The 7th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, May 31–June 2nd 2024

REVERZIBILNI PROSTORI

Aleksandar Janjoš [1]

https://doi.org/10.24867/META.2024.07 Review article

Sažetak. Cilj ovoga rada je da prikaže neke osobine reverzibilnih topoloških prostora, kao i neke osnovne primere reverzibilnih i nereverzibilnih prostora koje su u svom radu istakli autori M. Rajagopalan i A. Wilansky [5]. Radi jasnijeg prikaza, uvešćemo i osnovne definicije i pojmove iz teorije topoloških prostora.

AMS klasifikacija (2020): 54C99

Ključne reči: Reverzibilnost, Homeomorfizam, Topološki prostori, Baza topologije, Povezanost

1. Definicije i opšti pojmovi

Definicija 1.1 ([2])**.** Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako važe sledeća tri uslova:

($O1$) $\emptyset$ i skup X su otvoreni, tj. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,

($O2$) Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, tj. za svako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$,

($O3$) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, tj. za svaku familiju $\{O_i |\ i \in I\} \subset \mathcal{O}$ važi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Za familiju $\mathcal{O}$ kažemo i da je topologija na skupu X, dok uređeni par $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je topološki prostor, a elemente skupa X nazivamo tačkama. Dalje, za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako i samo ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup.

Primer 1.2 ([1])**.** Neka je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva i neka je $\mathcal{O}$ familija koju čine svi skupovi $U \subset \mathbf{R}$ takvi da za svako $x \in U$ postoji $\epsilon > 0$ takvo da je $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq U$. Tada familija $\mathcal{O}$ zadovoljava osobine iz definicije 1.1. Familiju $\mathcal{O}$ nazivamo uobičajena topologija, a prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{O})$ kraće označavamo samo sa $\mathbf{R}$.

Definicija 1.3 ([1])**.** Neka su $(X, \mathcal{O}_1)$ i $(X, \mathcal{O}_2)$ topološki prostori. Ako važi $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ kažemo da je toplogija $\mathcal{O}_1$ striktno finija, a topologija $\mathcal{O}_2$ striktno grublja. Diskretna topologija je uvek najfinija, a anti-diskretna je uvek najgrublja.

[1]Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: aleksandar.janjos@uns.ac.rs

Definicija 1.4 ([4]). Neka je $(\mathbf{X}, \mathcal{O})$ topološki prostor i neka je $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. $\mathcal{O}'$ nazivamo jednostavnom ekstenzijom topologije $\mathcal{O}$ ako i samo ako postoji $A \in \mathcal{O}$ takav da je $\mathcal{O}' = \{O \cup (O' \cap A) : O, O' \in \mathcal{O}\}$

Definicija 1.5 ([1]). Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je:

- T_0-prostor ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoreni skup O koji sadrži tačno jednu od njih.
- T_1-prostor ako i samo ako za svaki par različitih tačaka $x, y \in X$ postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \not\ni y$.
- T_2-prostor ili Hauzdorfov prostor ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 da je $x \in O_1$ i $y \in O_2$.

Dalje, za aksiome separacije važi sledeći niz implikacija:

$$T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Definicija 1.6 ([1]). Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $M \subseteq X$. Tada familija $\mathcal{O}'$ koju čine svi skupovi oblika $U \cap M$ za $U \in \mathcal{O}$ je nasledna ili indukovana topologija potprostora $(M, \mathcal{O}')$.

Kada god je jasno o kojoj topologiji na skupu je reč prostor ćemo kratko označavati oznakom skupa.

Definicija 1.7 ([1]). Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ dva topološka prostora. Preslikavanje $f : X \to Y$ je nepekidno ako je $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ za sve $U \in \mathcal{O}'$.

Definicija 1.8 ([1]). Neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ iz prostora $(X, \mathcal{O})$ u prostor $(Y, \mathcal{O}')$ je homeomorfizam ako je bijekcija i f^{-1} iz Y u X je neprekidno.

Definicija 1.9 ([1]). Neka je $\{(X_s, \mathcal{O}_s)\}_{s \in S}$ familija topoloških prostora gde su X_s, $s \in S$ po parovima disjunktni. Na skupu $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ familija $\mathcal{O}$ svih skupova $U \subseteq X$ takvih da je $U \cap X_s$ otvoren u X_s za svako $s \in S$ čini topologiju na skupu X. Skup X sa ovom topologijom naziva se suma prostora $\{X_s\}_{s \in S}$.

Definicija 1.10 ([1]). Neka je $\{(X_s, \mathcal{O}_s)\}_{s \in S}$ familija topoloških prostora. Na skupu $X = \Pi_{s \in S} X_s$ neka je familija preslikavanja $\{p_s\}_{s \in S}$ definisana sa: svakoj tački $x = \{x_s\} \in X$ preslikavanje p_s dodeljuje $s-$tu koordinatu $x_s \in X_s$. Skup $X = \Pi_{s \in S} X_s$ zajedno sa topologijom koju na njemu generiše familija preslikavanja $\{p_s\}_{s \in S}$ naziva se Kartezijanski proizvod topoloških prostora $\{(X_s, \mathcal{O}_s)\}_{s \in S}$, a odgovarajuća topologija naziva se topologija Tihonova.

Teorema 1.11 (Bouwer-ova teorema invarijante domena). *Ako je U otvoren u $\mathbf{R}^n$ i $f : U \to \mathbf{R}^n$ neprekidno injektivno preslikavanje onda je $V = f[U]$ otvoren u $\mathbf{R}^n$ i f je homeomorfizam između U i V.*

Definicija 1.12 ([1]). Topološki prostor X je povezan ako se ne može predstaviti kao suma bilo koja svoja dva disjunktna potprostora.

Teorema 1.13 ([1]). *Povezanost je invarijanta neprekidnih preslikavanja.*

2. Reverzibilni prostori. Osobine i primeri

Definicija 2.1 ([5])**.** Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zovemo reverzibilnim ako nema striktno grublje topologije $\mathcal{O}'$ na skupu X takve da su $(X, \mathcal{O})$ i $(X, \mathcal{O}')$ homeomorfni, ekvivalentno, ako nema striktno finije topologije $\mathcal{O}''$ takve da su $(X, \mathcal{O})$ i $(X, \mathcal{O}'')$ homeomorfni.

Lema 2.2 ([5])**.** *Topološki prostor je reverzibilan akko je svaka neprekidna bijekcija iz prostora u njega samoga homeomorfizam.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{O})$ reverzibilan topološki prostor i neka je $f : X \to X$ neprekidna bijekcija. Definišimo $\mathcal{O}' = \{G \subseteq X : f[G] \in T\}$, što je nova topologija na skupu X. Tada je $\mathcal{O}'$ grublja topologija od topologije $\mathcal{O}$ jer za svako $G \in \mathcal{O}'$ imamo da je $G = f^{-1}(f[G])$. Time je jasno da imamo $f : (X, \mathcal{O}') \to (X, \mathcal{O})$ homeomorfizam. Kako smo pretpostavili reverzibilnost prostora $(X, \mathcal{O})$ dobijamo da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$, što znači i da je $f : (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O})$ homeomorfizam, što nam daje smer ($\Longrightarrow$). Obrnut smer se dokazuje analogno. $\square$

Primer 2.3. Posmatrajmo skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ gde će pozitivni brojevi i nula imati standardnu topologiju otvorenih intervala, a negativni brojevi diskretnu topologiju. Preslikavanje $f(x) = x + 1$ je neprekidna bijekcija, ali nije homeomorfizam, jer kako je $f^{-1}(x) = x - 1$ imamo da je $f^{-1}(-1) = 0$, gde je $\{-1\}$ otvoren skup, a $\{0\}$ nije. Potpuno isto funkcioniše i dokaz na skupu racionalnih brojeva. Time smo dali primer nereverzibilnog prostora koji je prebrojiv metrički prostor.

Definicija 2.4 ([3])**.** Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je lokalno Euklidski ako postoji prirodan broj n takav da svaka tačka $x \in X$ ima okolinu homeomorfnu sa $\mathbf{R}^n$, gde prostor $\mathbf{R}^n$ posmatramo sa topologijom Tihonova.

Teorema 2.5 ([5])**.** *Svaki lokalno Euklidski topološki prostor je reverzibilan.*

Dokaz. Neka je f bijekcija iz lokalno Euklidskog prostora $(X, \mathcal{O})$ u njega samoga. Neka je $x \in X$, $y = f(x)$ i neka je V okolina od y takva da je $\psi : V \to W$ izomorfizam sa nekim otvorenim potprostorom W Euklindskog $n-$ prostora. Tada $f^{-1}[V]$ sadrži okolinu U tačke x sa $\gamma : U \to Z$ homeomorfizmom na otvoren potprostor Z Euklidskog $n-$ prostora. Uzmimo $g = \psi \circ f \circ \gamma^{-1}$. Preslikavanje g je bijekcija kao kompozicija bijekcija, pa je po Brouwer-ovoj teoremi 1.11 g homeomorfizam iz Z na otvorenu okolinu $\psi(y)$ i $f^{-1} = \gamma \circ g^{-1} \circ \psi^{-1}$ je neprekinda na okolini y. Kako je tačka x bila proizvoljna, a ovim je pokazano da proizvoljna neprekidna bijekcija ima inverznu funkciju koja je neprekinda bijekcija na okolini tačke $y = f(x)$, dobijamo da je f homeomorfizam. $\square$

Teorema 2.6. *Prostor* $(\mathbf{I}, \mathcal{O})$ *iracionalnih brojeva sa naslednom topologijom prostora* $\mathbf{R}$ *nije reverzibilan.*

Dokaz. U ovom dokazu standardnom oznakom za interval (a, b) označavaćemo samo intervale iracionalnih brojeva, čak i da su vrednosti a i b racionalni brojevi. Dovoljno je pokazati da interval $I = (-1, 1)$ nije reverzibilan prostor. Izaberimo iracionalan broj $u \in I$ i posmatrajmo prostor I' čija je topologija jednostavna ekstenzija topologije prostora I za skup $A = [u, 1)$ 1.4. Neka je $J = (0,1) \cup (2,4)$. J je homeomorfno sa I, ali mi ćemo pokazati da je homeomorfno i sa I'. Posmatrajmo $I' = (-1, u) \cup [u, 1)$, gde je jasno da su $(-1, u)$ i $(0, 1)$ homeomorfni, pa ostaje samo da napravimo homeomorfizam između $[u, 1)$ i $(2, 4)$. Neka su: niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ rastći niz racionalnih brojeva koji konvergira ka $\sqrt{8}$ i $a_0 = 2$, $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ opadajući niz racionalnih brojeva koji konvergira ka $\sqrt{8}$ sa $b_0 = 4$ i $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ opadajući niz racionalnih brojeva koji konvergira ga u sa $c_0 = 1$. Za $n = 1, 2, ...$ definišimo f_n homeomorfizme iz (c_n, c_{n-1}) na $(a_{\frac{1}{2}(n-1)}, a_{\frac{1}{2}(n+1)})$ za neparne n, ili na $(b_{\frac{1}{2}n}, b_{\frac{1}{2}(n-2)})$ za parne n. Traženi homeomorfizam iz $[u, 1)$ na $(2, 4,)$ je definisan sa $f(u) = \sqrt{8}$ i $f|_{(c_n, c_{n-1})} = f_n$. $\square$

Kako se prethodni dokaz analogno može sprovesti i za $\mathbf{Q}$, imamo da je prostor $\mathbf{R}$ direktna suma dva prostora koji nisu reverzibilni ($\mathbf{Q}$ i $\mathbf{I}$), ali on sam je reverzibilan kao lokalno Euklidski za $n = 1$. Time dobijamo sledeću teoremu kao posledicu teorema 2.4 i 2.6.

Teorema 2.7. *Postoji reverzibilni prostor koji je unija dva disjunktna prostora koji nisu reverzibilni.*

Teorema 2.8 ([5])**.** *Svaki potprostor koji je u isto vreme i otvoren i zatvoren reverzibilnog prostora je reverzibilan.*

Dokaz teoreme 2.8 je posledica činjenice da se svako neprekidno preslikavanje iz potprostora u njega samoga može neprekidno proširiti na ceo prostor (što možemo videti u [1]).

Teorema 2.9 ([5])**.** *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor sa konačno mnogo komponenti. Tada X je reverzibilan akko je svaka komponenta reverzibilna.*

Dokaz. Neka je $X = \bigcup\{C_i | i = 1, 2, 3, ..., n\}$ gde je C_i za svako i komponenta prostora X, koje su sve reverzibilne. Neka je $f : X \to X$ neprekidna bijekcija. Tada, kako $f[C_i]$ mora biti povezan potprostor za svako i, on će biti jednak nekom C_j za neko $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. To znači da f permutuje komponente, te će za svako i postojati k, $1 \leq k \leq n$ takvo da je $f^k[C_i] = C_i$. Kako je f neprekidna bijekcija to je onda i $f^k|_{C_i}$, pa iz pretpostavke da su sve komponente reverzibilne imamo da je f^k homeomorfizam iz C_i na samoga sebe. Tada je i $f^{-1} = f^{k-1} \circ (f^k)^{-1}$ neprekidno na C_i. Iz činjenice da komponenti ima konačno mnogo znamo da su one i otvoreni i zatvoreni skupovi istovremeno čime dobijamo da je f^{-1} u neprekidno preslikavenje iz X u X, što je dovoljno da f bude homeomorfizam. Time dobijamo ($\Longleftarrow$), dok je ($\Longrightarrow$) posledica teoreme 2.8 i činjenice da su sve komponente i otvoreni i zatvoreni skupovi kada ih ima konačno mnogo. $\square$

Sledeće tvrđenje je direktna posledica teoreme 2.9, jer će komponente prostora $D \times Y$ biti oblika $\{x\} \times Y$ za $x \in D$.

Tvrđenje 2.10 ([5])**.** *Neka je D konačan diskretan prostor i Y reverzibilan povezan prostor, tada je i $D \times Y$ reverzibilan.*

Definicija 2.11 ([5])**.** Za prostor X kažemo da je fisilni ako se može predstaviti kao disjunktna unija dve svoje homeomorfne kopije.

Primer fisilnog prostora je bilo koji poluotvoren interval realnih brojeva $(a, b]$. Sa druge strane, niti jedan prostor $\mathbf{R}^n$ za bilo koji prirodan broj n nije fisilan.

Primer 2.12 ([5])**.** Posmatrajmo skup prirodnih brojeva sa diskretnom topologijom, u oznaci $\mathbf{N}$, i Y neka je povezan fisilan prostor gde je $Y = A \cup B$, pri čemu su A i B njegove disjunktne homeomorfne kopije. Prostor $D \times Y$ nije reverzibilan jer za preslikavanje f koje $1 \times Y$ preslikava u $1 \times A$, $2 \times Y$ u $1 \times B$ i $n \times Y$ u $(n-1) \times Y$ za $n = 3, 4, 5, ...$ Ovim smo dobili neprekidnu bijekciju, ali inverzno preslikavanje nije neprekidno na osnovu 1.13 jer ono potprostor $1 \times Y$, koji je povezan, preslikava u nepovezan prostor $(1 \times Y) \cup (2 \times Y)$. Jedan od primera na kojem možemo ponoviti ovu konstrukciju je $\mathbf{N} \times \beta\mathbf{N}$, jer je $\mathbf{N}$ fisilan (skupovi parnih i neparnih brojeva), gde sa $\beta\mathbf{N}$ označavamo Stone-Čeh kompaktifijaciju prostora $\mathbf{N}$, o čemu se više može pročitati u [1].

Zahvalnica

Autor je finansijski podržan od strane projekta Departmana za opšte discipline u tehnici, Fakulteta tehničkih nauka, Univerziteta u Novom Sadu "Unapređenje nastavnog procesa na engleskom jeziku u opštim disciplinama".

Literatura

[1] R. Engelking, *General Topology,* Heldermann Verlag Berlin 1989.

[2] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije,* Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1998.

[3] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds,* Springer, Science and Bussunes Media, 2016.

[4] N. Levine, *Simple extensions of topologies,* American Mathematical Monthly 71, 1964.

[5] M Rajagopalan, A. Wilansky, *Reversible topological spaces,* Journal of the Australian Mathematical Society, 1966.