The 9th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, May 31st–June 2nd 2024

ISTORIJSKI PREGLED RAZVOJA TEORIJE VEROVATNOĆE: OD BACANJA KOCKICA DO MODERNE DEFINICIJE I TEORIJE ODLUČIVANJA

Nataša Duraković [1] i **Marko Ušćebrka** [2]

https://doi.org/10.24867/META.2024.05 Review article

Sažetak. U ovom preglednom radu je dat istorijski prikaz razvoja teorije verovatnoće kroz vekove, kao i moderna aksiomatska definicija verovatnoće koja se danas koristi. Takođe, date su neke od modifikacija verovatnoće u opštoj teoriji mere i pseudo-analizi i osvrt na teoriju odlučivanja, kao granu primenjene verovatnoće.

AMS klasifikacija (2020): 01A40-01A61, 60-03

Ključne reči: verovatnoća, neaditivne mere, pseudoverovatnoća, teorija odlučivanja.

1. Igre na sreću i verovatnoća

Verovatnoća, slučajnost i šanse su pojmovi koji su poznati od davnina. Oko 1200. godine pre nove ere igrala se drevna igra sa četiri kosti kopitara, koje bi bile oblikovane u kocke, na kojima bi se pravila mala udubljenja (Slika 1.). Odatle je i došla ideja o tačkama na kockicama koje danas koristimo. Poznato je i da su Rimljani uživali u igrama sa kockicama (Slika 2.). Car Klaudije je u svojoj kočiji imao sto kako bi mogao da igra igre sa kockicama dok se vozi. Poznato je da je napisao knjigu u kojoj je razmatrao kako pobediti u kockama (lat. De arte aleae), koja je izgubljena. Međutim, kako u to vreme većina ljudi nije verovala u slučajnost, jer sve što bi se dogodilo bi se pripisivalo bogovima, ideja o verovatnoći se nije mogla razvijati ([2]).

Problem u igri na sreću, u istoriji poznat kao „Problem nedovršene igre“, se pojavljuje 1654. godine u prepisci francuskih matematičara Pjera de Fermaa i Bleza Paskala i smatra se prvim koracima u začetku verovatnoće kao matematičke teorije ([10]).

Dva igrača, A i B, igraju jednu za drugom igre i u svakoj igri jedan od igrača koji pobedi, osvaja jedan poen. Ukupni pobednik je onaj igrač koji prvi osvoji tri poena. Svaki od igrača je uložio 32 novčića, međutim, igra je prekinuta nakon što je igrač A osvojio dva poena, a igrač B jedan poen. Postavlja se pitanje: kako raspodeliti igračima A i B uloženih 64 novčića tako da raspodela bude fer?

[1] Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: natasa.durakovic@uns.ac.rs

[2] Muzej Vojvodine, Novi Sad, e-mail: marko.uscebrka@muzejvojvodine.org.rs

Slika 1: Kockice od kostiju

Slika 2: Rimske kockice

Oba matematičara su predložili rešenje problema sa istim konačnim rešenjem: igrač A bi trebalo da dobije 48 novčića, a igrač B 16 novčića.

Ferma je utvrdio da su dovoljne još dve igre da bi se znao ukupni pobednik. Naime, on je svoj odgovor predstavio preko šansi, tj. verovatnoće, jer postoje četiri moguća ishoda u dve odigrane igre, pri čemu je svaki podjednako verovatan. Ishodi su: igrač A može pobediti dva puta, ili prvo da pobedi igrač A pa igrač B, ili prvo da pobedi igrač B pa igrač A, ili da igrač B pobedi dva puta. Kako bi od četiri moguća ishoda samo poslednji rezultirao ukupnom pobedom igrača B, šansa da ukupni pobednik bude igrač A je $3:1$. Stoga, fer raspodela 64 novčica bi bila 48 novčica za igrača A i 16 novčica za igrača B.

Paskal je smatrao Fermaovo rešenje nezgrapnim i predložio je da se problem reši ne u smislu šansi, već u smislu količine koju on naziva „očekivanje“. Ako se pretpostavi da je igrač B već pobedio u sledećoj igri, tada su pozicije oba igrača izjednačene, svaki bi dobio po dva poena i svaki bi imao pravo na 32 novčića. Međutim, kako 32 novčića koja pripadaju igraču B zavise od pretpostavke da je pobedio u sledećoj odigranoj igri, ta igra se može tretirati kao fer igra sa ulogom od 32 novčića od kojih svaki od igrača ima očekivanje od 16 novčića. Stoga, igrač A dobija još 16 novčića na već osvojenih 32, a igrač B 16 novčića.

Ferma i Paskal nisu bili prvi koji su dali matematička rešenja za probleme poput ovog. Više od jednog veka ranije, italijanski matematičar, lekar i kockar Đirolamo Kardano istraživao je šanse za izvlačenje asova iz špila karata i bacanja sedmice sa dve kocke. On je prvi koji je shvatio da postoji jednaka šansa da se baci 1, 3 ili 5 kao i da se baci 2, 4 ili 6. Prvi je došao do ideje za izračunavanje šansi za dobitak na igrama na sreću tako što o prebrojavao povoljne ishode i upoređivao sa ukupnim brojem slučajeva i želeo je da verovatnoći ishoda dodeli broj od 0 do 1. Svoja zapažanja je zabeležio u knjizi koja je, nažalost, objavljena tek 1663. godine, kada su elementi teorije šansi već bili dobro poznati matematičarima u Evropi.

Jakob Bernuli, švajcarski matematičar je 1705. godine formulisao i primenio zakon velikih brojeva. U svom rasuđivanju je naveo da ako se izračuna proporcija ishoda eksperimenta nakon velikog broja ponavljanja tog eksperimenta, onda će ta proporcija biti tačan prikaz prave teorijske verovatnoće tog ishoda. Rad je objavljen 1713. godine, nakon njegove smrti. Dva veka kasnije, Bernulijevu teoriju su testirala tri čoveka. Dok je sedeo u nemačkom zatvoru tokom Drugog svetskog rata, grof Bufon je bacio novčić 4040 puta i dobio grb 2048 puta. Južnoafrički matematičar, Džon Kerič, bacio je novčić 10.000 puta, a grb se pojavio 5067 puta. Engleski statističar Karl Pirson, bacio je novčić 24.000 puta i grb je pao 12.012 puta.

Jedna od velikih prekretnica u razvoju teorije verovatnoće je otkriće normalne raspodele. Francuski matematičar Abraham de Moavr je primetio da kada se broj bacanja novčića povećava, oblik binomne raspodele se približava veoma glatkoj krivoj, koja je danas poznata kao normalna (Gausova) kriva. Važnost normalne krive prvenstveno proizilazi iz činjenice da su raspodele mnogih prirodnih pojava približno jednake normalnoj raspodeli. Jedna od prvih primena normalne distribucije bila je analiza grešaka merenja u astronomskim posmatranjima, koje su nastajale zbog nesavršenih instrumenata. Galilej je u 17. veku primetio da su ove greške simetrične i da su se male greške dešavale češće od velikih grešaka. Nemački matematičar Karl Fridrih Gaus je 1809. razvio formulu za normalnu raspodelu i pokazao da se greške dobro uklapaju u ovu raspodelu.

Francuski matematičar Pjer-Simon de Laplas je početkom 19. veka nazvao verovatnoću „dobrim razumom svedenim na proračun". Ova ideja nije bila toliko naučna kao što se možda čini. Naime, postojali su neki slučajevi u kojima je direktna primena matematičkih proračuna verovatnoće dovela do rezultata za koje se činilo da prkose racionalnosti. Problem poznat kao "Peterburški paradoks", koji je predložio Nikolas Bernuli, uključivao je opkladu sa eksponencijalno rastućom isplatom ([2]).

Igrač A baca ispravan novčić dok prvi put ne padne grb. Ako grb padne u prvom bacanju, igrač A dobija 2 dukata. Ako prvi put grb padne u drugom bacanju, igrač A dobija 4 dukata, a ako grb prvi put padne u n-tom bacanju, igrač A dobija 2^n dukata. Postavlja se pitanje: koliko dukata bi trebalo pripremiti kao početni ulog, da bi igra mogla da se odvija?

Bernuli je došao do zaključka da je za rešavanje ovog problema potrebna beskonačna količina dukata [3].

2. Formalna aksiomatska definicija verovatnoće

Jedna od poteškoća u razvoju verovatnoće kao matematičke teorije je ta što je trebalo dati definiciju verovatnoće koja je dovoljno precizna za upotrebu u matematici, ali dovoljno sveobuhvatna da može biti primenljiva na širok spektar pojava. Traganje za široko prihvatljivom definicijom je trajalo skoro tri veka. 1933. godine, ruski matematičar Andrej Nikolajevič Kolmogorov je izložio aksiomatski pristup definisanju verovatnoće koji predstavlja osnovu za savremenu teoriju verovatnoće.

Kada je započeo doktorske studije 1925. godine, Kolmogorov je objavio svoj prvi rad o teoriji verovatnoće, a 1929. godine, kada je završio doktorat imao je već 18 objavljenih radova među kojima su i verzije jakog zakona velikih brojeva. Kolmogorov je dao rigoroznu definiciju uslovnog očekivanja koje je kasnije

[3] Kako je verovatnoća da grb prvi put padne u prvom bacanju $\frac{1}{2}$, da prvi put padne u drugom bacanju $\frac{1}{4}$, sledi da je verovatnoća da prvi put padne u n-tom bacanju $\frac{1}{2^n}$. Tada je očekivana vrednost uloga $2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + \cdots + 2^n\frac{1}{2^n} + \cdots = \infty$.

postalo fundamentalno za definisanje Braunovskog kretanja, stohastičku integraciju i matematiku finansija. Postavio je temelje za izučavanje Markovljevih procesa ([5]).

U nastavku je prevod prve formalne definicije verovatnoće, objavljene u knjizi [6] "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung", autora Kolmogorova iz 1933. godine.

Definicija 2.1. (**Definincija Kolmogorova**)([6, 7])
Neka je E familija elemenata $\xi, \eta, \zeta, \dots$, koji se nazivaju *elementarni događaji*, i neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od E. Elementi skupa $\mathcal{F}$ se nazivaju *slučajni događaji*.

I. $\mathcal{F}$ je *polje*[4] skupova.

II. $\mathcal{F}$ sadrži skup E.

III. Svakom skupu A iz $\mathcal{F}$ se dodeljuje nenegativan realan broj $P(A)$. Broj $P(A)$ se naziva *verovatnoća događaja* A.

IV. $P(E)$ je jednako 1.

V. Ako A i B nemaju zajedničkih elemenata, tada je

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Sistem skupova $\mathcal{F}$, zajedno sa definisanim dodeljivanjem brojeva $P(A)$ koje zadovoljava aksiome I-V, se naziva *prostor verovatnoće*.

U prethodnoj definiciji, svojstvo funkcije P dato u V. se naziva aditivnost.

3. Verovatnoća kao neaditivna mera

U klasičnoj teoriji mere, svojstvo aditivnosti verovatnoće kao mere je zadovoljeno. Međutim, u teoriji opštih mera se izučavaju neaditivne mere, tj. mere koje nemaju svojstvo aditivnosti. Neaditivne mere se dele na dve klase: klasu nula-aditivnih skupovnih funkcija i klasu fazi (monotonih) mera ([11, 12, 14]).

U nastavku su date definicije nekih fazi mera.

Neka je X neprazan skup i $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup skupa X. Funkcija $m : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ se naziva *osnovna dodela verovatnoće* (eng. *basic probability assignment*), ako ispunjava uslove:

(i) $m(\emptyset) = 0$,

(ii) $\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} m(A) = 1$.

Definicija 3.1. (**Mera verovanja**)([12])
Neka je m osnovna dodela verovatnoće na $\mathcal{P}(X)$. *Mera verovanja* (eng. *belief*) $Bel : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ indukovana sa m definiše se sa

$$Bel(A) = \sum_{B \subset A} m(B), \quad A \in \mathcal{P}(X).$$

[4] Familija skupova se naziva polje, ako je unija, proizvod i razlika dva skupa familije takođe element familije.

Za funkciju Bel i skupove $A, B \in \mathcal{P}(X)$ za koje je $A \cap B = \emptyset$ važi

$$Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B).$$

Prethodna osobina se naziva superaditivnost.

Definicija 3.2. (**Mera plauzabilnosti**)([12])
Neka je m osnovna dodela verovatnoće na $\mathcal{P}(X)$. *Mera plauzabilnosti* (eng. *plausability*) $Pl : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ indukovana sa m definiše se sa

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B), \quad A \in \mathcal{P}(X).$$

Za funkciju Pl i skupove $A, B \in \mathcal{P}(X)$ za koje je $A \cap B = \emptyset$ važi

$$Pl(A \cup B) \leq Pl(A) + Pl(B).$$

Prethodna osobina se naziva subaditivnost.

Fazi mere kod kojih je operacija uobičajenog sabiranja zamenjena nekom opštijom realnom operacijom, u oznaci $\oplus$, se nazivaju $\oplus-$*dekompozabilne mere*. U slučaju kada je $\oplus = \sup$ dobijaju se tzv. maksitivne mere. Primeri maksitivnih mera su *mera mogućnosti* (eng. *possibility measure*) i *mera neophodnosti* (eng. *necessity measures*) ([11, 12, 14]).

U okviru pseudo-analize ([11, 12]) izučava se jos jedan primer dekompozabilne mere, tvz. *pseudoverovatnoća* (eng. *pseudo-probability measure*).

Neka je $(I, \oplus, \odot)$ poluprsten (više o poluprstenima se može naći u [11] i [12]) i Ω neprazan skup.

Definicija 3.3. (**Pseudoverovatnoća**)([13])
Neka je Σ $\sigma-$algebra podskupova od Ω. Funkcija $\mathbf{P} : \Sigma \to I$ sa osobinama

(a) $\mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{1}$,

(b) $\mathbf{P}\left(\bigcup_{\mathbf{i=1}}^{\infty} \mathbf{A_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$, za svaki niz $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ u parovima disjunktnih podskupova od Σ,

se naziva *pseudoverovatnoća*.

Više o pseudoverovatnoći i njenim osobinama se može videti u [1, 3, 4, 8, 9, 13].

4. Teorija odlučivanja

Teorija odlučivanja (ili teorija izbora) ([5, 11, 12]) je grana teorije verovatnoće koja se bavi teorijom donošenja odluka zasnovanih na dodeljivanju verovatnoće različitim faktorima i pripisivanju numeričkih vrednosti ishodima. Prvi ju je uveo Herbert A. Simon, dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju 1978. godine.

Osnov teorije odlučivanja je teorija korisnosti koja se bavi relacijama preferiranja, kojima se modelira ponašanje donosioca odluke. Teorija očekivane korisnosti se zasniva na meri verovatnoće i očekivanim vrednostima.

Razumevanje načina na koji se donose odluke je važno za mnoge druge nauke osim matematike. Teorija odlučivanja ima veliku ulogu u psihologiji, filozofiji, politici, ekonomiji i marketingu.

Zahvalnica

Rad je finansijski podržani od strane projekta Departmana za opšte discipline u tehnici, Fakulteta tehničkih nauka, Univerziteta u Novom Sadu "Unapređenje nastavnog procesa na engleskom jeziku u opštim disciplinama".

Literatura

[1] A. Chateauneuf, Đecomposable capacities, distorted probabilities and concave capacities", *Mathematical Social Sciences*, 31: pp. 19–37, 1996.

[2] L.Debnath and K. Basu, "A short history of probability theory and its applications", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46:1, pp. 13-39, 2015.

[3] N. Duraković, S. Medić, T. Grbić, A. Perović, and Lj. Nedović, "Generalization of portmanteau theorem for a sequence of interval-valued pseudo-probability measures", *Fuzzy Sets and Systems*, 364: pp. 96 – 110, 2019.

[4] T. Grbić, S. Medić, N. Duraković, S. Dumnić, and T. Gavrilov, "Weak convergence of sequences of distorted probabilities", In 2015 IEEE 13th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings, pp. 307–312, 2015.

[5] E. T. Jaynes, "Probability Theory: The Logic of Science", Cambridge University Press, 2003.

[6] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin Verlag von Julius Springer, 1933.

[7] A. Kolmogoroff, *Foundations of the Theory of Probability*, Second English Edition, Chelsea Publishing Company, 1956.

[8] Lj. Nedović and T. Grbić, "The Pseudo Probability", *Journal of Electrical Engineering*, 53(12/s): pp. 27–30, 2002.

[9] Lj. Nedović, B. Mihailović, and N.M. Ralević, Šome properties of pseudo-measures and pseudo-probability", In 2007 IEEE 5th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings, pp. 155–159, 2007.

[10] O. Ore, "Pascal and the Invention of Probability Theory", *The American Mathematical Monthly*, 67:5, pp. 409-419, 1960.

[11] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1995.

[12] E. Pap, *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematicki fakultet, Novi Sad, 1999.

[13] N. M. Ralević and Lj. M. Nedović, "The probability defined on semirings", *Bulletins for Applied and Computing Mathematics* (BAM), pp. 7–14, 1999.

[14] Z. Wang and G. J. Klir, *Generalized measure theory*, Springer, 2009.