$

Nakon toga ostaje da je $\delta I = \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi|_a^b$, a kako je potreban uslov za ekstrem $\delta I = 0$, slijedi da je

$$\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi\Big|_a^b = 0.$$

Tada, uslovi koji se prirodno nameću su:

$$\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi\Big|_{x=a} = 0 \text{ i } \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi\Big|_{x=b} = 0.$$

Korišćena literatura [2].

2.6 Varijacioni problemi sa ograničenjem

Često se traži minimizacija/maksimizacija funkcionele pod zadatim uslovima, kao što smo to imali u računu sa funkcijama jedne ili više promjenljivih gdje se koriste Lagranžovi množitelji. Analogan postupak će nam i ovdje pomoći.

Posmatramo funkcinelu $I(f) = \int_a^b F[x, f, f']dx$ sa zadatim ograničenjem $\int_a^b M[x, f, f']dx = L = const$. Kao što smo već radili kada tražimo ekstrem funkcionele, prvu varijaciju izjednačavamo sa nulom

$$\delta(\int_a^b F[x, f, f']dx) = 0.$$

Ograničenje možemo zapisati u obliku

$$\lambda(\int_a^b M[x,f,f']dx - L) = 0$$

gdje je λ Lagranžov množitelj. Za ovaj oblik uslova radimo prvu varijaciju δ

$$\delta\left(\lambda\left(\int_a^b M[x,f,f']dx - L\right)\right) = 0.$$

Kako je L konstanta posljednji izraz je ekvivalentan sa

$$\delta\lambda\int_a^b M[x,f,f']dx = 0.$$

Sabiranjem potrebnog uslova za ekstrem i ovog oblika izraza ograničenja dolazimo do

$$\delta\left[\int_a^b F[x,f,f']dx + \lambda\int_a^b M[x,f,f']dx\right] = 0.$$

što u stvari znači da tražimo ekstrem funkcionele $\int_a^b (F+\lambda M)\,dx$.
Korišćena je literatura [2] a u sljedećem primjeru koristimo [5].

2.6.1 Didonin problem

Navešćemo zanimljiv primjer za ilustraciju varijacionog problema sa dodatnim uslovom (ograničenjem), tzv. Didonin problem. Problem glasi: Od svih zatvorenih krivih u ravni koje imaju dati obim (dužinu) izabrati onu krivu koja obuhvata najveću površinu.

Problem nosi ime kraljice Kartagine Didone jer je ona bježeći od svog brata, feničanskog vladara došla do Libije. Dogovor je bio da će joj tamošnji vladar dati onoliko zemlje koliko može obuhvatiti volovska koža. Didona je bila lukava i naredila da se isječe koža na tanke trake i njime oiviči zemlja koja je kasnije nazvana Kartagina.

Rješenje Didoninog problema:
Prvo ćemo primjetiti da ako tačke A i B polove obim onda one polove i površinu koju obuhvata ta kriva jer ako to ne bi bio slučaj onda bismo umjesto onog dijela krive koji obuhvata manji prostor simetrično preslikali drugi dio koji obuhvata veći prostor i dobili bismo krivu koja obuhvata veći

prostor od početne. Određujemo, dakle, krivu $y = y(x)$ $x \in [0, a]$ za neko $a > 0$ takvu da je površina između nje i x-ose maksimalna (kako smo rekli dio sa druge strane ose je simetričan ovome) i tako da je dužina krive zadat broj. Posmatramo funkcionelu

$$I(x) = \int_0^a y(x)dx$$

tako da je $y(0) = y(a) = 0$ i dodatni uslov $\int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \frac{l}{2}$.
Kao što je gore rečeno, konstruišemo novu funkcionelu uz pomoć Lagranžovih djelitelja

$$\int_0^a Fdx = \int_0^a \left(y(x) + \lambda\sqrt{1 + y'(x)^2} \right) dx.$$

Primijenićemo Ojler-Lagranžovu formulu ali prije toga ćemo izračunati izvode:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \lambda \frac{1}{2\sqrt{1 + y'^2}} 2y' = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1.$$

Uvrštavamo u Ojler-Lagranžovu formulu i sređujemo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} &= 0 \\
1 - \lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) &= 0 \\
\lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) &= 1 \\
\frac{y'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} &= \frac{x + c}{\lambda} \\
\frac{y'^2}{1 + y'^2} &= \frac{(x + c)^2}{\lambda^2} \\
y'^2\lambda^2 &= (x + c)^2 + y'^2(x + c)^2 \\
y'^2(\lambda^2 - (x + c)^2) &= (x + c)^2 \\
y' &= \frac{x + c}{\sqrt{\lambda^2 - (x + c)^2}}.
\end{aligned}$$

Nakon integracije posljednje jednakosti po x dobijamo:

$$y = \sqrt{\lambda^2 - (x+c)^2} + b$$

što prestavlja polovinu krive a kvadriranjem dobijamo dio sa druge strane x-ose, odnosno $(x+c)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2$. Prepoznajemo da smo dobili jednačinu kruga što smo i očekivali da dobijemo.

2.7 Funkcionali dvije nezavisno promjenljive

Do sada smo se bavili samo funkcionalima jedne nezavisno promjenljive i tražili ekstremnu vrijednost po toj promjenljivoj. Ovim problemima su odgovarale Ojler-Lagranžove jednačine koje su zapravo obične diferencijalne jednačine. U ovom poglavlju ćemo uopštiti probleme na dvodimenzionalni slučaj, odnosno funkcionali dvije nezavisno promjenljive. Ojler-Lagranžov potreban uslov kod ovakvih primjera će biti parcijalne diferencijalne jednačine.

Neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidno diferencijabilna funkcija dvije realne promjenljive. Posmatramo sljedeći funkcional

$$I[f] = \int\int_A F\left(x,y,f,f_x,f_y\right) dxdy$$

gdje je, kao i obično, sa f_x označen parcijalni izvod funkcije po promjenljivoj x a sa f_y parcijalni izvod funkcije po promjenljivoj y. Sa A smo označili domen funkcije f u (x,y) ravni.

Tražimo ekstremnu vrijednost funkcionala tako što izjednačavamo prvu varijaciju sa nulom, kao što smo to radili u slučaju jedne nezavisno promjenljive

$$\delta I[f] = \int\int_A \delta F\left(x,y,f,f_x,f_y\right) dxdy = 0$$

odnosno [2]

$$\int\int_A \left[\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f_x + \frac{\partial F}{\partial f_y}\delta f_y\right] dxdy = 0.$$

Koristeći činjenicu da je varijacija nezavisno promjenljive jednaka nuli i Lemu 1 izraz se može napisati u obliku

$$\int\int_A \left[\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f_x}\frac{\partial}{\partial x}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f_y}\frac{\partial}{\partial y}\delta f\right] dxdy = 0.$$

Koristeći teoremu divergencije [6] u par redova dolazimo do Ojler-Lagranžove jednačine za slučaj funkcionele koja zavisi od dvije nezavisno promjenljive

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right) = 0. \tag{2.12}$$

U praksi često imamo više važnih parametara koje posmatramo i na osnovu kojih tražimo ekstrem funkcionele pa nam je ovo uopštenje vrlo važno. Na samom početku rada vidjeli smo u primjeru Fermaovog problema funkcional koji je zavisio od dvije promjenljive. Detaljno izvođenje kao i druga uopštenja mogu se vidjeti u [2].

Glava 3

Numeričko rješenje Ojler-Lagranžove jednačine

Kao što smo ranije spomenuli, Ojler-Lagranžova jednačina je u opštem slučaju parcijalna diferencijalna jednačina za koju nije lako naći analitičko rješenje. Zbog toga se pribjegava korišćenju različitih numeričkih postupaka za rješavanje jednačina. Jedan od vrlo korišćenih postupaka je metod opadajućeg gradijenta. To je jedan iterativni postupak pomoću kog dolazimo do tačnog ili približnog rješenja jednačine. Ovaj metod pripada jednoj široj grupi za traženje minimuma funkcije (eng. Descent methods). Ono po čemu se izdvaja u posebnu grupu jeste izbor pravca po kojem tražimo minimum [7].

3.1 Metod opadajućeg gradijenta

U ovom poglavlju ćemo opisati na koji način funkcioniše matod opadajućeg gradijenta u opštem slučaju. Počećemo od gore pomenute šire grupe metoda opadanja. Prije svega podsjetimo se definicije gradijenta funkcija.

Definicija 5. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : U \to \mathbb{R}$ parcijalno diferencijabilna funkcija. Gradijent funkcije je preslikavanje $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$,*

$$grad f = \nabla f = \begin{bmatrix} D_1 f(x) \\ D_2 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{bmatrix}$$

Dakle, zadatak nam je da minimiziramo funkciju $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\min_x f(x),$$

odnosno da pronađemo vrijednost x za koje je vrijednost funkcije $f(x)$ najmanja.

To ćemo uraditi tako što ćemo formirati niz $\{x_t\}, t = 1, 2, ...$ na sljedeći način:

$$x_{t+1} = x_t + \Delta t \cdot \Delta x \tag{3.1}$$

gdje je $\Delta t > 0$. Sa Δt smo označili dužinu ili veličinu koraka, a sa Δx pravac kretanja. Dužinu koraka teorijski možemo birati različitu u svakoj iteraciji ali u praksi se najčešće izabere jedna vrijednost i koristi tokom cijelog postupka. Jednakost 3.1 možemo kraće zapisati kao $x := x + t\Delta x$. Ovakav metod zovemo opadajući metod, odnosno važi

$$f(x_{t+1}) < f(x_t)$$

osim ako je x_t optimalna vrijednost. Dakle, formiramo niz $\{x_t\}$ i želimo da pronađemo $x_t^\star$ za koje je $f(x_t^\star)$ minimalno, odnosno tada je $\Delta t \Delta x = 0$. Birajući Δt i Δx na različite načine dobijamo različite metode. Često se dužina koraka Δt bira različito u svakoj iteraciji u zavisnosti od udaljenosti od tačnog rješenja.

Ako za pravac kretanja odaberemo gradijent funkcije ∇f, tj. izaberemo smijer suprotan od smijera gradijenta $\Delta x = -\nabla f$ dolazimo do metoda opadajućeg gradijenta:

$$x_{t+1} = x_t - \Delta t \nabla f(x_k). \tag{3.2}$$

Treba paziti pri izboru dužine koraka Δt jer ako izaberemo previše malen broj onda se može desiti da imamo jako puno iteracija, a ako ipak uzmemo veliki broj može se desiti da „preskočimo “ ekstremnu vrijednost. Zbog toga je najbolje birati dužinu koraka u zavisnosti koliko smo udaljeni od ekstrema. Kako početnu tačku x_0 biramo potpuno proizvoljno broj iteracija će zavisiti i od tog izbora.

Ponavljamo iteracije dok ne dođemo do $x_{t+1} = x_t$ što će značiti da je $\nabla f(x_t) = 0$ što je potreban uslov za ekstrem funkcije f. U slučaju da nam ne treba tačno rješenje ili je do njega teško doći podesićemo kriterijum za zaustavljanje na dovoljno malu vrijednost gradijenta po nekoj normi npr. $||\nabla f||_2 \leq \varepsilon$ za $\varepsilon > 0$ i kada taj uslov bude zadovoljen zaustavljamo se.

Postavlja se jedno potpuno prirodno pitanje. Zašto je izbor gradijenta funkcije dobar izvor za pravac kojim se krećemo u našim iteracijama? Slijedi definicija izvoda u pravcu i teorema koja nam daje odgovor na postavljeno pitanje.

Definicija 6. *[6] Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : U \to \mathbb{R}$, $x \in U$, $v \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$. Izvod u pravcu v funkcije f u tački x je*

$$D_v f(x) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x+tv) = \lim_{t=0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

ukoliko postoji granična vrijednost.

U specijalnom slučaju $v = e_j$ izvod u pravcu je baš parcijalni izvod $D_j f(x)$. Bez dokaza navodimo teoremu za izvod kompozicije funkcija.

Teorema 2. *Neka su $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^p$ tako da $f(U) \subseteq V$. Ako je funkcija f diferencijabilna u $x \in U$ i funkcija g diferencijabilna u $f(x) \in V$ onda je kompozicija $g \circ f = g(f(x)) : U \to \mathbb{R}^p$ diferencijabilna u tački $x \in U$ i važi $D(g \circ f(x)) = D(g(f(x))) \cdot D(f(x)))$.*

Skalarni proizvod vektora označavaćemo sa $\langle x, y \rangle$. Takođe, važi:

$$D(g(f)) = (\nabla g(f))^T \cdot Df(x) = \langle \nabla g(f(x)), f(x) \rangle.$$

U slučaju izvoda u pravcu imamo kompoziciju funkcija $f(v)$ i $v(t) = x + tv$ pa kako je $v'(t) = v$ slijedi da je

$$D_v f(x) = D(f \circ v(0)) = \langle \nabla f(x+0), v \rangle = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

Navodimo bez dokaza poznatu Koši-Švarcovu nejednakost.

Teorema 3. *[8] U unitarnom vektorskom prostoru V za svako $x, y \in V$ važi*

$$\langle x, y \rangle \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Pri tome, jednakost važi samo ako su vektori linearno zavisni.

Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost pokazujemo sljedeću teoremu.

Teorema 4. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : U \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Ako je $\nabla f(x) \neq 0$ tada je izvod u pravcu funkcije f u tački x maksimalan za pravac $v_0 := \dfrac{\nabla f(x)}{||\nabla f(x)||}$ tj. gradijent funkcije je pravac najbržeg rasta funkcije f u tački x.*

Dokaz. Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost slijedi

$$\langle \nabla f(x), v \rangle \leq ||\nabla f(x)|| \cdot ||v|| = ||\nabla f(x)||$$

čime je jasno da izvod u pravcu ima najveću vrijednost $||\nabla f(x)||$. Zanima nas za koji pravac odnosno za koji vektor se to postiže. Ako je $\nabla f(x) \neq 0$ tada za $v_0 = \dfrac{\nabla f(x)}{||\nabla f(x)||}$ dostižemo tu maksimalnu vrijednost.

$$\langle \nabla f(x), v_0 \rangle = \left\langle \nabla f(x), \frac{\nabla f(x)}{||\nabla f(x)||} \right\rangle = \frac{||\nabla f(x)||^2}{||\nabla f(x)||} = ||\nabla f(x)||.$$

□

Dakle, vidimo da je gradijent funkcije pravac najbržeg rasta funkcije f u tački x. U našem slučaju tražimo minimalnu vrijednost pa pretražujemo u smijeru suprotnom smijeru gradijenta.

Nakon što smo opisali i objasnili metod opadajućeg gradijenta u uopštenom slučaju pokažimo na jednostavnom primjeru kako funkcioniše.

Primjer: Ako imamo funkciju $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onda nam se cijela situacija malo uprošćava. Naravno, u slučaju funkcije jedne realne promjenljive gradijent funkcije u tački x_0 je vrijednost prvog izvoda funkcije u toj tački $f'(x_0)$ odnosno gradijent nije vektor nego broj.
Algoritam:

- izabrati proizvoljnu početnu tačku $x_0 \in \mathbb{R}$
- Ponavljati:
  izabrati dužinu koraka t_k (može a ne mora biti isti broj tokom cijelog postupka)
  $x_{t+1} = x_t - \Delta t \cdot f'(x_k)$
  sve dok ne dođemo do $f'(x_t) = 0$ ili $|f(x_t)| < \varepsilon$ za neko unaprijed dato $\varepsilon > 0$.

Neka je data funkcija $f(x) = x^2 - 2x$. Naći minimum funkcije koristeći metod opadajućeg gradijenta idući od početne tačke $x_0 = 0$.
Prvi izvod funkcije je $f'(x) = 2x - 2$. Neka je u svakoj iteraciji dužina koraka jednaka $\Delta t = 0.3$.
$x_1 = 0 - 0.3(2 \cdot 0 - 2) = 0.6$
$x_2 = 0.6 - 0.3(2 \cdot 0.4 - 2) = 0.84$
$x_3 = 0.936$
$x_4 = 0.974$
$x_5 = 0.989$
$x_6 = 0.996$
$x_7 = 0.998$
$x_8 = 0.999$ ...
Ono što primjećujemo jeste da na početku imamo „veće korake“ a kada se približimo ekstremu imamo „manje korake“. Vrijednost gradijenta se smanjuje i onda se ne pomjerimo mnogo od prethodne tačke. Često je za

dolazak do tačnog rješenja potrebno mnogo iteracija, opet u zavisnosti od izbora početne tačke i izbora dužine koraka.

Jasno, u ovom primjeru lako vidimo da se minimum funkcija dostiže u tački $x = 1$. Primjenom metoda opadajućeg gradijenta smo za početnu tačku $x = 0$ i korak 0.3 za 8 iteracija stigli do tačke 0.999 što znači da je naša greška u tom momentu jednaka 0.001.

Bitno je naglasiti da se numeričke optimizacije danas rade na računaru i da nam par iteracija više ne oduzimo mnogo više vremena ako nam daje znatno bolji rezultat za određene svrhe. U ovom primjeru, iako nemamo mnogo iteracija, korišćen je program *Octave* i tačno rješenje dobijamo u 14. iteraciji pomoću, u ovom slučaju, jednostavnije funkcije:

```
function res=gradijent(x,t)
while (2*x-2) !=0
x = x - t* (2*x-2)
end
res= x;
endfunction.
```

U označavanju iteracija koristili smo slovo t odnosno pisali smo x_t, što nije slučajno. Obično je slovo t rezervisano za vrijeme. Pogledajmo kako možemo da tumačimo metod opadajućeg gradijenta. Jednakost 3.2 možemo zapisati u obliku

$$x_{t+1} - x_t = \Delta t \nabla f, \text{ odnosno}$$

$$\frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t} = \nabla f$$

čime vidimo da je promjena vrijednosti x po „vremenu“ jednaka gradijentu funkcije f. Dijeljenje jednakosti sa Δt ne pravi problem jer smo na početku naglasili da je $\Delta t > 0$. To ograničenje ima smisla jer ne želimo da nam korak bude dužine 0. Kada dođemo do toga da je promjena x po t odnosno x'_t jednaka 0 to znači i da je $\nabla f = 0$ čime je ispunjen potreban uslov za ekstrem funkcionele.

Nakon što smo se upoznali sa osnovama metoda opadajućeg gradijenta u uopštenom slučaju želimo da vidimo kako da ga primijenimo i na varijacioni račun, odnosno na rješavanje Ojler-Lagranžove jednačine. Naš zadatak je bio da minimiziramo funkcionelu 2.1. Nepoznata promjenljiva je funkcija $f(x)$ i to je jedina promjenljiva pa se gradijent svodi na izvod funkcionala po promjenljivoj funkciji f. U prethodnom poglavlju smo vidjeli šta se dešava kada vršimo perturbacije za funkciju $\varepsilon\phi$. Dobili smo kao rezultat Ojler- Lagrnžovu jednačinu. Bitna razlika u odnosu na prethodnu priču jeste ta da nam rješenje nije brojčana vrijednost nego funkcija. Dakle, počinjemo od proizvoljne funkcije i krećući se po pravcu Ojler- Lagranžove jednačine dolazimo do naredne funkcije sve dok ne dođemo do optimalnog rješenja.

Metodom opadajućeg gradijenta

$$f_{t+1}(x) = f_t(x) - \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial f'} \right) F(x, f_t, f_t')$$

minimiziramo funkcionelu $I(f) = \int_a^b F[x, f(x), f'(x)]dx$ za datu početnu funkciju $f_0(x)$ gdje je Δt dužina koraka kao i ranije. Na isti način kao i u opštem slučaju tumačimo prethodnu jednakost. Kada promjena funkcija po vremenu postane 0 tada je Ojler-Lagranžova jednačina jednaka 0 što znači da je za posmatranu funkciju ispunjen potreban uslov za postojanje ekstrema. Zbog toga često ovaj metod nazivamo i „time marching “.

Glava 4

Primjene varijacionog računa

Ranije smo govorili o tome da varijacioni račun kao metod nastao iz praktičnih razloga, iz potrebe za optimizacijom raznih problema gdje diferencijalni račun ne može pomoći. U ovoj glavi ćemo kratko navesti neke od primjena varijacionog računa: model ekonomskog rasta [9] i digitalnu obradu slike [2], [10]. Zbog mogućnosti primjene u mnogim problemima iz različitih oblasti metod varijacija postaje univerzalno oruđe za optimizaciju.

4.1 Model ekonomskog rasta

Ozbiljnije interesovanje iz analize teorije ekonomskog rasta počinje sredinom dvadesetog vijeka. Jedan od prvih je Domar-Harodov model ali je imao dosta mana. Unaprijeđivanjem ovog modela nastao je neoklasični model rasta. U ovom modelu ekonomskog rasta, rast autputa[1] je predstavljen kao suma kapitala[2] i rada. Čitava ekonomija se posmatra kao jedan sektor, koji proizvodi samo jedan proizvod Y dat sljedećom proizvodnom funkcijom:

$$Y(t) = F[L(t), K(t)]; \tag{4.1}$$

gdje je:
$t-$ vrijeme , $L(t)-$ količina rada i $K(t)-$ količina kapitala .
Koristeći oznake $X(t)-$ potrošnja i $I(t)-$ investicije, ravnoteža na tržištu

[1]Autput u ekonomiji predstavlja ukupnu vrijednost svih dobara i usluga proizvedenih kao ekonomski subjekt.

[2]Kapital predstavlja vrijednost koja se ulaže u proizvodnju ili neku drugu ekonomsku djelatnost sa osnovnom namjerom da se uveća, odnosno da donese dobit.

gotovih proizvoda je data sa:

$$Y(t) = X(t) + I(t) \tag{4.2}$$

Ako pretpostavimo da je opadanje zaliha kapitala nastalo usljed habanja ili zastarijevanja opreme u svakom trenutku jednako i predstavlja konstantan udio μ postojećeg kapitala, tada su investicije $I(t)$ jednake:

$$I(t) = K'(t) + \mu K(t) \tag{4.3}$$

gdje je $\frac{dK(t)}{dt} = K'(t)$.
Sa L smo označili količinu rada, pa je $L(0)$ uložena količina rada u trenutku $t = 0$, a uložena količina rada raste eksponencijalno sa konstantom n u toku vremena, odnosno $L(t) = L(0)e^{nt}$.

Do sada smo uveli 5 promjenljivih (Y(t),L(t),K(t),X(t),I(t)) i 4 jednačine. Dodajemo još jednu jednačinu (proporcionalno štedno ponašanje) koja pokazuje kako se ponaša potrošnja:

$$X(t) = (1-s)(Y(t) - \mu K(t)) \tag{4.4}$$

pri čemu je $s \in (0,1)$ kostanta koja opisuje stopu štednje, odnosno $1-s$ je stopa potrošnje. Ono što je važno naglasiti jeste da je funkcija F homogena tj važi:
$F[\alpha L(t), \alpha K(t)] = \alpha F[L(t), K(t)]$.

Dakle $Y(t)$ odnosno $F[L(t), K(t)]$ ćemo zapisati koristeći oznake $\frac{K(t)}{L(t)} = k(t)$ i $F[1, \frac{K(t)}{L(t)}] = f(k(t))$ u obliku

$$Y(t) = F[L(t), K(t)] = L(t)F[1, \frac{K(t)}{L(t)}] = L(t)f(k(t)). \tag{4.5}$$

odnosno:

$$f(k(t)) = \frac{Y(t)}{L(t)}$$

Ako u jednačini 4.2 zamijenimo $Y(t)$ i $I(t)$ koristeći jednakosti 4.1 i 4.3 dobijamo:

$$F[L(t), K(t)] = X(t) + (K'(t) + \mu K(t)).$$

Dobijenu jednakost podijelimo sa $L(t)$ i uvedemo oznaku $\frac{X(t)}{L(t)} = x(t)$ i dobijamo:

$$f(k(t)) = x(t) + \frac{K'(t)}{L(t)} + \mu k(t). \tag{4.6}$$

Primjetimo sada da $\dfrac{K'(t)}{L(t)} \neq k'(t)$. Važi:

$$k'(t) = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)' = \frac{K'(t)L(t) - K(t)L'(t)}{L^2(t)} = \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{K(t)L'}{L(t)L(t)} = \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)}k(t)$$

pri tome znamo da je $\dfrac{L'(t)}{L(t)} = \dfrac{\left(L_0 e^{nt}\right)'}{L_0 e^{nt}} = \dfrac{nL_0 e^{nt}}{L_0 e^{nt}} = n$. Dakle, onda je:

$$k'(t) = \frac{K'(t)}{L(t)} - nk(t)$$

odnosno

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = k'(t) + nk(t).$$

Ako uvrstimo dobijeno u 4.6 dobijamo

$$f(k(t)) = x(t) + k'(t) + nk(t) + \mu k(t)$$

što ćemo zapisati u sljedećem pogodnijem obliku

$$k'(t) = f(k(t)) - \nu k(t) - x(t) \tag{4.7}$$

gdje smo označili $\nu \equiv \mu + n$. Dobijenu jednačinu zovemo fundamentalna jednačina neoklasičnog modela rasta.

Definicija 7. *Vremenska putanja* $(k(t), x(t))$, $t \in (0, \infty]$ *naziva se* ***izvodljiva putanja rasta*** *ukoliko zadovoljava jednačinu* $k'(t) = f(k(t)) - \nu k(t) - x(t)$ *i* $k(t), x(t) \geq 0$.

Jasno je da postoji mnogo krivih koje zadovoljavaju 4.7 što je posljedica toga da posmatrana jednakost ima dvije nepoznate $k(t)$ i $x(t)$. Zbog toga se trudimo da pojednostavimo još malo pomenutu jednačinu. Jednačinu 4.4 ćemo sa obe strane podijeliti sa $L(t)$ i iskoristiti $f(k(t)) = \frac{Y(t)}{L(t)}$.

$$x(t) = (1-s)f(k(t) - \mu k(t)).$$

Kombinacijom posljednje jednakosti sa fundamentalnom jednačinom ekonomskog rasta dobijamo:

$$k'(t) = sf(k(t)) - \nu^{\star} k(t) \tag{4.8}$$

gdje smo sa $\nu^{\star}$ označiii $n + s\mu$.

Dakle, pretpostavili smo da privreda proizvodi jedan proizvod Y, koristeći količinu rada L i količinu kapitala K, dok je X ukupna količina potrošenih sredstava, tj. posmatramo model

$$\begin{aligned} Y(t) &= F[L(t), K(t)] \\ K'(t) + \mu K(t) &= Y(t) - X(t) \\ \frac{L'(t)}{L(t)} &= n \end{aligned}$$

Postavljamo pitanje: Kolika potrošnja je potrebna u datom vremenskom trenutku kako bi se maksimizirala funkcija cilja pri čemu bi bile zadovoljne gore navedene jednačine i granični uslovi?

Jasno je, ako u sadašnjosti trošimo više u budućnosti ćemo imati manje ušteđenih zaliha, a ako u sadašnjosti ne trošimo mnogo onda ćemo u budućnosti imati više zaliha. Pitamo se koja potrošnja je optimalna. Funkcija cilja data je sa:

$$I = \int_0^T x(t)dt \tag{4.9}$$

gdje je T planirani vremenski period. Koristeći jednačinu 4.7 problem postaje

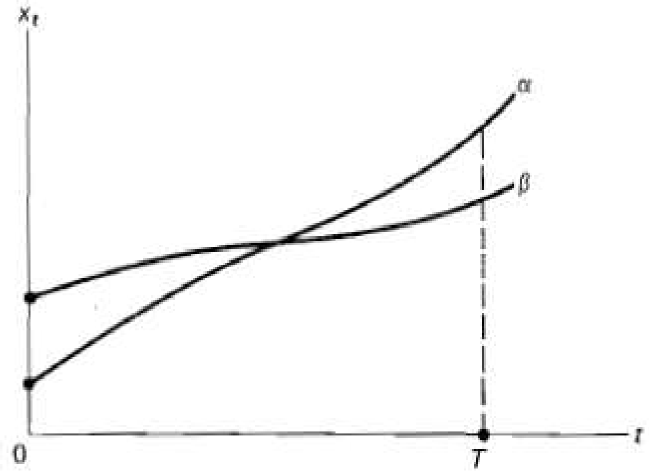
$$I = \int_0^T \left(f(k(t)) - \nu k(t) - k'(t)\right) dt$$

što se rješava varijacionim računom.

Posmatrajmo grafik 4.1. Prikazane su dvije krive α i β. Kriva α predstavlja „štedljiv“ tip ekonomija a β „manje štedljiv“ tip ekonomije. Zahtijeva se upoređivanje oblasti ispod krive α do prave $t = T$ i oblasti ispod krive β do prave $t = T$. Ono što tražimo varijacionim računom je kriva ispod koje je najveća površina do prave $t = T$. Vidimo da tražena kriva zavisi od odabira trenutka T odnosno vremenskog intervala u kom posmatramo ekonomiju. Već sa grafika vidimo da za kraće vremenske intervale štedljiv tip nije optimalan. Među ekonomistima je uobičajeno da se uzima interval $T = \infty$. U tom slučaju moramo voditi računa i o dobroj definisanosti integrala, tj. da li on konvergira ili divergira.

Funckija cilja se mijenja u zavisnosti od potrebe i želje za tačnošću i time se problem rješavanja olakšava ili otežava. Funkcija cilja prihvatljivija za ovaj problem ali otežava račun je

$$J = \int_0^T u(x(t))e^{\rho t}dt$$



Slika 4.1: Ilustracija problema optimalne potrošnje [9]

gdje je u funkcija korisnosti povezana sa reprezentativnom individuom društva a ρ faktor vremenskog popusta. U ovom radu smo posmatrali jednostavnije slučajeve ekonomije raste, dok se često uzimaju u obzir faktori kao što su klimatske promjene, tehnološki napredak i slično.

4.2 Obrada slike

Varijacioni račun ima široku primjenu u digitalnoj obradi slike. U ovom dijelu ćemo prikazati samo osnovne pojmove u oblasti obrade slike i mogućnosti za primjenu varijacionog računa i upućujemo dalje na [2] i [10].

Dvodimenzionalna digitalna slika je uređen par (Σ, u) gdje je u funkcija slike za koju važi $u : \Sigma \to \mathbb{R}$, pri čemu Σ zovemo domen slike, a $u(x,y)$ je intenzitet ili sivi nivo slike u tački $(x,y) \in \Sigma$. Digitalna obrada slike se bavi crpljenjem informacija sačuvanih u slici i obradom istih. Jedna od najznačajnijih faza obrade slike je *segmentacija* koja se bavi podjelom slike na više djelova u zavisnosti od ciljeva segmentacije, najčešće je zadatak da locira određene objekte na slici. Digitalna obrada slike je vrlo korisna, npr. u medicini, pomoću magnetne rezonance, može se konstruisati trodimenzionalna geometrija (npr. pacijentove aorte) i pri tome je neophodno izvršiti osnovne zadatke obrade slike: uklanjanje šuma (eng. denoisng) [11], [12], izoštravanje odnosno poboljšavanje kvaliteta zamućene slike (eng. deblurring) [13], oporavak izgubljenih podataka (eng. inpainting-image interpolation) [14], segmentacija pomoću modela aktivne konture (eng. segmentation) [15].

Ako su slike crno-bijele onda $u(x,y)$ predstavlja skalarnu funkciju, dok je u slučaju slika u boji ovo vektorska funkcija. Ako sa $u_0(x,y)$ označimo posmatranu sliku koja može biti zamućena ili sa šumom i želimo da je rekonstruišemo u nepoznatu obnovljenu sliku $u(x,y)$. Dvije slike su povezane na sljedeći način:

$$u_0(x,y) = Ku(x,y) + \omega(x,y) \tag{4.10}$$

gdje je $\omega(x,y)$ dodatni slučajni šum i K operator koji predstavlja zamućenje. Pomoću varijacione metoda tražimo nepoznatu funkciju $u(x,y)$ koja minimizira funkcionelu:

$$J(u) = \iint\limits_A \left[\gamma^2 (Ku - u_0)^2 + \Phi(|\nabla u|)\right] dxdy \tag{4.11}$$

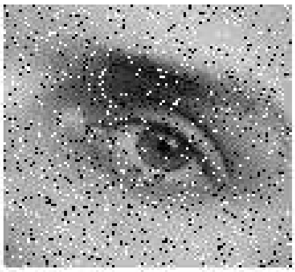
gdje γ^2 težinski koeficijent, $(Ku - u_0)^2$ smanjuje razliku između obnovljene i posmatrane slike a $\Phi(|\nabla u|)$ [3] kaznena težinska funkcija koja popravlja rezultat. Uopšteni oblik Ojler- Lagranžove jednačine za datu funkcionelu je

$$\nabla \left(\Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - 2\gamma^2 K \cdot (Ku - u_0) = 0. \ [2]$$

[3] operator gradijenta $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$

4.2.1 Otklanjanje šuma primjenom totalne varijacije

Postoji više različitih vrsta šuma. Pogledajmo primjer slike sa šumom (slika 4.2) pri čemu na lijevoj slici Gausov šum (eng. „Gaussian noise “) a na desnoj tzv. so i biber šum (eng. „Salt & Pepper noise “). Opterećivanje slike šumom uradili smo u Matlab-u. Zatim primjer originalne slike (slika 4.3).

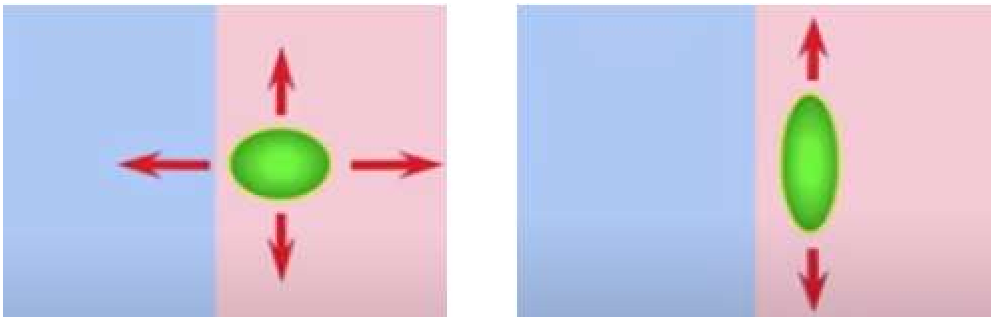


Slika 4.2: Slika opterećene šumom

Slika 4.3: Originalna slika

Šum na slici može nastati kao posljedica neadekvatne osvjetljenosti objekta ili greške u prenosu podataka. Kao posljedica načina distribucije sunčevih zraka javlja se „prirodni šum“. Naravno, stalo nam je da otklonimo šum sa slike i da time poboljšamo kvalitet slike.

U funkcioneli 4.11 koju minimiziramo da bismo popravili kvalitet slike vidimo gradijent funkcije na koji može da djeluje neka funkcija Φ. Gradijent igra veoma važnu ulogu u zaglađivanju slike. Norma gradijenta funkcije predstavlja mjeru „skoka“ vrijednosti funkcije, odnosno varijaciju u okolini posmatranog piksela. Minimizacijom funkcionele 4.11 smanjujemo vrijednost norme gradijenta i na taj način postižemo efekat zaglađivanja slike u svim pravcima oko piksela (x,y). Razlikujemo dvije vrste zaglađivanja a to su izotropno i anizotropno zaglađivanje. Razlika je ta što kod



Slika 4.4: Izotropno izglađivanje (lijevo) i anizotropno izglađivanje (desno)

izotropnog zaglađivanje ivice objekata ne predstavljaju prepreku a anizotropno zaglađivanje ostaje samo sa jedne strane objekta što znači da ivice ostaju očuvane.

Slika 4.4 je preuzeta sa online predavanja „Image and Video processing: From Mars to Hollywood with a Stop at the Hospital" koje održava profesor Guillermo Sapiro (Duke University). Njegova predavanja su mi značajno pomogla za razumijevanje obrade slike.

Neka je $u : \Omega \to \mathbb{R}$ data slika, gdje je u dovoljno puta neprekidno diferencijabilna. Posmatrajmo sljedeći minimizacioni problem:

$$\min \iint_{\Omega} \Phi\left(\left\|\nabla u\right\|\right) dxdy \tag{4.12}$$

gdje je funkcija Φ poizvoljna funkcija koja djeluje na normu gradijenta. Ojler-Lagranžova jednačina za ovaj problem je

$$\operatorname{div}\left(\Phi'\left(\left\|\nabla u\right\|\right)\frac{\nabla u}{\left\|\nabla u\right\|}\right) = 0. \tag{4.13}$$

U zavisnoti od izbora funkcija Φ dobijamo različite situacije. Ako na primjer za funkciju Φ izaberemo $\Phi(x) = x$ dobijamo funkcionelu

$$I(u) = \iint_{\Omega} \left\|\nabla u\right\| dxdy \tag{4.14}$$

koju zovemo *totalna varijacija*. Kako je $\Phi'(x) = 1$ Ojler-Lagranžova jednačina totalne varijacije je

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\left\|\nabla u\right\|}\right) = 0.$$

Totalna varijacija je odličan primjer anizotropnog zaglađivanja. Ako za funkciju Φ izaberemo kvadratnu funkciju $\Phi(x) = x^2$ dobijamo primjer izotropnog zaglađivanja:

$$I(u) = \iint\limits_{\Omega} \left\|\nabla u\right\|^2 dxdy. \tag{4.15}$$

Uvrštavanjem $\Phi'(x) = 2x$ u 4.13 dobijamo Ojler-Lagranžovu jednačinu

$$\operatorname{div}\left(2 \cdot \left\|\nabla u\right\| \frac{\nabla u}{\left\|\nabla u\right\|}\right) = 0$$

odnosno zanemarujući konstantu imamo

$$\operatorname{div}(\nabla u) = 0.$$

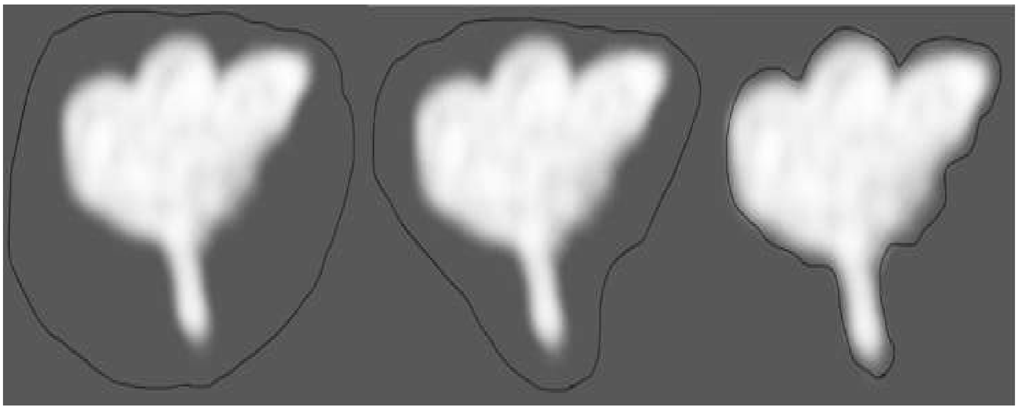
4.2.2 Aktivna kontura

Varijacioni pristup obradi slika uveden je preko problema segmentacije slike. Cilj segmentacije jeste da izdvoji odnosno uokviri posmatrani objekat na dvodimenzionalnoj slici. Od kraja dvadesetog vijeka dosta su razvijeni postupci za segmentaciju slika zasnovani na varijacionom računu. Najpoznatiji ove vrste su aktivni konturni modeli. Ovi metodi pomažu pri segmentaciji za bolje uočavanje ivica segmenta.

Aktivna kontura je kriva koja se kreće od date početne pozicije ka ciljnoj poziciji sa ciljem da „zaokruži" objekat segmentacije. Definisana je na domenu slike, mijenja svoj oblik, veličinu i topologiju krećući se od početka ka ciljnoj poziciji. Kretanje aktivne konture od početne ka ciljnoj poziciji nazivamo *evolucija konture*. Evoluciju konture prati funkcionela energije. Minimum funkcionele energije je kada se kontura nalaza na krajnjem položaju (koji i želimo da pronađemo) [16].

Prije formiranja funkcionele energije razmotrićemo klasu funkcionela oblika

$$I(u) = \int_a^b L\left(u, u', u''\right) dx \tag{4.16}$$



Slika 4.5: Evolucija aktivne konture

gdje je u bar dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na intervalu (a,b), a funkcija L je funkcija tri promjenljive. Cilj nam je da odredimo odgovarajuću Ojler-Lagranžovu jednačinu za ovu klasu funkcionela. Pretpostavimo da je u ekstrem funkcionele $I(u)$. Neka je $u_1 = u + \varepsilon\varphi$ gdje je φ proizvoljna funkcija najmanje dva puta neprekidno diferencijabilna i važi $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$ i $\varphi(b) = \varphi'(b) = 0$. Kao što smo to radili ranije, ekstrem tražimo tako što izjednačavamo prvu varijaciju sa nulom

$$0 = \delta I = \frac{d}{d\varepsilon} I[u + \varepsilon\varphi] = \int_a^b \frac{dL}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} dx. \tag{4.17}$$

Dalje važi

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u}\varphi + \frac{\partial L}{\partial u'}\varphi' + \frac{\partial L}{\partial u''}\varphi'' \right) dx.$$

Primjenom odgovarajuće parcijalne integracije na drugi i treći sabirak dobijamo

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u}\varphi - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'}\varphi - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u''}\varphi' \right) dx + \frac{\partial L}{\partial u'}\varphi\bigg|_a^b + \frac{\partial L}{\partial u''}\varphi'\bigg|_a^b.$$

Primjenom još jedne parcijalne integracije na treći član integrala i izvlačenjem cinioca φ dobijamo

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial u''} \right) \varphi dx + \frac{\partial L}{\partial u'}\varphi\bigg|_a^b + \frac{\partial L}{\partial u''}\varphi'\bigg|_a^b - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u''}\varphi\bigg|_a^b.$$

Koristeći uslove koje smo dali za funkciju φ slijedi da je

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial u''} \right) \varphi dx = 0$$

Konačno, uz pomoć leme 3 dobijamo Ojler-Lagranžovu jednačinu:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial u''} = 0 \tag{4.18}$$

za funkcionelu $I(u)$.

Postoje različiti modeli za funkcionelu energije čiji minimum želimo da pronađemo. Ovdje ćemo navesti klasični model aktivne konture. Aktivnu konturu, zatvorenu parametrizovanu krivu koju posmatramo obilježićemo sa $p(t) = [x(t), y(t)]^T$, $t \in [a,b]$ i $p(a) = p(b)$. Funkcionela energije je

$$E(p) = \int_a^b [E_{int}(p(t)) + E_{ext}(p(t))]\, dt, \tag{4.19}$$

gdje smo sa $E_{int}(p(t))$ označili unutrašnju energiju a sa $E_{ext}(p(t))$ spoljašnju energiju. Oblik i dužinu krive kontroliše unutrašnja energija, a spoljašnja energija „vuče“ krivu ka ciljnoj poziciji. Unutrašnju energiju definišemo kao

$$E_{int}(p) = \frac{1}{2}\left(\alpha \left\|\frac{dp}{dt}\right\|^2 + \beta \left\|\frac{d^2p}{dt^2}\right\|^2\right), \tag{4.20}$$

gdje su α i β težinski koeficijenti koji određuju značaj članova uz koje stoje, $\frac{dp}{dt} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right]^T$ i $\|\cdot\|$ Euklidska norma. Uloga prvog člana $\left\|\frac{dp}{dt}\right\|$ je da smanji dužinu luka dok drugi član $\left\|\frac{d^2p}{dt^2}\right\|^2$ nastoji da smanji krivinu konture.

Spoljašnju energiju obično definišemo kao

$$E_{ext}(p) = -\left\|\nabla u(x,y)\right\|^2. \tag{4.21}$$

Spoljašnja energija ima minimum na mjestima sa velikim gradijentom što zapravo predstavlja skok intenziteta boje odnosno ivicu objekta koji želimo da oivičimo. Funkcionela energije dobija sljedeći izgled

$$E(p) = \int_a^b \left[\frac{1}{2}\left(\alpha \left\|\frac{dp}{dt}\right\|^2 + \beta \left\|\frac{d^2p}{dt^2}\right\|^2\right) + E_{ext}(p)\right] dt \tag{4.22}$$

što je zapravo funkcionela oblika 4.16.

Cilj je minimizovati funkcionelu energije pri čemu se koristi Ojler- Lagranžova jednačina a u zavisnosti od složenosti u pomoć pristižu razne numeričke metode za rješavanje, u opštem slučaju, sistema diferencijalnih jednačina. Mi smo izveli Ojler-Lagranžovu jednačinu za ovu klasu funkcionela 4.18. Dakle, krivu p koja minimizira funkcionelu energije pronaćićemo iz diferencijalne jednačine:

$$\alpha p'' - \beta p^{IV} - \nabla E_{ext} = 0. \tag{4.23}$$

Kako je $p(t)$ parametrizovana kriva prethodna jednačina predstavlja sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \alpha x''(t) - \beta x^{IV}(t) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial x} &= 0 \\ \alpha y''(t) - \beta y^{IV}(t) - \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

koji ne znamo riješiti analitičkim putem, već se traži približno rješenje numeričkim postupcima.

Glava 5

Zaključak

U radu su prikazane osnove varijacionog računa sa riješenim primjerima koji su imali veliki značaj za sam razvoj metoda varijacije. Prije svega, to je problem brahistrohrone koji je podstakao na razmišljanje tadašnji krug matematičara. Ako pričamo o varijacionom računu ne možemo da ne pomenemo fundamentalnu jednakost, potreban uslov za traženje ekstrema poznatiji kao Ojler- Lagranžova jednakost. Upravo su Ojler i Lagranž dva velika imena koja su pomogla u razvijanju i jedni su od tvoraca varijacionog računa. Ojler je u saradnji sa Lagranžom metod nazvao varijacioni račun 1755. godine. Da naglasimo da je Lagranž u momentu kada se javio Ojleru bio devetnaestogodišnjak. Na još jednom mjestu u ovom radu smo koristili Lagranžova dostignuća, a to je kada smo željeli da rješavamo optimizacione probleme pod nekim uslovima. U slučaju kada imamo problem sa nekim unaprijed postavljenim ograničenjima, koristeći Lagranžove množitelje možemo uz pomoć Ojler-Lagranžove jednačine doći do stacionarne funkcije.

Jedan problem koji se javlja je nemogućnost rješavanja Ojler-Lagranžove jednačine analitičkim putem. Često ne možemo doći do tačnog analitičkog rješenja pa tada moramo da koristimo numeričke metode rješavanja. Metoda koja je opisana u radu, u glavi 3, je metoda opadajućeg gradijenta. To je iterativni postupak koji nas dovodi do približnog rješenja. Drugi problem koji nastaje jeste teška provjera da li pronađena stacionarna funkcija maksimizira ili minimizira integralni funkcional. Problem je u tome što nije lako odrediti drugu varijaciju funkcije, a i kada odredimo nije jednostavno odrediti znak te varijacije.

Na kraju, izloženi su neki rezultati iz primjene varijacionog računa. Mnoge važne oblasti koriste ove metode za optimizaciju. Na primjer, medicinskim snimanjem dobijamo slike koje imaju šum ili su mutne. Varijacionim metodama možemo da poboljšamo kvalitet slike. Takođe, ako želimo da izdvojimo jedan segment te slike, opet možemo da koristimo varijacioni račun. Razvijeni su mnogi modeli za obradu slike koji zahtijevaju primjenu varijacionog računa za pronalaženje minimuma. Na kraju, možemo zaključiti da je varijacioni racun često potreban, primjenljiv i veoma aktuelan metod u rješavanju raznih problema primjenjene matematike.

Bibliografija

[1] H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Springer, 1980.

[2] K. W. Cassel, *Variational Methods with applications in Science and Engineering*. Cambridge, 2013.

[3] L. Čomić and L. Pavlović, *Funkcije više promenljivih*. Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, 2000.

[4] H. Kielhöfer, *Calculus of Variations*. Springer, 2017.

[5] N. Teofanov and M. Žigić, *Osnovi optimizacije*. Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2014.

[6] J. Stewart, *Calculus*. Mc Master University and University of Toronto, Eighth Edition, 2015.

[7] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambrige University Press, 2004.

[8] Z. Stojaković and I. Bošnjak, *Elementi linearne algebre*. Symbol, Novi Sad, 2010.

[9] A. Takayama, *Mathematical economics*. Purdue University, Ilinois, 1974.

[10] G. Aubert and P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Springer, 2001.

[11] T. Lukić and J. Žunić, “A non-gradient-based energy minimization approach to the image denoising problem,” *Inverse Problems*, vol. 30, p. 19pp, 2014.

[12] T. Lukić, J. Lindbald, and N. Sladoje, “Regularized Image Denoising Based on Spectral Gradient Optimization,” *Inverse Problems*, vol. 27, 2011.

[13] Y. Marnissi, Y. Zheng, É. Chouzenoux, and J. Pesquet, “A variational bayesian approach for image restoration - application to image deblurring with poisson-gaussian noise,” *IEEE Trans. Computational Imaging*, vol. 3, no. 4, pp. 722–737, 2017.

[14] T. Barbu, “Variational image inpainting technique based on nonlinear second-order diffusions,” *Comput. Electr. Eng.*, vol. 54, pp. 345–353, 2016.

[15] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos., “Snakes: Active contour models,” *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 1, pp. 321–331, 1988.

[16] T. Kopanja and T. Lukić, “Uvod u varijacioni račun sa primenom u obradi slika,” *The Fifth Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications*, pp. 20–25, 2020.

Biografija

Tamara Kopanja, rođena 3. decembra 1996. godine u Banjaluci. Završila je Osnovnu školu „Petar Kočić“ u Mrkonjić Gradu kao učenik generacije. U Mrkonjić Gradu završava i Gimnaziju 2015. godine. Tokom školovanja učestvovala je na mnogim takmičenjima iz matematike i fizike. U junu 2015. godine odlazi na Beli dvor na prijem učenika generacije Republike Srbije i Republike Srpske. Iste godine upisuje se na osnovne akademske studije matematike na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, smjer Diplomirani profesor matematike. Bila je dobitnik nagrada Univerziteta u Novom Sadu za uspjeh u toku studija. Studije završava 2019. godine sa prosječnom ocjenom 9,90. Master studije upisuje iste godine na Fakultetu tehničkih nauka, smjer Matematika u tehnici. Sve ispite položila je zaključno sa julskim rokom 2020. godine sa prosječnom ocjenom 10,0 i time stekla uslov za odbranu master rada. Dobitnik je stipendije Fonda za mlade talente Republike Srbije za školske godine 2017/2018 i 2018/2019. Od februara 2020. godine zaposlena je kao saradnik u nastavi pri katedri za matematiku na Fakultetu tehničkih nauka.

Novi Sad, septembar 2020. Tamara Kopanja