The 9th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, June 01-03th 2024

PRIMENA JAKOBIJEVOG POSTUPKA ZA REŠAVANJE FAZI LINEARNIH SISTEMA

Srđan Milićević[1], Biljana Mihailović[2] i Đorđe Dragić[3]

https://doi.org/10.24867/META.2024.12 Review article

Sažetak

U ovom radu predstavljen je algoritam za rešavanje kvadratnog, nesingularnog fazi linearnog sistema oblika $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, gde je matrica koeficijenata A data realna matrica, $\tilde{Y}$ je poznat, a $\tilde{X}$ nepoznat vektor fazi brojeva. Algoritam je zasnovan na primeni Jakobijevog postupka i prikazano je njegovo izvođenje i teorema o njegovoj konvergenciji. Rezultati su ilustrovani kroz numerički primer. Rad predstavlja prikaz rada [2].

AMS klasifikacija (2010): 03E72, 93C05

Ključne reči: fazi broj, fazi linearni sistem, Jakobijev postupak

1 Uvod

Sistemi linearnih jednačina imaju značajnu primenu u rešavanju raznih problema u matematici, fizici, statistici, inženjerstvu, kao i mnogim drugim naučnim oblastima. Često se prilikom rešavanja takvih problema susrećemo sa parametrima sistema koji su umesto klasičnim, realnim brojevima, predstavljeni fazi brojevima. Stoga se javlja potreba za rešavanjem fazi linearnih sistema (FLS). U zavisnosti od matrice koeficijenata sistema $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, fazi linearne sisteme delimo na kvadratne ($m = n$) i pravougaone ($m \neq n$). Kvadratni fazi linearni sistemi po prirodi rešenja mogu se podeliti na singularne i nesingularne. Opšti metod za rešavanje kvadratnog nesingularnog FLS-a dat je 1998. godine u radu [7] (Friedman i drugi). Umesto kvadratnog fazi linearnog sistema formata $n \times n$ oblika $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, posmatran je klasičan sistem linearnih jednačina čija je matrica koeficijenata formata $2n \times 2n$. Kasnije su se na temu rešavanja fazi linearnih sistema javili i brojni drugi radovi ([1], [2], [4]).

Struktura rada je organizovana na sledeći način. U sekciji 2 prikazana je teorijska osnova rada. Predstavljene su poznate osobine, definicije i teoreme iz oblasti fazi brojeva i fazi linearnih sistema. U sekciji 3 opisana je konstrukcija Jakobijevog postupka za rešavanje fazi linearnih sistema. Implementacija datog postupka na numeričkom primeru prikazana je u sekciji 4.

[1]Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail:srdjan88@uns.ac.rs

[2]Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: lica@uns.ac.rs

[3]Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail:djordje.dragic@uns.ac.rs

2 Metode za rešavanje fazi linearnih sistema

U ovom delu rada prikazani su osnovni pojmovi, definicije i teoreme vezane za fazi brojeve i rešavanje fazi linearnih sistema.

Definicija 2.1. Fazi broj dat u parametarskom obliku je uređeni par funkcija $\tilde{u} = (\underline{u}(r), \overline{u}(r)),\ r \in [0,1]$, koje zadovoljavaju sledeća svojstva:
1. $\underline{u}(r)$ je ograničena, neprekidna sa leve strane, neopadajuća funkcija na intervalu $[0,1]$;
2. $\overline{u}(r)$ je ograničena, neprekidna sa leve strane, nerastuća funkcija na intervalu $[0,1]$;
3. $\underline{u}(r) \le \overline{u}(r),\ r \in [0,1]$.

Skup svih fazi brojeva označavamo sa $\mathcal{E}$.

Definicija 2.2. Za proizvoljne fazi brojeve $\tilde{u} = (\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ i $\tilde{v} = (\underline{v}(r), \overline{v}(r))$ i realni broj k, za svako $r \in [0,1]$ definišemo:

1. *jednakost:* $\tilde{u} = \tilde{v} \Longleftrightarrow \underline{u}(r) = \underline{v}(r)$ i $\overline{u}(r) = \overline{v}(r)$;
2. *sabiranje:* $[\tilde{u} + \tilde{v}]_r = [\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \overline{u}(r) + \overline{v}(r)]$;
3. *množenje skalarom:* $[k\tilde{u}]_r = \begin{cases} [k\underline{u}(r), k\overline{u}(r)], & k \ge 0 \\ [k\overline{u}(r), k\underline{u}(r)], & k < 0 \end{cases}.$

Definicija 2.3. Neka je dat vektor fazi brojeva $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)^T$, $\tilde{y}_i \in \mathcal{E}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i matrica koeficijenata $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Linearni sistem u matričnom obliku

$$A\tilde{X} = \tilde{Y}, \tag{2.1}$$

gde je $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)^T$, $\tilde{x}_j \in \mathcal{E}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nepoznati vektor fazi brojeva, naziva se fazi linearni sistem (FLS).

Definicija 2.4. Vektor fazi brojeva $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n)^T$ dat sa $\tilde{u}_j = (\underline{u}_j(r), \overline{u}_j(r)),\ j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ r \in [0,1]$, je rešenje FLS-a (2.1) ako važi:

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{u}_j} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}\tilde{u}_j} = \underline{y}_i, \quad \text{i} \quad \overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{u}_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}\tilde{u}_j} = \overline{y}_i,$$

za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Kvadratni nesingularni fazi linearni sistem (2.1) formata $n \times n$ možemo posmatrati kao klasičan sistem linearnih jednačina formata $2n \times 2n$ čija je matrica koeficijenata $S \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$:

$$SX = Y, \tag{2.2}$$

pri čemu je S matrica pridružena matrici A oblika

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix},$$

$$X = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)^T \quad \text{i}$$
$$Y = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)^T.$$

Matrice S_1 i S_2 su kvadratne matrice reda n, $S_1 = [a_{ij}^+]$ i $S_2 = [a_{ij}^-]$, gde je

$$a_{ij}^+ = \begin{cases} a_{ij}, & a_{ij} > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad a_{ij}^- = \begin{cases} a_{ij}, & a_{ij} < 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Primetimo da je $A = S_1 + S_2$.

Teorema 2.5. *(Theorem 2.1, [2]) Matrica S iz sistema* (2.2) *je nesingularna ako i samo ako su obe matrice $S_1 + S_2$ i $S_1 - S_2$ nesingularne.*

Ako postoji matrica S^{-1}, gde je matrica S iz sistema (2.2), ona mora imati istu strukturu kao i matrica S, tj. može se zapisati u obliku

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_1 \end{bmatrix},$$

gde su T_1 i T_2 kvadratne matrice reda n.

Teorema 2.6. *(Theorem 3.1, [2]) Ako je S^{-1} nenegativna, jedinstveno rešenje X sistema (2.2) za proizvoljno Y je $X = S^{-1}Y$ i tada je njemu pridruženi vektor fazi brojeva $\tilde{X}$ rešenje FLS (2.1).*

Definicija 2.7. Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je strogo dijagonalno dominantna matrica (SDD) ako je $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Teorema 2.8. *(Theorem 3.2, [2]) Matrica A u fazi sistemu (2.1) čiji su svi dijagonalni elementi pozitivni je strogo dijagonalno dominantna ako i samo ako je matrica S strogo dijagonalno dominantna.*

3 Jakobijev postupak za rešavanje fazi linearnih sistema

Jakobijev postupak je jedan od najpoznatijih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina. Naziv je dobio po nemačkom matematičaru iz devetnaestog veka Karlu Gustavu Jakob Jakobiju. Jakobijev postupak za rešavanje fazi linearnih sistema prvobitno je predstavljen u radu [2]. Takođe, u literaturi su poznati i drugi postupci (Gaus-Zajdelov, relaksacioni postupci, itd.) koji obezbeđuju bržu konvergenciju ka rešenju. Zbog jednostavnosti primene, u ovom radu za rešavanje fazi linearnih sistema izabaran je Jakobijev postupak.

Neka je $S = D + L + U$ realna matrica formata $2n \times 2n$ sa pozitivnim dijagonalnim elementima gde je

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ S_2 & L_1 \end{bmatrix} \ \text{i} \ U = \begin{bmatrix} U_1 & S_2 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix},$$

pri čemu su L i L_1 donje trougaone matrice, a U i U_1 gornje trougaone matrice. Stoga sistem $SX = Y$ dobija sledeću strukturu:

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 + U_1 & S_2 \\ S_2 & L_1 + U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y} \\ \overline{Y} \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\underline{X} = D_1^{-1}\underline{Y} - D_1^{-1}(L_1 + U_1)\underline{X} - D_1^{-1}S_2\overline{X}$$

i

$$\overline{X} = D_1^{-1}\overline{Y} - D_1^{-1}(L_1 + U_1)\overline{X} - D_1^{-1}S_2\underline{X}.$$

Jakobijev postupak se svodi na izračunavanje sledećih iteracija:

$$\underline{X}^{k+1} = D_1^{-1}\underline{Y} - D_1^{-1}(L_1 + U_1)\underline{X}^k - D_1^{-1}S_2\overline{X^k}$$

i

$$\overline{X^{k+1}} = D_1^{-1}\overline{Y} - D_1^{-1}(L_1 + U_1)\overline{X^k} - D_1^{-1}S_2\underline{X}^k,$$

$X^k = (\underline{X}^k, \overline{X^k})$, $k = 0, 1, 2, .., n-1$, gde je $n \in \mathbb{N}$ ukupan broj iteracija, a početna iteracija X^0 je unapred zadata. Ako je zadata tačnost $\epsilon > 0$, a tačno rešenje nam nije poznato, broj iteracija se može odrediti na osnovu uslova:

$$\frac{||\underline{X}^{k+1} - \underline{X}^k||}{||\underline{X}^{k+1}||} < \epsilon \ \text{ i } \ \frac{||\overline{X^{k+1}} - \overline{X^k}||}{||\overline{X^{k+1}}||} < \epsilon,$$

gde je za $X = X(r) \in \mathbb{R}^n$ preslikavanje $||\ || : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dato sa

$$||X(r)|| = \max_{r \in [0,1]} |x_k(r)|, \ k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Zapisan u matričnoj formi, Jakobijev postupak ima oblik $X^{k+1} = PX^k + C$, gde je:

$$P = \begin{bmatrix} -D_1^{-1}(L_1 + U_1) & -D_1^{-1}S_2 \\ -D_1^{-1}S_2 & -D_1^{-1}(L_1 + U_1) \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} D_1^{-1}\underline{Y} \\ D_1^{-1}\overline{Y} \end{bmatrix} \text{ i } X = \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.1. *([8], p. 120) Neka je matrica A u fazi sistemu (2.1) SDD matrica. Tada Jakobijev postupak konvergira ka rešenju sistema (2.2) za proizvoljno* $X^0 \in \mathbb{R}^{2n}$.

4 Numerički rezultati

Jakobijev postupak konvergira ako je matrica fazi sistema SDD matrica. Međutim, može se dogoditi da sistem konvergira i kada matrica sistema nije SDD, što nam pokazuje naredni primer.

Primer 4.1. Posmatrajmo sledeći 2×2 fazi linearni sistem:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{x}_1 & - & \tilde{x}_2 & = & (r, 2-r) \\ \tilde{x}_1 & + & 3\tilde{x}_2 & = & (4+r, 7-2r) \end{array}.$$

Prvo ćemo rešenje tražiti primenom Jakobijevog postupka uzimajući za početni vektor $X^0 = \begin{bmatrix} r \\ r \\ 2-r \\ 2-r \end{bmatrix}$, tj. $\underline{X}^0 = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$ i $\overline{X^0} = \begin{bmatrix} 2-r \\ 2-r \end{bmatrix}$.

Iz sistema nalazimo da je:

$\underline{Y} = \begin{bmatrix} r \\ 4+r \end{bmatrix}$, $\overline{Y} = \begin{bmatrix} 2-r \\ 7-2r \end{bmatrix}$, $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $S_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Koristeći jednačine

$$\underline{X}^{k+1} = D_1^{-1}\underline{Y} - D_1^{-1}(L_1 + U_1)\underline{X}^k - D_1^{-1}S_2\overline{X^k}$$

i

$$\overline{X^{k+1}} = D_1^{-1}\overline{Y} - D_1^{-1}(L_1 + U_1)\overline{X^k} - D_1^{-1}S_2\underline{X}^k,$$

dobijamo da je

$$\underline{X}^1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 4+r \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-r \\ 2-r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \text{ i}$$

$$\overline{X^1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-r \\ 7-2r \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-r \\ 2-r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} - \frac{r}{3} \end{bmatrix}.$$

Stoga je $X^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ 2 \\ \frac{5}{3} - \frac{r}{3} \end{bmatrix}$, a analogno dobijamo i naredne iteracije:

$X^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} + \frac{2r}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{r}{3} \\ \frac{10}{3} - r \\ \frac{5}{3} - \frac{2r}{3} \end{bmatrix}$, $X^3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} + \frac{r}{3} \\ \frac{7}{9} + \frac{r}{9} \\ \frac{8}{3} - \frac{2r}{3} \\ \frac{11}{9} - \frac{r}{3} \end{bmatrix}$, $X^4 = \begin{bmatrix} \frac{11}{9} + \frac{2r}{3} \\ \frac{7}{9} + \frac{2r}{9} \\ \frac{25}{9} - \frac{8r}{9} \\ \frac{13}{9} - \frac{4r}{9} \end{bmatrix}$, $X^5 = \begin{bmatrix} \frac{13}{9} + \frac{5r}{9} \\ \frac{25}{27} + \frac{r}{9} \\ \frac{25}{9} - \frac{7r}{9} \\ \frac{38}{27} - \frac{10r}{27} \end{bmatrix}$,

$X^6 = \begin{bmatrix} \frac{38}{27} + \frac{17r}{27} \\ \frac{23}{27} + \frac{4r}{27} \\ \frac{79}{27} - \frac{8r}{9} \\ \frac{38}{27} - \frac{11r}{27} \end{bmatrix}$, $X^7 = \begin{bmatrix} \frac{38}{27} + \frac{16r}{27} \\ \frac{70}{81} + \frac{10r}{81} \\ \frac{77}{27} - \frac{23r}{27} \\ \frac{110}{81} - \frac{30r}{81} \end{bmatrix}$, $X^8 = \begin{bmatrix} \frac{110}{81} + \frac{51r}{81} \\ \frac{70}{81} + \frac{11r}{81} \\ \frac{232}{81} - \frac{71r}{81} \\ \frac{112}{81} - \frac{31r}{81} \end{bmatrix}$ i

$$X^9 = \begin{bmatrix} \frac{112}{81} + \frac{50r}{81} \\ \frac{214}{243} + \frac{10r}{81} \\ \frac{232}{81} - \frac{70r}{81} \\ \frac{335}{243} - \frac{91r}{243} \end{bmatrix}.$$

Uzimajući poslednje sračunatu iteraciju kao približno rešenje posmatranog fazi linearnog sistema dobijamo:
$\tilde{x}_1 \approx (1.383 + 0.617r,\ 2.864 - 0.864r)$ i $\tilde{x}_2 \approx (0.881 + 0.124r,\ 1.379 - 0.374r)$.
Tačno rešenje sistema je:

$$X = S^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 4+r \\ 2-r \\ 7-2r \end{bmatrix},$$

tj. $\tilde{x}_1 = (1.375 + 0.625r,\ 2.875 - 0.875r)$ i $\tilde{x}_2 = (0.875 + 0.125r,\ 1.375 - 0.375r)$.
Primetimo da je $\dfrac{||\underline{X} - \underline{X}^9||}{||\underline{X}||} < 0.01$ i $\dfrac{||\overline{X} - \overline{X^9}||}{||\overline{X}||} < 0.01$.

Zahvalnica

Autori su podržani od strane projekta ,,Unapređenje nastavnog procesa na engleskom jeziku u opštim disciplinama" Departmana za opšte discipline u tehnici, Fakulteta tehničkih nauka, Univerziteta u Novom Sadu.

Literatura

[1] S. Abbasbandy and M. Alavi, "A method for solving fuzzy linear systems", *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 2, pp. 37–43, 2005.

[2] T. Allahviranloo, "Numerical methods for fuzzy systems of linear equations", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 155, pp. 493–502, 2004.

[3] T. Allahviranloo and M.A. Kermani, "Solution of a fuzzy system of linear equation", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 175, pp. 519–531, 2006.

[4] T. Allahviranloo and M. Ghanbari, "On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory", *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, 5360–5379, 2012.

[5] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[6] R. Ezzati, "Solving fuzzy linear systems", *Soft. Comput.*, vol. 15, pp. 193–197, 2011.

[7] M. Friedman, M. Ming and A. Kandel, "Fuzzy linear systems", *Fuzzy Sets and Syst,* vol. 96, pp. 201–209, 1998.

[8] J.M. Ortega, *Numerical Analysis a Second Course*, Siam, 1990.