

TOMOGRAFSKA REKONSTRUKCIJA BAZIRANA NA PRETRAŽIVANJU NULA PROSTORA

Tamara Palalić¹  i Tibor Lukić² 

<https://doi.org/10.24867/META.2024.18>

Review article

Sažetak. U ovom radu je dat pregled postupka tomografske rekonstrukcije slika, predloženog u radu Lukić i Kopanja [1], koji se bazira na pretraživanju nula prostora projekтивne matrice. Do optimalnog rešenja se dolazi pretraživanjem kroz linearne kombinacije bazičnih vektora nula prostora projekтивne matrice. Glavna prednost ovog algoritma jeste što u toku rekonstrukcije projekтивna greška ostaje približno jednaka nuli. Pored teorijske analize, rad donosi i prikaz eksperimentalnih rezultata i poredjenja sa drugim postojećim algoritmima.

AMS klasifikacija (2020): 65D18, 68U10, 94A08

Ključne reči: tomografija, nula prostor, projekтивna greška

1. Uvod

Tomografija je područje obrade slike koje se bavi rekonstrukcijom nepoznate slike iz dostupnih projekтивnih podataka [2]. Matematički, slika se može modelirati funkcijom čiji skup slika može biti neprekidan ili diskretni skup. U kompjuterizovanoj tomografiji funkcija slike je neprekidna. Diskretna tomografija (DT) [3, 4] je deo tomografije, gde je raspon funkcije slike konačan i diskretni skup. Specijalno, u binarnoj tomografiji (BT), nepoznata slika sadrži samo dve različite vrednosti intenziteta, obično nula i jedan. Spektar primene tomografskih metoda vrlo je širok, naširoko se koriste u različitim industrijskim istraživanjima problema, često u obliku nerazornog ispitivanja materijala.

Već postoje uspešne metode, predložene u literaturi za rešavanje problema tomografske rekonstrukcije, na primer [5, 6, 9]. Zajednička osobina ovih postupaka jeste što se u svakoj iteraciji menja vrednost piksela u cilju smanjivanja projekтивne greške. Međutim, vrednost projekтивne greške nije jednaka nuli. S obzirom da su projekтивni podaci jedino što u startu znamo o nepoznatoj slici, cilj je da rekonstruišemo sliku koja što bliže odgovara datim podacima. U [1] predložili smo novi metod za tomografsku rekonstrukciju u kome projekтивna greška teorijski uvek ostaje jednaka nuli - u praksi je približno jednaka nuli.

U poglavlju 2 dat je matematički model tomografske rekonstrukcije, dok je u poglavlju 3 dat pregled predloženog modela tomografske rekonstrukcije slika.

¹Departman za opšte discipline u tehnicu, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: palalict@uns.ac.rs

²Departman za opšte discipline u tehnicu, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: tibor@uns.ac.rs

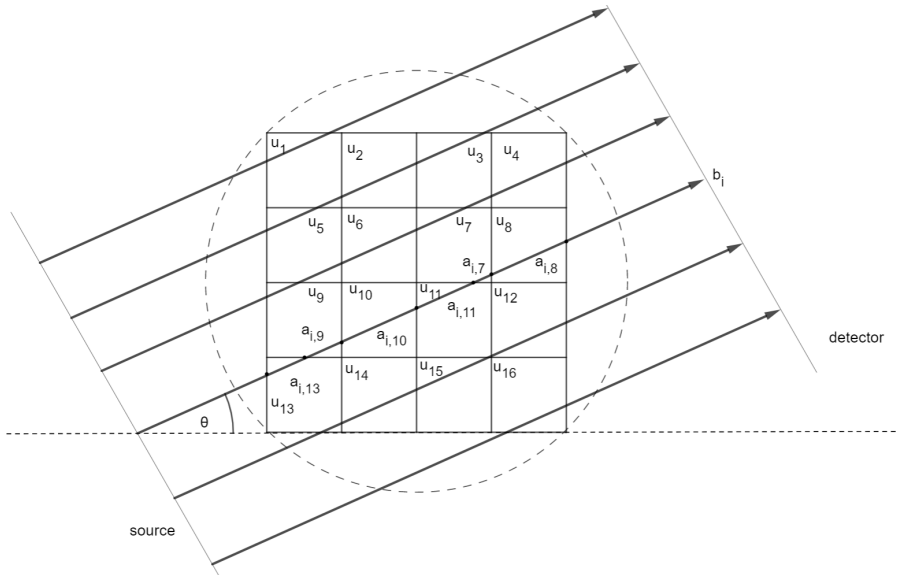
Poglavlje 4 je posvećeno eksperimentalnim rezultatima. Kratki zaključak dat je u poglavlju 5.

2. Definicije

Posmatrali smo model transmisiona tomografske rekonstrukcije slika. Glavna karakteristika transmisiona tomografije je da su i izvor i detektor postavljeni izvan posmatranog objekta. Matematički može se formulirati sledećim linearnim sistemom jednačina:

$$(2.1) \quad Au = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m,$$

gde u predstavlja nepoznatu sliku koju treba rekonstruisati. U slučaju binarne tomografije, komponente vektora u imaju samo dve različite vrednosti, obično 0 i 1. Matrica A je tzv. projektivna matrica i njene vrste nose informaciju o dužini projektivnog zraka kroz piksele. Pretpostavka je da je svaki piksel predstavljen kao kvadrat s jediničnom dužinom stranice. Na slici 1 je predstavljena izračunata vrednost projekcije (elementa projektivne matrice A) za datu sliku iz jednog projektivnog pravca označenog uglom θ .



Slika 1: Paralelna transmisiona tomografija, i -ta projektivna vrednost je dobijena kao $b_i = a_{i,13}u_{13} + a_{i,9}u_9 + a_{i,10}u_{10} + a_{i,11}u_{11} + a_{i,7}u_7 + a_{i,8}u_8$.

Drugi projektivni pravac je dobijen rotacijom sistema izvor-detektor oko centra kruga. Svaki projektivni pravac doprinosi novom paralelnom skupu projektivnih zraka. Detektovane projektivne vrednosti stavljaju se u vektor projekcije b . Nije teško videti da je matrica projekcije A retka, tj. većina elemenata $a_{i,j}$ jednaki su nuli. U problemu tomografske rekonstrukcije projektivna matrica A i projektivni podaci b su dati, a potrebno je odrediti sliku u .

3. Metod tomografske rekonstrukcije baziran na pretraživanju nula prostora

U ovom poglavlju je dat pregled predložene metode za sivu i binarnu tomografiju. Osnovna ideja jeste da rešenje sistema jednačina (2.1)

$$A u = b,$$

može predstaviti kao zbir nekog partikularnog rešenja u_p , ($A u_p = b$) i odgovarajućeg vektora koji pripada nula prostoru matrice A , definisanog sa

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Dakle, skup svih rešenja možemo predstaviti kao

$$u_p + z, \text{ where } z \in \mathcal{N}(A).$$

Označimo bazu vektorskog prostora $\mathcal{N}(A)$ skupom vektora b_1, b_2, \dots, b_k . Sva-ko rešenje sistema 2.1 može se prikazati u sledećem obliku

$$(3.1) \quad \begin{aligned} w(\alpha) &= u_p + \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{b}_k, \\ \text{where } \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \text{ and } \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n \text{ for all } i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Odaberemo vrednosti koeficijenata $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ u α na način da dobijeno rešenje $w(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ leži u određenom intervalu, na primer hiperkocki $[0, 1]^n$. Da bismo to uspešili, posmatrali smo problem optimizacije

$$(3.2) \quad \arg \min_{\alpha} \sum_{i=1}^n W(w(\alpha)_i),$$

gde W predstavlja specijalno formiranu potencijalnu funkciju, definisanu sa

$$(3.3) \quad W(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ (x-1)^2, & x \geq 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

W je neprekidno diferencijabilna funkcija koja se sastoji od dve kvadratne parabole i horizontalne linije. Njeno važno svojstvo je da je uvek veća od nule osim za vrednosti između 0 i 1, kada je nula, Slika 2 levo. Stoga, rešenje α^* problema 3.2 daje kombinaciju koeficijenata baze vektora za koje odgovarajuće rešenje slike $W(\alpha^*)$ pripada skupu $[0, 1]^n$.

Za rešavanje problema 3.2 koristili smo Spectral Conjugate Gradient algoritam [7], koji je pokazao dobre rezultate u našem eksperimentalnom radu.

Pre svega, treba da odredimo jedno partikularno rešenje u_p . Predložili smo rešenje sa najmanjom normom u_{LN} , što se vrlo brzo pronađe korišćenjem algoritma konjugovanih gradijenata [8].

Napominjemo još jednom da u toku rekonstrukcije projektivna greška ostaje vrlo niska, praktično jednaka nuli. To je vrlo važno jer je to jedini podatak od koga polazimo, te želimo da rekonstruisana slika što verodostojnije odgovara projektivnim podacima. U toku procesa se menjaju koeficijenti uz bazične

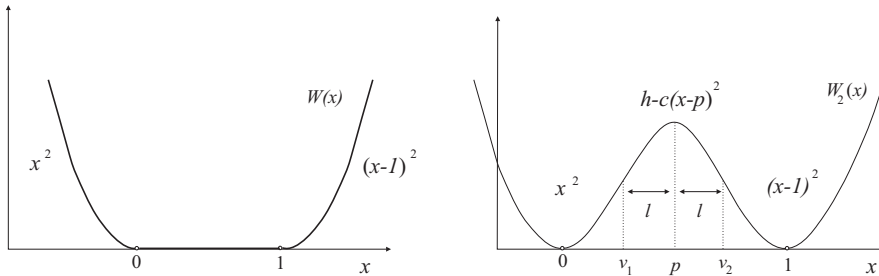
vektore nula prostora čime se menja i rešenje, odnosno vrednosti piksela slike, ali projektivni podaci ostaju zadovoljeni. Ta činjenica je osnovna prednost predloženog metoda, nazvanog *Null Space Search based Tomography* (NSST).

Dati algoritam se lako modifikuje za potrebe traženja binarnog rešenja, tj. binarne tomografije menjanjem potencijalne funkcije W .

$$(3.4) \quad W_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq v_1 \\ (x-1)^2, & x \geq v_2 \\ h - c(x-p)^2, & v_1 < x < v_2 \end{cases},$$

gde smo za parametar p podesili vrednost:

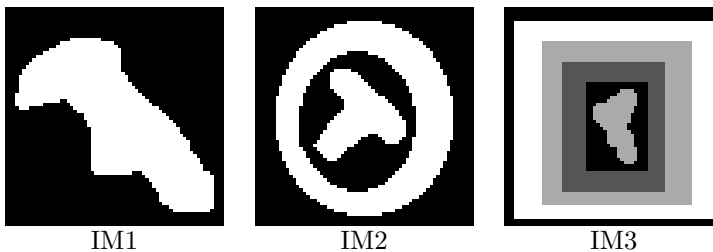
$$p = \frac{1}{2}, \quad v_1 = p - l, \quad v_2 = p + l, \quad c = \frac{1}{2l} - 1 \text{ i} \\ h = \frac{1}{4}(1 - 2l).$$



Slika 2: Potencijalna funkcija W definisana za rekonstrukciju sivih rešenja (levi grafik) i potencijalna funkcija W_2 definisana za rekonstrukciju binarnih rešenja (desni grafik)

4. Rezultati

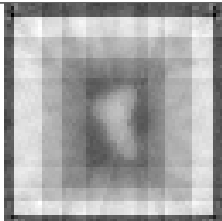
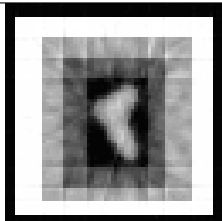
U ovom poglavlju dali smo kratki pregled eksperimentalnih rezultata u kome su korišćene dve binarne slike (IM1 i IM2) i jedna siva slika (IM3). Sve slike imaju piksele čije su vrednosti iz intervala $[0, 1]$.



Slika 3: Originalne test slike korišćene u eksperimentu

Tabela 1: Eksperimentalni rezultati za IM1 i IM2 koristeći 3 različita metoda rekonstrukcije. Parametar d označava broj projekivnih pravaca

d	IM1				IM2				
	2	3	4	6	2	3	4	6	
NSST	E_P	2.22e-12	8.61e-08	6.44e-08	8.26e-08	1.73e-12	7.24e-08	8.63e-08	8.52e-08
	E_R	313.51	18.5770	5.30e-07	1.19e-06	1296	573.89	6.16	8.51e-07
	rE_R	23.93%	1.42%	$\approx 0\%$	$\approx 0\%$	78.83%	34.91%	0.37%	$\approx 0\%$
SPG	E_P	2.82	0	0	0	4.89	5.39	0	0
	E_R	21	0	0	0	1184	595	0	0
	rE_R	1.60%	0%	0%	0%	72.02%	36.19%	0%	0%
DC	E_P	23.49	6.91	6.69	7.87	23.49	17.96	16.50	10.65
	E_R	1325	27	12	10	1325	1007	236	30
	rE_R	1.01.15%	2.06%	0.92%	0.76%	80.60%	61.25%	14.36%	1.82%

d	SIRT	NSST
10	 253.27	 114.87

 Slika 4: Rekonstrukcija test slike IM3. Predstavljene vrednosti ispod rekonstrukcije pokazuju odgovarajuće greške rekonstrukcije E_R .

Upoređen je metod tomografske rekonstrukcije NSST sa tri poznata rekonstrukcijska postupka: sa SPG-om [6] i DC [9] algoritmi za slučaj binarne tomografije, te sa SIRT [5] algoritam za rekonstrukciju sive slike. Svi razmatrani algoritmi su implementirani u Matlab-u. O kvalitetu dobijenih rekonstrukcija govore sledeće tri funkcije merenja greške:

$$E_P(u^r) = \|Au^r - b\|, \quad E_R(u^r) = \sum_{i=1}^n |u_i^r - u_i^*|, \quad rE_R(u^r) = \frac{E_R(u^r)}{n_O} \cdot 100\%$$

gde je u^r rekonstruisana slika, u^* originalna slika i n_O ukupan broj piksela slike. Funkcija E_P je projekтивna greška koja meri saglasnost rekonstrukcije sa projekivnim podacima. Greška rekonstrukcije E_R izražava udaljenost rekonstrukcije od originalne slike. Slika. 4 prikazuje rekonstrukcije sive slike. NSST pruža i vizuelno bolje rezultate u oba primera.

5. Zaključak

U ovom radu je dat pregled metoda tomografske rekonstrukcije baziranog na pretraživanju nula prostora projekтивne matrice, predloženog u radu [1]. U eksperimentalnim rezultatima pokazao je dobre performanse u odnosu na

nekoliko ranije predloženih algoritama za tomografsku rekonstrukciju. Teorijski, osnovna prednost ovog metoda jeste održavanje niske projektivne greške, gotovo jednake nuli. Za optimizaciju koristili smo SPG algoritam. Metod dozvoljava korišćenje dodatnih regularizacija i tu je mogućnost unapređivanja postupka u cilju bolje rekonstrukcije i smanjivanja broja projektivnih podataka.

Zahvalnica

Ovo istraživanje je podržano od strane Ministarstva nauke, tehnološkog razvoja i inovacija (br. ugovora: 451-03-65/2024-03/200156) i Fakulteta tehničkih nauka kroz projekat "Naučno istraživački i umetničko istraživački rad istraživača u nastavnim i saradničkim zvanjima Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu" (br. 01-3394/1).

Takođe, autori su podržani od strane projekta Departmana za opšte discipline u tehnici, Fakulteta tehničkih nauka, Univerziteta u Novom Sadu "Unapređenje nastavnog procesa na engleskom jeziku u opštim disciplinama".

Literatura

- [1] T. Lukić, T. Kopanja "Tomography Reconstruction Based on Null Space Search." u *Proceedings of the twenty-first International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA 2022)*, vol. 13348, pp. 247–259, Messina, Italy, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 2023.
- [2] G. T. Herman, *Image reconstruction from Projections*. Springer-Verlag, 1980.
- [3] G. T. Herman, A. Kuba, *Advances in Discrete Tomography and Its Applications*, Birkhauser, 2007.
- [4] G. T. Herman, A. Kuba *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhauser, 1999.
- [5] P. Gilbert, "Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections", u *Journal of Theoretical Biology* 36(1), pp. 105-117, 1972.
- [6] T. Lukić, A. Lukity "A Spectral Projected Gradient Optimization for Binary Tomography.", *Computational Intelligence in Engineering, SCI*, vol. 313, pp. 263–272. Springer-Verlag, 2010
- [7] E. Birgin, J. Martinez, "Spectral Conjugate Gradient Method for Unconstrained Optimization", *Appl. Math. Optimization* 43, pp. 117-128, 2001.
- [8] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer, New York, NY, USA, 2nd edn. 2006.
- [9] T. Schule, C. Schnorr, S. Weber, J. Hornegger, "Discrete Tomography by Convexconcave Regularization and D.C. Programming." *Discrete Appl. Math.* 151, 229– 243, 2005