Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 1

O kursu

Opšti podaci

- Naziv kursa: Algebra
- Smer: Energetika, elektronika i telekomunikacije, prvi semestar

- Predavač: Ivan Prokić, docent, email: prokic@uns.ac.rs
- Asistenti:
  - Maria Kiš, asistent master, email: kiss_maria@uns.ac.rs
  - Katarina Vidojević, saradnik u nastavi, email: vidojevic9@uns.ac.rs
  - Ivan Prokić

- Broj ESPB bodova: 9
  - Pojašnjenje: 9 ESPB znači 270 sati ukupnog rada studenta, uključujući predavanja i vežbe
  - Zaključak: narednih 15 sedmica potrebno je da 18 **sati sedmično posvetite Algebri**

Sadržaj kursa

Prvi deo

1. Relacije
2. Funkcije
3. Bulove algebre
4. Grupoidi, grupe, prsteni i polja
5. Kompleksni brojevi
6. Polinomi nad proizvoljnim poljima
7. Konstrukcija polja

Drugi deo

1. Determinante
2. Sistemi linearnih jednačina
3. Slobodni vektori
4. Analitička geometrija
5. Vektorski prostori
6. Linearne transformacije
7. Matrice, karakteristični koreni i vektori

Način polaganja

- U toku semestra:
  - Polažu se 2 kolokvijuma (drugi u januarskom ispitnom roku). Svaki od kolokvijuma sastoji se od zadataka (pismeni deo) i testova (usmeni deo). Zadaci i testovi nose po 25 bodova, minimum za prolaz je 13 bodova po delu.
- U ispitnim rokovima:
  - Student polaže pismeni deo iz 2 dela zadataka (onaj deo/delove koji/koje nije položio na kolokvijumima i prethodnim ispitnim rokovima). Zadaci se i u ispitnim rokovima mogu polagati parcijalno
  - Student koji položi pismeni deo ispita stiče uslov da izađe na usmeni na kom:
    1. ako je položio oba testa na kolokvijumima upisuje ocenu
    2. ako je položio samo jedan test na kolokvijumima odgovara usmeno deo gradiva koji nije položio
    3. ako nije položio nijedan test na kolokvijumima odgovara usmeno celo gradivo
- Položeni deo važi do kraja školske godine odnosno do poslednjeg oktobarskog roka
- Stari studenti koji žele da polažu preko kolokvijuma (tj. parcijalno) moraju se prijaviti na studentskoj službi
- Upis ocena je i usmeni i student mora doći lično
- Prepisivanje je strogo zabranjeno i kažnjivo

Literatura

- Ovi slajdovi i materijal za vežbi
- R. Doroslovački, *Algebra*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- R. Doroslovački, Lj. Nedović, *Testovi iz algebre*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- R. Doroslovački, Lj. Nedović, *Metodička zbirka zadataka iz algebre*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- M. Nedović, D. Arsić, I. Prokić, M. Kiš, I. Miščević, *Zbirka rešenih zadataka iz algebre - prvi deo*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Osnovni pojmovi iz logike i skupova

O logici: iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$
2. $2 + 4 = 7$
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo*
5. *Ova rečenica je netačna*

O logici: iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ *(Tačan iskaz)*
2. $2 + 4 = 7$
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo*
5. *Ova rečenica je netačna*

O logici: iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\bot$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ *(Tačan iskaz)*
2. $2 + 4 = 7$ *(Netačan iskaz)*
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo*
5. *Ova rečenica je netačna*

O logici: iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\bot$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ *(Tačan iskaz)*
2. $2 + 4 = 7$ *(Netačan iskaz)*
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja (Iskaz za koji ne znamo tačnost - Hipoteza Gobalha)*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo*
5. *Ova rečenica je netačna*

O logici: iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ *(Tačan iskaz)*
2. $2 + 4 = 7$ *(Netačan iskaz)*
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja (Iskaz za koji ne znamo tačnost - Hipoteza Gobalha)*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo* *(Nije iskaz)*
5. *Ova rečenica je netačna*

O logici: iskazi

Iskazi su rečenice kojima se može utvrditi tačnost: ili su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).

Primer

Nađi iskaze i utvrdi njihovu tačnost:

1. $2 + 4 = 6$ *(Tačan iskaz)*
2. $2 + 4 = 7$ *(Netačan iskaz)*
3. *Svaki paran broj veći ili jednak od 4 može se napisati kao zbir dva prosta broja (Iskaz za koji ne znamo tačnost - Hipoteza Gobalha)*
4. *Moje rešenje zadatka je lepo* *(Nije iskaz)*
5. *Ova rečenica je netačna* *(Nije iskaz - Paradoks lažova)*

O logici: logički veznici i kvantifikatori

(Iskazna logika) Ako su p i q iskazi, tada su iskazi i

- negacija: $\neg p$ (Tačno akko je p netačno)
- konjukcija: $p \wedge q$ (Tačno akko su oba i p i q tačni)
- disjunkcija: $p \vee q$ (Netačno akko su oba i p i q netačni)
- implikacija: $p \Rightarrow q$ (Netačno samo ako je p tačno i q netačno, inače tačno)
- ekvivalencija: $p \Leftrightarrow q$ (Netačno akko su p i q jedan tačan, a drugi netačan)

(Predikatska logika)

- postoji: $(\exists x \in A)\pi(x)$ (postoji x iz skupa A takvo da je $\pi(x)$ tačno)
- sa svako: $(\forall x \in A)\pi(x)$ (za svako x iz skupa A je $\pi(x)$ tačno)

O logici: neke važne teoreme (tautologije)

Ove principe ćemo koristiti u dokazima:

- Demorganovi zakoni:
  - $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge \neg q$
- kontrapozicija: $p \Rightarrow q \;\Leftrightarrow\; \neg q \Rightarrow \neg p$
- generalizacije Demorganovih zakona:
  - $\neg\Big((\exists x \in A)\pi(x)\Big) \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in A)\neg\pi(x)$
  - $\neg\Big((\forall x \in A)\pi(x)\Big) \;\Leftrightarrow\; (\exists x \in A)\neg\pi(x)$

O skupovima: elementi i skupovi

Ako element x pripada skupu A pišemo $x \in A$, a ako ne pripada pišemo $x \notin A$

Neki važni skupovi: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Skup može biti zadat nabrajanjem elemenata $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ili pomoću uslova, odnosno osobine $A = \{x \mid \pi(x)\}$

Kardinalnost skupa: $|A|$ je broj elemenata skupa

Jednakost skupova: $A = B \iff (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Podskup: $A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$

O skupovima: operacije

Ako su A i B skupovi tada su i

- unija: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- presek: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- skupovna razlika: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- komplement A u odnosu na U: $A^c = \overline{A} = U \backslash A$
- simetrična razlika: $A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- Partitivni skup od A: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

Primer

Ako je $A = \{a, b, c\}$, tada je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Napomena

Ako je $|A| = n$ tada je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

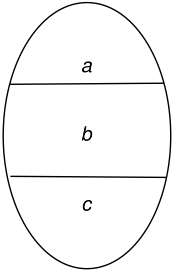
O skupovima: particije

Particija je podela skupa A na neprazne podskupove, tako da ti podskupovi imaju prazne preseke, a da im je unija čitav A.

Primer

Ako je $A = \{a, b, c\}$, tada su sve particije skupa A sledeće

1. $\{\{a, b, c\}\}$
2. $\{\{a, b\}, \{c\}\}$
3. $\{\{a\}, \{b, c\}\}$
4. $\{\{a, c\}, \{b\}\}$
5. $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$



Particija $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ skupa A

Relacije

Uređeni par

Definicija (Uređeni par)

Uređeni par (a, b) *je skup elemenata* a *i* b *kod koga je redosled elemenata bitan.*

Za skupove važi $\{a, b\} = \{b, a\}$, a za uređenje parove $(a, b) \neq (b, a)$, ako je $a \neq b$.

Uređena trojka: $(a, b, c) = ((a, b), c)$

Uređena n-torka (definisana rekurzivno): $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$

Dekartov proizvod

Definicija (Dekartov proizvod)

Dekartov proizvod skupova A i B je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Napomena

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Primer

Ako je $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{x, y\}$, tada je

1. $A \times B =$
2. $B \times A =$
3. $A^2 = A \times A =$
4. $B^3 =$

Dekartov proizvod

Definicija (Dekartov proizvod)

Dekartov proizvod skupova A i B je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Napomena

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Primer

Ako je $A = \{a, b, c\}$ *i* $B = \{x, y\}$, *tada je*

1. $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$
2. $B \times A = \{(x, a), (y, a), (x, b), (y, b), (x, c), (y, c)\}$
3. $A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$
4. $B^3 = \{(x, x, x), (x, x, y), (x, y, x), (x, y, y), (y, x, x), (y, x, y), (y, y, x), (y, y, y)\}$

Binarna relacija

Definicija (Binarna relacija)

Bilo koji skup uređenih parova naziva se binarna relacija. Ako je ρ binarna relacija, tada se sa $\mathcal{D}(\rho)$ označava skup prvih komponenti, a sa $\mathcal{A}(\rho)$ skup drugih komponenti.

Definicija (Binarna relacija skupa)

Kažemo da je ρ binarna relacija nepraznog skupa A ako je $\rho \subseteq A^2$.

Primer

Neke binarne relacije skupa $A = \{a, b, c\}$ su

1. $\rho_1 = \emptyset$ *(Prazna relacija)*
2. $\rho_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ *(Dijagonala)*
3. $\rho_3 = A^2$ *(Puna relacija)*

Inverzna relacija

Napomena (U relaciji)

Kada (a, b) *pripada relaciji* ρ *pišemo* $(a, b) \in \rho$ *ili* $a \, \rho \, b$*, i kažemo da je a u relaciji sa b.* *Kada* (a, b) *ne pripada relaciji* ρ *pišemo* $(a, b) \notin \rho$, $a \not\rho \, b$*, ili* $\neg(a \, \rho \, b)$ *i kažemo da a nije u relaciji sa b.*

Definicija (Inverzna relacija)

Za binarnu relaciju ρ *njoj inverzna relacija* ρ^{-1} *je data sa* $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$.

Primer

1. *Za* $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$ *inverzna je* $\rho_1^{-1} = \{(c, a), (a, b), (b, b)\}$
2. *Prazna relacija, dijagonala i puna relacija nekog skupa su same sebi inverzne*

Osobine binarnih relacija

Definicija (Osobine binarnih relacija)

Relacija ρ skupa A je:

(R)	*refleksivana*	*akko*	$(\forall x \in A)\ x\,\rho\,x$
(S)	*simetrična*	*akko*	$(\forall x, y \in A)\ x\,\rho\,y \Rightarrow y\,\rho\,x$
(A)	*antisimetrična*	*akko*	$(\forall x, y \in A)\ (x\,\rho\,y \wedge x \neq y) \Rightarrow \neg(y\,\rho\,x)$
(T)	*tranzitivna*	*akko*	$(\forall x, y, z \in A)\ (x\,\rho\,y \wedge y\,\rho\,z) \Rightarrow x\,\rho\,z$
(F)	*funkcija*	*akko*	$(\forall x, y, z \in A)\ (x\,\rho\,y \wedge x\,\rho\,z) \Rightarrow y = z$

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$*:*

R S A T F

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a,c),(b,a),(b,b)\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(a,c),(b,a),(b,b),(a,b)\}$ R S A T F
3. $\rho_3 = \{(a,c),(b,a),(b,b),(a,b),(c,a),(a,a),(c,c)\}$
4. $\rho_4 = \{(a,a),(c,c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$ R S A T F
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$ R S A T F
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a,c),(b,a),(b,b)\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(a,c),(b,a),(b,b),(a,b)\}$ R S A T F
3. $\rho_3 = \{(a,c),(b,a),(b,b),(a,b),(c,a),(a,a),(c,c)\}$ R S A T F
4. $\rho_4 = \{(a,a),(c,c)\}$ R S A T F
5. $\rho_5 = \emptyset$
6. $\rho_6 = A^2$

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$ R S A T F
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$ R S A T F
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$ R S A T F
5. $\rho_5 = \emptyset$ R S A T F
6. $\rho_6 = A^2$

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$*:*

1. $\rho_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b)\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b)\}$ R S A T F
3. $\rho_3 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (a, b), (c, a), (a, a), (c, c)\}$ R S A T F
4. $\rho_4 = \{(a, a), (c, c)\}$ R S A T F
5. $\rho_5 = \emptyset$ R S A T F
6. $\rho_6 = A^2$ R S A T F

Osobine binarnih relacija: primer 1

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$*:*

1. $\rho_1 = \{(a,c),(b,a),(b,b)\}$ — R S A T F
2. $\rho_2 = \{(a,c),(b,a),(b,b),(a,b)\}$ — R S A T F
3. $\rho_3 = \{(a,c),(b,a),(b,b),(a,b),(c,a),(a,a),(c,c)\}$ — R S A T F
4. $\rho_4 = \{(a,a),(c,c)\}$ — R S A T F
5. $\rho_5 = \emptyset$ — R S A T F
6. $\rho_6 = A^2$ — R S A T F

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x, y) \mid x = y \;\wedge\; x, y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \;\wedge\; x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\rho_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \;\wedge\; x, y \in \mathbb{Z}\}$
4. $\rho_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 \;\wedge\; x, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x, y) \,|\, x = y \;\wedge\; x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\rho_2 = \{(x, y) \,|\, x \leq y \;\wedge\; x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\rho_3 = \{(x, y) \,|\, x \leq y \;\wedge\; x, y \in \mathbb{Z}\}$
4. $\rho_4 = \{(x, y) \,|\, y = x^2 \;\wedge\; x, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

R S A T F

R S A T F

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$*:*

1. $\rho_1 = \{(x,y) \mid x = y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(x,y) \mid x \leq y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
3. $\rho_3 = \{(x,y) \mid x \leq y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{Z}\}$ R S A T F
4. $\rho_4 = \{(x,y) \mid y = x^2 \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x,y) \mid x = y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$ — R S A T F
2. $\rho_2 = \{(x,y) \mid x \leq y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$ — R S A T F
3. $\rho_3 = \{(x,y) \mid x \leq y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{Z}\}$ — R S A T F
4. $\rho_4 = \{(x,y) \mid y = x^2 \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$ — R S A T F
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

1. $\rho_1 = \{(x,y) \mid x = y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(x,y) \mid x \leq y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
3. $\rho_3 = \{(x,y) \mid x \leq y \ \wedge \ x,y \in \mathbb{Z}\}$ R S A T F
4. $\rho_4 = \{(x,y) \mid y = x^2 \ \wedge \ x,y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$ R S A T F

Osobine binarnih relacija: primer 2

Primer

Koje od osobina imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$*:*

1. $\rho_1 = \{(x, y) \mid x = y \ \wedge \ x, y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
2. $\rho_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \ \wedge \ x, y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
3. $\rho_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \ \wedge \ x, y \in \mathbb{Z}\}$ R S A T F
4. $\rho_4 = \{(x, y) \mid y = x^2 \ \wedge \ x, y \in \mathbb{R}\}$ R S A T F
5. $\rho_5 = \mathbb{Z}^2$ R S A T F

Šta smo danas radili

- Ponovili osnovne pojmove iz logike
- Ponovili osnovne pojmove iz skupova
- Uređeni parovi i Dekartov proizvod
- Binarne relacije
- Osobine binarnih relacija (R S A T F)