The 9th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, May 31st–June 2nd 2024

BULATOVLJEVA TEORIJA GRAFOVA U TEJLOR-MINIMALNIM ALGEBRAMA

Aleksandar Prokić [1] i **Simona Prokić** [2]

https://doi.org/10.24867/META.2024.19 Review article

Sažetak. Tejlorove algebre su usko vezane za problem zadovoljenja uslova (eng. Constraint Satisfaction Problem). Dihotomija problema zadovoljenja uslova pokazana je 2017. godine u nezavisnim radovima Bulatova i Žuka. U ovom radu ćemo proučavati određeni redukt Tejlorovih algebri, tzv. Tejlor-minimalne algebre. Pokazaće se da spomenute algebre imaju neke lepe osobine, koje Tejlorove algebre ne moraju da zadovoljavaju u opštem slučaju. To nas dovodi do pretpostavke da bi mogao da postoji jednostavniji dokaz dihotomije za problem zadovoljenja uslova.

AMS klasifikacija (2020): 08A30, 08A70

Ključne reči: Tejlorova algebra, univerzalna algebra, Problem zadovoljenja uslova, CSP, META

1. Uvod

Problem zadovoljenja uslova (skraćeno CSP) je privukao naučnike iz raznih oblasti matematike i teorijskog računarstva. Primeri problema zadovoljenja uslova su problem zadovoljenja logičkih formula, problem obojivosti grafova, rešavanje sistema jednačina nad konačnom algebarskom strukturom, kao i mnogi drugi primeri.

Jedan od prvih značajnijih rezultata vezanih za klasifikaciju CSP-a je dao Tomas Šefer 1978. godine u [10], gde je pokazao da vremenska složenost rešavanja CSP-a nad dvoelemntnim domenom, tzv. Bulovom strukturom, je ili polinomna ili NP-kompletna. Pretpostavku o dihotomiji za CSP su postavili Feder i Vardi i ona glasi da se pokazana teorema Šefera može uopštiti na domen proizvoljne konačne veličine. Što su Bulatov [3] i Žuk [11, 12] i pokazali u nezavisnim radovima 2017. godine.

U Šeferovom radu je prepoznato da vremenska složenost CSP-a zavisi od relacijskog klona koji generišu relacije iz posmatranog CSP-a. Galoove veze nam daju jedinstvenu korespodenciju između relacijskih klonova i klonova (skupa term operacija neke algebre). To dovodi do zaključka da je zapravo jedino potrebno posmatrati operacije kompatibilne sa relacijama CSP-a, što nas dovodi do toga da možemo koristiti i neke tehnike iz univerzalne algebre.

[1] Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: aprokic@uns.ac.rs

[2] Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: simona.k@uns.ac.rs

Bulatov, Jeavons i Krohkin su 2005. godine u [5] pokazali da je svaki CSP ekvivalentan CSP-u nad idempotentnim domenom, odnosno gde za sve terme t važi $t(x, \ldots, x) = x$. Drugi važan doprinos tog rada je da je pokazano da ako ne postoji Tejlorov term kompatibilan sa relacijama posmatranog CSP-a, onda je vremenska složenost tog CSP-a NP-kompletna. Tako je od 2005. godine postojala hipoteza da ako postoji Tejlorov term kompatibilan sa relacijama, u tom slučaju se CSP rešava u polinomnom vremenu. Iz navedenih razloga se podrazumeva da su sve algebre u ovom radu idempotentne i konačne.

I Bulatov i Žuk u svojim radovima nisu radili sa generalno Tejlorovim algebrama, nego su koristili redukt Tejlorove algebre (izbacili su neke operacije koje im nisu bile potrebne) tako da i dalje imaju Tejlorov term ali dobijaju i neke nove lepe osobine algebri. To nas dovodi do toga da posmatramo algebre koje su Tejlorove ali da nijedan njihov pravi redukt nije Tejlorov, odnosno do *Tejlor-minimalnih algebri.* Tejlor-minimalne algebre su prvo definisane u [1] i ovo je pregledni rad tog rada.

2. Definicije

Definicija 2.1. (Idempotentna, konačna) algebra $\mathbf{A}$ je Tejlorova ako za svako $n \in \mathbb{N}$ ne postoji količnička algebra podalgebre od $\mathbf{A}^n$ takva da se dobije dvoelementna algebra čije su sve operacije projekcije.

Ova definicija se može pojednostaviti.

Teorema 2.2 ([6])**.** *Algebra je Tejlorova ako i samo ako ne postoji količnička algebra podalgebre od* $\mathbf{A}$ *takva da se dobije dvoelementna algebra čije su sve operacije projekcije.*

Za osnovne definicije i teoreme iz univerzalne algebre pogledati knjigu [7]. Za nas najkorisnija karakterizacija Tejlorovih algebri je sledeća.

Teorema 2.3 ([2])**.** *Algebra* $\mathbf{A}$ *je Tejlorova ako za svaki prost broj* $p > |A|$, $\mathbf{A}$ *ima term operaciju arnosti* p *koja je ciklična, odnosno zadovoljava identitet*

$$t(x_1, x_2, \ldots, x_p) = t(x_2, \ldots, x_p, x_1).$$

Tri tipa operacija koje su Tejlorove i sa kojima ćemo raditi su:

- *polumrežna operacija* je binarna operacija $\vee$ koja je komutativna, idempotentna i asocijativna. Algebra $(A; \vee)$, gde je $\vee$ polumrežna operacija, se naziva polumreža.

- *majdžoriti operacija* (eng. majority) je ternarna operacija m koja zadovoljava $m(x, x, y) = m(x, y, x) = m(y, x, x) = x$.

- *Maljcevljeva operacija* je ternarna operacija p koja zadovoljava $p(y, x, x) = p(x, x, y) = y$. Jedan primer takve operacije je $d(x, y, z) = x - y + z$ na A, gde su $+$ i $-$ operacije abelove grupe na skupu A. U tom slučaju algebra $(A; x - y + z)$ se naziva *afina Maljcevljeva algebra* date abelove grupe.

Definicija 2.4. Algebra $\mathbf{A}$ je abelova ako je dijagonala $\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\}$ jednaka klasi kongruencije za neku kongruenciju algebre $\mathbf{A}^2$.

Teorema 2.5. *Tejlorova algebra je abelova ako i samo ako je afini modul.*

Lako se može proveriti da na dvoelementnom skupu postoje samo četiri Tejlorove algebre: dve polumreže, majdžoriti i Maljcevljeva. Ove algebre su bile i inspiracija Bulatovu za definisanje njegovih ivica na algebri. U radu [1] koji ovde predstavljamo definisane su samo debele ivice, dok je pored njih Bulatov definisao i tanke ivice u [4]. Elementi algebre predstavljaju čvorove, dok ivice (grane) grafa definišemo na sledeći način.

Definicija 2.6. Neka je $\mathbf{A}$ algebra. Uređeni par $(a,b) \in A^2$ je ivica ako postoji kongruencija θ na $\mathbf{E} = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(a,b)$ različita od E^2, takva da je zadovoljen jedan od uslova:

- (polumrežna ivica) Postoji term operacija $f \in \mathrm{Clo}_2(\mathbf{A})$ koja deluje kao $\vee$-polumrežna operacija na $\{a/\theta, b/\theta\}$ sa maksimalnim elementom b/θ, tj. $f(a/\theta, b/\theta), f(b/\theta, a/\theta) \subseteq b/\theta$.
- (majdžoriti ivica) Postoji term operacija $m \in \mathrm{Clo}_3(\mathbf{A})$ koja deluje kao majdžoriti operacija na $\{a/\theta, b/\theta\}$.
- (abelova ivica) Algebra $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(a,b)/\theta$ je abelova.

Ivica (a,b) se naziva minimalna ako postoji maksimalna kongruencija θ koja svedoči da je (a,b) ivica i za sve $a', b' \in A$ takve da $(a,a'), (b,b') \in \theta$, imamo da $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(a',b') = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(a,b)$.

Sada ćemo dati definiciju apsorbujućih skupova neke algebre. Ovaj termin potiče iz teorije koja je razvijana za CSP i takođe je Žuk koristi u svom radu. Kasnije ćemo videti i neke veze između Bulatovljevog pristupa i Žukovog pristupa.

Definicija 2.7. Neka je $\mathbf{A}$ algebra i $B \subseteq A$. Kažemo da je B n-apsorbujući skup od $\mathbf{A}$ ako postoji term operacija $t \in \mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$ takva da $t(\mathbf{a}) \in B$ kada $\mathbf{a} \in A^n$ i $|\{i : a_i \in B\}| \geq n-1$.

Pored apsorbujućih skupova važnu ulogu u Žukovoj teoriji ima i pojam centra. Levi centar relacije $R \subseteq A \times B$ je skup $\{a \in A : (\forall b \in B)(a,b) \in R\}$. Ako R ima neprazan levi centar, kažemo da je levo centralna relacija. Desni centar i desna centralna relacija se definišu analogno. Relacija je centralna ako je i levo i desno centralna.

Definicija 2.8. Podskup $B \subseteq A$ je centar algebre $\mathbf{A}$ ako postoji algebra $\mathbf{C}$ bez netrivijalnih 2-apsorbujućih poduniverzuma i $R \leq_{sd} \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ takva da je B levi centar od R. Ako $\mathbf{C}$ može biti izabrano da je Tejlorova algebra, onda ćemo B nazivati Tejlorovim centrom algebre $\mathbf{A}$.

Kažemo da je algebra $\mathbf{A}'$ redukt algebre $\mathbf{A}$ ako je $\mathrm{Clo}(\mathbf{A}') \subseteq \mathrm{Clo}(\mathbf{A})$.

Definicija 2.9. Algebra $\mathbf{A}$ je Tejlor-minimalna ako je Tejlorova i ne postoji pravi redukt od $\mathbf{A}$ koji je Tejlorov.

3. Rezultati

Počnimo sa nekim lakšim, ali i veoma važnim tvrđenjima.

Lema 3.1. *Za svaku Tejlorovu algebru postoji redukt koji je Tejlor-minimalan.*

Ova lema nam omogućava da kod CSP-a sa obične Tejlorove algebre pređemo na Tejlor-minimalne. To možemo uraditi zato što ako smanjimo broj operacija kompatibilnih sa relacijama CSP-a dobićemo samo teži problem, ali kako i dalje imamo Tejlorov term, na osnovu hipoteze o dihotomiji koja je sada teorema o dihotomiji, problem je i dalje rešiv u polinomnom vremenu. Na dvoelementnom skupu, recimo $\{0,1\}$, postoje samo tri Tejlor-minimalne algebre do na izomorfizam: polumreža, majdžoriti algebra i afina algebra sa termom $d(x,y,z) = x -_2 y +_2 z$ na $\mathbb{Z}_2$. Da su Tejlor-minimalne sledi iz Postove karakterizacije klonova na dvoelementnom skupu [9]. Na troelementnom skupu Brejdi je pronašao svih 24 Tejlor-minimalnih algebri. One se mogu pronaći i u master radu [8]. Sledeća lema važi za Tejlor-minimalne algebre, ali ne i za Tejlorove u opštem slučaju.

Lema 3.2. *Neka je* $\mathbf{A}$ *Tejlor-minimalna algebra i* $B \subseteq A$ *je zatvoren za operaciju* $f \in Clo(\mathbf{A})$ *takvu da* B *zajedno sa restrikcijom od* f *na* B *formira Tejlorovu algebru. Tada je* B *poduniverzum od* $\mathbf{A}$.

Lema 3.3. *Svaka podalgebra, konačan proizvod ili količnička algebra Tejlor-minimalne algebre je takođe Tejlor-minimalna.*

Teorema 3.4. *Neka je* $\mathbf{A}$ *Tejlor-minimalna algebra i* B *apsorbujući skup od* $\mathbf{A}$ *u odnosu na neki term. Tada je* B *poduniverzum od* $\mathbf{A}$.

Term $t(x_1, \dots, x_n)$ zavisi od i-te koordinate, $i \leq n$, ako postoje $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$ takvi da $t(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ nije konstantna funkcija. Kažemo i da je i-ta koordinata esencijalna za term t.

Definicija 3.5. Neka je $\mathbf{A}$ algebra i $B \subseteq A$. Skup B je jako projektivan poduniverzum od $\mathbf{A}$ ako za svako $f \in \mathrm{Clo}(\mathbf{A})$ i svaku esencijalnu koordinatu i za term f važi $f(\mathbf{a}) \in B$ gde je $\mathbf{a} \in A^n$ takav da $a_i \in B$.

Teorema 3.6. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna za sve Tejlor-minimalne algebre* $\mathbf{A}$ *i sve* $B \subseteq A$:

- B *je* 2*-apsorbujući skup od* $\mathbf{A}$.
- $R(x,y,z) = B(x) \vee B(y) \vee B(z)$ *je poduniverzum od* $\mathbf{A}^3$.
- B *je jako projektivan poduniverzum od* $\mathbf{A}$.

Teorema 3.7. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna za sve Tejlor-minimalne algebre* $\mathbf{A}$ *i sve* $B \subseteq A$:

- B *je* 3*-apsorbujući skup od* $\mathbf{A}$.
- $R(x,y) = B(x) \vee B(y)$ *je poduniverzum od* $\mathbf{A}^2$.
- B *je Tejlorov centar od* $\mathbf{A}$.

Lema 3.8. *Usmeren graf formiran pomoću minimalnih ivica neke proizvoljne algebre je (slabo) povezan.*

Teorema 3.9. *Neka je (a, b) ivica (polumrežna, majdžoriti ili abelova) u Tejlor-minimalnoj algebri $\mathbf{A}$ i neka je θ kongruencija algebre $\mathbf{E} = Sg(a, b)$ koja svedoči da je (a, b) ivica.*

a) Ako je (a, b) polumrežna ivica, onda je $\mathbf{E}/\theta$ term ekvivalentno dvoelementnoj polumreži sa apsorbujućim elementom b/θ.

b) Ako je (a, b) majdžoriti ivica, onda je $\mathbf{E}/\theta$ term ekvivalentno dvoelementnoj majdžoriti algebri.

c) Ako je (a, b) abelova ivica, onda je $\mathbf{E}/\theta$ term ekvivalentno afinoj Maljcevljevoj algebri, gde je Maljcevljeva operacija $x - y + z$ dobijena kao term abelove grupe koja je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_m$, za neki prirodan broj m.

Takođe, kongruencija koja svedoči da je ivica (a, b) polumrežna je jedinstvena i ta kongruencija je maksimalna. Isto važi i za majdžoriti ivice.

Lema 3.10. *Neka je (a, b) minimalna polumrežna ivica u Tejlor-minimalnoj algebri. Tada je $\{a, b\}$ poduniverzum od $\mathbf{A}$, iz čega sledi da je $Sg_{\mathbf{A}}(a, b) = \{a, b\}$ i kongruencija koja svedoči da je (a, b) ivica je relacija $=$.*

Definicija 3.11. Neka je $\mathbf{A}$ algebra, $B \subseteq A$ i (b, a) ivica. Kažemo da je B stabilan za ivicu (b, a) ako za svaku kongruenciju θ algebre $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(b, a)$, koja svedoči da je (b, a) ivica, takvu da b/θ seče skup B važi da svaka θ-klasa seče skup B.

Teorema 3.12. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna za sve Tejlor-minimalne algebre $\mathbf{A}$ i sve $B \subseteq A$:*

- *B 2-apsorbuje algebru $\mathbf{A}$.*
- *B je stabilan za sve ivice.*

Teorema 3.13. *Svaki apsorbujući skup (u odnosu na neki term t) Tejlor-minimalne algebre $\mathbf{A}$ je stabilan u odnosu na polumrežne i abelove ivice. Takođe, za svako $b \in A$ sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

- *$\{b\}$ apsorbuje $\mathbf{A}$.*
- *$\{b\}$ je stabilan u odnosu na polumrežne i abelove ivice.*

4. Zaključak

U ovom radu smo prezentovali najvažnije rezultate iz rada [1]. Definisane su tri vrste ivica, a zatim su pokazane i veze između ivica i apsorbujućih skupova u Tejlor-minimalnim algebrama. Pokazana je i teorema povezanosti u grafu formiranom pomoću ivica koja važi za bilo koje algebre. Razlika u ivicama između Tejlorove algebre i obične algebre je u abelovim ivicama: kod Tejlorovih algebri abelova ivica (a, b) je zapravo *afina*, tj. $\mathrm{Sg}(a, b)/\theta$ je afina algebra, dok u običnim algebrama abelova ivica može biti ili afina ili *skupovna*, tj. $\mathrm{Sg}(a, b)/\theta$ ima samo projekcije kao operacije što kod Tejlorovih algebri nije moguće.

Zahvalnica

Ovo istraživanje je podržano od strane Departmana za opšte discipline, Fakulteta tehničkih nauka, Univerziteta u Novom Sadu, kroz projekat "Unapređenje nastavnog procesa na engleskom jeziku u opštim disciplinama".

Literatura

[1] L. Barto, Z. Brady, A. Bulatov, M. Kozik, D. Zhuk, "Unifying the Three Algebraic Approaches to the CSP via Minimal Taylor Algebras", *arXiv*:2104.11808v5, 2024.

[2] L. Barto, M. Kozik, "Absorbing Subalgebras, Cyclic Terms, and the Constraint Satisfaction Problem", *Logical Methods in Computer Science*, pages 1-27, 2012.

[3] A. Bulatov, "A dichotomy theorem for nonuniform CSPs", *In 58th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS 2017, Berkeley, CA, USA, pages 319–330, 2017.

[4] A. Bulatov, "Local structure of idempotent algebras I", *arXiv*, abs/2006.09599, 2020.

[5] A. Bulatov, P. Jeavons, A. Krokhin, "Classifying the complexity of constraints using finite algebras", *SIAM J. Comput.*, pages 720–742, 2005.

[6] A. Bulatov, P. Jeavons, "Algebraic structures in combinatorial problems", Technical Report MATH-AL-4-2001, Technische universität Dresden, Dresden, Germany, 2001.

[7] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[8] F. Jankovec, *Minimal Taylor Clones on Three Elements*, MsC thesis, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Prague, 2022.

[9] E. Post, *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*, (AM-5), Princeton University Press, 1941.

[10] T. Schaefer, "The complexity of satisfiability problems", *In Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '78, New York, NY, USA, pages 216–226, 1978.

[11] D. Zhuk, "A proof of CSP dichotomy conjecture", *In 58th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS 2017, Berkeley, CA, USA, pages 331–342, 2017.

[12] D Zhuk, "A proof of the CSP dichotomy conjecture", *J. ACM*, pages 1-78, 2020.