The 9th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, May 31st–June 2nd 2024

GARCH MODELI ZA PROCENU VOLATILNOSTI VREMENSKIH SERIJA

Jelena Erdeljan [1] i **Jelena Ivetić** [2]

https://doi.org/10.24867/META.2024.06 Professional paper

Sažetak. U radu su predstavljeni ARCH i GARCH modeli koji se koriste za procenu volatilnosti vremenskih serija, kao i određene modifikacije GARCH modela. Praktičan deo rada prikazuje primenu različitih GARCH modela na procenu volatilnosti relativnih dnevnih prinosa berzanskog indeksa BELEX15.

AMS klasifikacija (2020): 91B84, 62M10

Ključne reči: Vremenske serije, volatilnost, ARCH model, GARCH model

1. Uvod

Modelovanje i predviđanje volatilnosti privuklo je veliku pažnju poslednjih godina, uglavnom motivisano njenim značajem na finansijskim tržištima. Mnogi modeli za određivanje cene finansijskih instrumenata koriste procene volatilnosti kao jednostavnu meru rizika [5].

U tom kontekstu, prvo se pojavljuju autoregresivni uslovno heteroskedastični (eng. Autoregressive conditional heteroskedasticity - ARCH) modeli, koje je uveo Robert F. Engle (1982), a zatim i generalizovani oblik ovog modela odnosno generalizovani autoregresivni uslovno heteroskedastični (eng. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity - GARCH) modeli. GARCH modeli su doveli do fundamentalne promene pristupa u finansijskoj kvantitativnoj analizi, kroz efikasno modeliranje volatilnosti cena finansijskih sredstava. Predložene su brojne klase različitih modela vremenskih serija, ali nijedan od njih nije izazvao interesovanje uporedivo sa GARCH modelima [4].

Volatilnost, kao finansijski pojam, opisuje nepredvidive promene cene nekog finansijskog instrumenta u određenom vremenskom periodu. U matematičkom smislu, volatilnost se predstavlja kao standardna devijacija slučajne promenljive. Informacije o prošlim vrednostima slučajne promenljive daju najbolje rezultate za ocenjivanje volatilnosti.

Ovaj rad predstavlja oblast modeliranja i predviđanja volatilnosti u finansijskim vremenskim serijama, fokusirajući se na GARCH modele. Primarni cilj GARCH modela je da uhvati i opiše vremenski promenljivu prirodu volatilnosti u finansijskim podacima. Eksplicitnim modeliranjem heteroskedastičnosti GARCH modeli pružaju moćan okvir za razumevanje i predviđanje obrazaca volatilnosti.

[1] Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: jelenae0501@gmail.com

[2] Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: jelenaivetic@uns.ac.rs

2. Modeli volatilnosti

ARCH i GARCH modeli se koriste za konstruisanje i predviđanje promenljive volatilnosti u vremenskim serijama, posebno kada su fluktuacije cena i/ili prinosa često promenljive tokom vremena. Razvijeni su kako bi objasnili i modelirali heteroskedastičnost, koja se javlja kada standardna devijacija promenljive koja se modelira nije konstantna.

2.1. ARCH model

Autoregresivni uslovno heteroskedastični model (ARCH) je istorijski posmatrano prvi model volatilnosti vremenskih serija. Robert F. Engle je uslovnu heteroskedastičnost varijanse predstavio kao linearnu funkciju kvadrata ranijih grešaka [7].

Definicija 2.1 (ARCH(p) model [7])**.** Neka je $p \in \mathbb{N}$ i neka $t \in [1, \infty)$. ARCH(p) se definiše sa:

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$\mu_t = \mu$$

$$a_t = \sigma_t \xi_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p a_{t-p}^2$$

$$\xi_t \sim N(0,1) \quad \text{i.i.d.}$$

U definisanom modelu:

- r_t predstavlja prinos u trenutku t,
- a_t predstavlja šok (inovaciju) u trenutku t,
- μ_t je srednja vrednost za r_t, gde μ_t ne zavisi od vremena t,
- σ_t^2 je volatilnost za r_t,
- ξ_t je greška koja se pravi tokom linearne regresije, predstavljena i.i.d. nizom,
- α_i, za $i = 1, \ldots, p$, predstavlja parametar modela,
- p predstavlja broj parametara ARCH modela,
- i.i.d. predstavlja niz nezavisnih, identično raspoređenih slučajnih promenljivih sa srednjom vrednošću 0 i varijansom 1.

Kako bi model bio dobro definisan i kako bi uslovna varijansa bila pozitivna, uvode se ograničenja [7]: $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_i \geq 0$, za $i > 0$.

2.2. GARCH model

Tim Bollerslev je 1986. godine u [1] uveo generalizaciju ARCH modela koja je poznata kao generalizovani ARCH model (GARCH).

Definicija 2.2 (GARCH(p,q) model [7])**.** Neka su $p, q \in \mathbb{N}$ i $t \in [1, \infty)$. GARCH(p,q) je definisan sa:

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$\mu_t = \mu$$

$$a_t = \sigma_t \xi_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\xi_t \sim N(0,1) \quad \text{i.i.d.}$$

U modelu važe sledeća ograničenja:

- $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ za $i = 1, \ldots, p$
- $\beta_j \geq 0$ za $j = 1, \ldots, q$
- $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$

Vidimo da se kod GARCH modela uslovna volatilnost opisuje preko grešaka iz prošlosti (kao i kod ARCH modela), ali i preko prošlih varijansi, što predstavlja generalizaciju. ARCH model traži veliki broj parametara, dok je kod GARCH modela često dovoljan GARCH(1,1) da bi se opisao veliki broj finansijskih vremenskih serija na tačan način.

2.3. Modifikacije GARCH modela

Tokom vremena su uvedene mnoge modifikacije osnovnog GARCH modela.

2.3.1. GARCH-M model

GARCH-M model (engl. GARCH in Mean) se koristi za analizu vremenskih serija finansijskih podataka gde se volatilnost promenljive proučava u kontekstu njenih efekata na srednju vrednost [2]. U ovom modelu GARCH komponenta se kombinuje sa srednjom vrednošću promenljive kako bi se modelovala volatilnost i istovremeno uključili i efekti na srednju vrednost.

Definicija 2.3 (GARCH-M(p,q) model [7])**.** Neka su $p, q \in \mathbb{N}$ i neka su date konstante μ i c. GARCH-M(1,1) se definiše sa:

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \xi_t$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

gde navedeni parametri imaju isto značenje kao u prethodnim definicijama.

Ako je c pozitivno i statistički značajno, onda povećani rizik dovodi do porasta srednje vrednosti prinosa [7]. Takođe, pozitivno c ukazuje na to da je prinos pozitivno povezan sa svojom prethodnom volatilnošću [2].

2.3.2. EGARCH model

Eksponencijalni GARCH (EGARCH) model je omogućio asimetrične efekte između pozitivnih i negativnih prinosa [7]. Nelson je 1991. godine uveo novu funkciju definisanu na sledeći način:

$$g(\xi_t) = \theta\xi_t + \gamma[|\xi_t| - E(|\xi_t|)]$$

gde θ i γ predstavljaju realne konstante, $\xi_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$, a ξ_t i $|\xi_t| - E(|\xi_t|)$ predstavljaju i.i.d. nizove sa srednjom vrednošću 0 i neprekidnom raspodelom. Bitno je napomenuti da je γ parametar asimetričnog odgovora, tako da samo negativni šok povećava buduću volatilnost. Ovo je u suprotnosti sa standardnim GARCH modelom gde šokovi iste magnitude, bilo pozitivni ili negativni, imaju isti efekat na buduću volatilnost.

Definicija 2.4 (EGARCH(p, q) model) [7])**.** Neka je α_0 konstanta, neka $p, q \in \mathbb{N}$ i neka B predstavlja operator pomeranja unazad (ili zaostajanja) takav da važi $Bg(\xi_t) = g(\xi_{t-1})$, i neka su $1 + \beta_1 B + \ldots + \beta_s B^s$ i $1 - \alpha_1 B - \ldots - \alpha_m B^m$ polinomi sa nulama izvan jediničnog kruga koji nemaju zajedničkih faktora.

Tada se EGARCH(p, q) model definiše sa:

$$a_t = \sigma_t \xi_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{(1 + \beta_1 B + \ldots + \beta_q B^q)}{(1 - \alpha_1 B - \ldots - \alpha_p B^p)} g(\xi_{t-1}).$$

Kako $\ln(\sigma_t^2)$ može biti negativan, nema potrebe da se parametri ograničavaju da bi desna strana prethodne jednačine ostala nenegativna kao kod osnovnog GARCH modela [6].

3. Modeliranje volatilnosti indeksa BELEX15

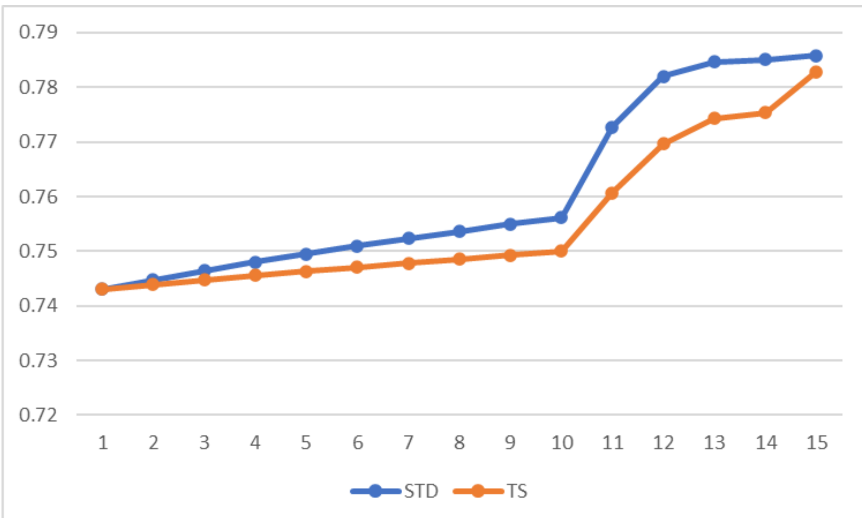
Konstruisanje GARCH modela je sprovedeno na osnovu realnog skupa podataka relativnih dnevnih promena berzanskog indeksa BELEX15, koji predstavlja najlikvidnijih 15 akcija na Beogradskoj berzi, posmatranog u periodu od 08.01.2020. do 31.12.2020 [8]. Period obuhvata uzorak od 252 radnih dana trgovanja, u kome je prosečna vrednost prinosa iznosila -0.022 ± 0.976, minimalna registrovana vrednost je -6, a maksimalna 3.53. Podaci su analizirani uz pomoć NumXL softverskog paketa.

Prvi korak u analizi jeste testiranje uzorka na ARCH efekte, kako bi se proverilo da li posmatrana vremenska serija ima nekonstantu volatilnost, odnosno da li su GARCH modeli adekvatan model za posmatranu vremensku seriju. Analiza pokazuje da je ARCH test je statistički značajan na nivou značajnosti 0.05, pa sledi da je ova vremenska serija pogodna za primenu GARCH modela.

Za posmatranu vremensku seriju je potom konstruisano 12 modela: GARCH, GARCH-M i EGARCH modeli sa različitim brojem parametara (p,q = 1,2).Za svaki od primenjenih modela su izračunate prvo inicijalne vrednosti parametara koje nisu optimalne, zatim je model kalibrisan i procenjene su optimalne vrednosti parametara modela na osnovu dostupnih podataka. Cilj kalibracije je prilagođavanje GARCH modela podacima kako bi se optimalno opisala i predvidela varijabilnost u vremenskoj seriji. Zbog ograničenog prostora ovde neće biti prikazani rezultati modeliranja, a čitaoca upućujemo na rad [3] u kome su navedeni svi detalji ovog, ali i nekoliko drugih primera.

Naredni korak je odabir najpogodnijeg modela za prognoziranje volatilnosti. Ovo je moguće utvrditi analizom kalibrisanih modela, metodom logaritam maksimalne verodostojnosti (skr. LLF) na osnovu maksimalne vrednosti, ili prema informacionom kriterijumu (skr. AIC) na osnovu najmanje vrednosti kriterijuma modela. Na osnovu LLF metode najbolji od konstruisanih modela model je EGARCH(2,1) ($LLF = -269.86$), dok je prema AIC kriterijumu najbolji model EGARCH(1,1) ($AIC = 553.55$).

Konačno, na osnovu odabranog optimalnog modela se vrši prognoza volatilnosti za određeni broj koraka unapred. Za svaki korak se računa standardna devijacija (STD) i struktura terma (TS). TS predstavlja prosečnu volatilnost od kraja posmatranog uzorka sve do kraja željenog perioda, dok STD predstavlja lokalnu volatilnost u određenom koraku. Rezultati predikcije za 15 koraka unapred na osnovu EGARCH(1,1) modela su predstavljeni na Slici 1.



Slika 1: Predikcija volatilnosti BELEX15 za 15 dana unapred primenom EGARCH(1,1) modela

4. Zaključak

Analiza finansijskih vremenskih serija predstavlja kompleksan proces koji zahteva primenu naprednih statističkih metoda. Razumevanje i modelovanje volatilnosti je neophodno za predviđanje kretanja na finansijskim tržištima, kao i za procenu rizika. U tom kontekstu, GARCH modeli su postali neizostavan alat u savremenoj ekonometrijskoj analizi.

GARCH modeli omogućavaju modelovanje heteroskedastičnosti tj. promenljive volatilnosti u vremenskim serijama. Njihova prednost u odnosu na ARCH modele se nalazi u tome što uzimaju u obzir prethodne informacije o volatilnosti, i što zahtevaju manji broj parametara.

Tokom vremena došlo je do razvoja različitih modifikacija GARCH modela. Ove modifikacije su korisne pri modeliranju specifičnih karakteristika finansijskih vremenskih serija, kao što su asimetrija, upornije promene u aktivnosti, efekat poluge i druge.

Na realnom skupu podataka vremenske serije relativnih dnevnih prinosa berzanskog indeksa BELEX15, prikazano je kako se volatilnost može modelirati i predviđati primenom GARCH modela.

Zahvalnica

Drugi autor je finansijski podržan od strane projekta Departmana za opšte discipline u tehnici, Fakulteta tehničkih nauka, Univerziteta u Novom Sadu ″Unapređenje nastavnog procesa na engleskom jeziku u opštim disciplinama″.

Literatura

[1] T. Bollerslev, ”Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, vol. 31:3, pp. 307-327, 1986.

[2] C. Brooks, *Introductory Econometrics for Finance, 2nd edition.* Cambridge University Press, 2008.

[3] J. Erdeljan, *Uslovni heteroskedastični modeli za procenu volatilnosti vremenskih serija.* Master rad, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2023.

[4] C. Francq and J-M. Zakoian, *GARCH models – Structure, Statistical Inference and Financial Applications.* John Wiley and Sons, 2010.

[5] J. Knight and S. Satchell, *Forecasting Volatility in the Financial Markets, 3rd edition.* Butterworth–Heinemann, 2007.

[6] D. Ruppert, *Statistics and Finance.* Springer-Verlag, 2004.

[7] R.S. Tsay, *Analysis of Financial Time Series, 3rd edition.* John Wiley and Sons, 2010.

[8] https://www.belex.rs/trgovanje/indeksi/belex15 (pristup 25.03.2023.)