Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 10

Na prethodnom času

- Prsten, domen integriteta i polje
- Za konačne skupove: domen integriteta $=$ polje
- Konačna polja imaju p^n elemenata
- Homomorfizam i izomorfizam
- Potprsten
- Polje kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi

Algebarski oblik kompleksnog broja

Prošli put: skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

Definicija (Realni i imaginarni deo)

Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je z zadat u **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja z.*

Prošli put: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

Primer

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:

$$z_1 + z_2 =$$

$$z_1 - z_2 =$$

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

Algebarski oblik kompleksnog broja

Prošli put: skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

Definicija (Realni i imaginarni deo)

Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je z zadat u **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja z.*

Prošli put: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

Primer

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$$

$$z_1 - z_2 =$$

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

Algebarski oblik kompleksnog broja

Prošli put: skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

Definicija (Realni i imaginarni deo)

Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je z zadat u **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja z.*

Prošli put: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

Primer

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (1 - 2i) = 1 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

Algebarski oblik kompleksnog broja

Prošli put: skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

Definicija (Realni i imaginarni deo)

Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, *tada kažemo da je* z *zadat u* **algebarskom obliku**, *da je* $Re(z) = x$ **realni deo**, *a* $Im(z) = y$ **imaginarni deo** *kompleksnog broja* z.

Prošli put: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

Primer

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. *Izračunati:*

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (1 - 2i) = 1 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = 2 + 6 + 3i - 4i = 8 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

Algebarski oblik kompleksnog broja

Prošli put: skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$.

Definicija (Realni i imaginarni deo)

Ako je kompleksni broj $z = x + iy$, tada kažemo da je z zadat u **algebarskom obliku**, *da je $Re(z) = x$* **realni deo**, *a $Im(z) = y$* **imaginarni deo** *kompleksnog broja z.*

Prošli put: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

Primer

Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$. Izračunati:

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$$

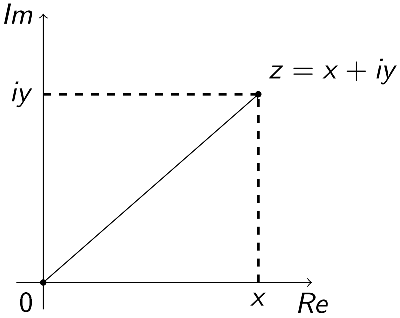
$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (1 - 2i) = 1 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = 2 + 6 + 3i - 4i = 8 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{2 - 6 + 4i + 3i}{1^2 + 2^2} = \frac{-4 + 7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Kompleksna ravan

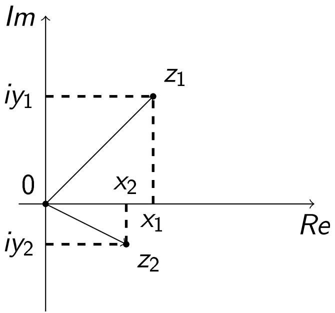
Prošli put: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje izomorfno polju $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$. Zato kompleksne brojeve možemo posmatrati u **kompleksnoj ravni**.



Ova geometrijska interpretacija olakšava razumevanje mnogih pojmova iz polja kompleksnih brojeva.

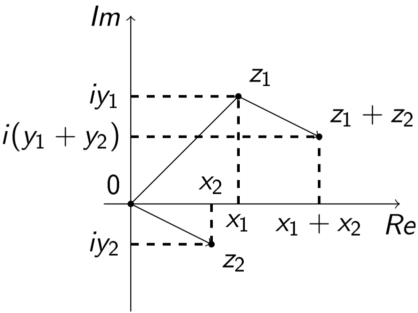
Sabiranje kompleksnih brojeva je sabiranje vektora

Sabiranje kompleksnih brojeva je definisano "po koordinatama" sa $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, isto kao sabiranje vektora u ravni.



Sabiranje kompleksnih brojeva je sabiranje vektora

Sabiranje kompleksnih brojeva je definisano "po koordinatama" sa $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, isto kao sabiranje vektora u ravni.



Sabiranje kompleksnih brojeva je sabiranje vektora

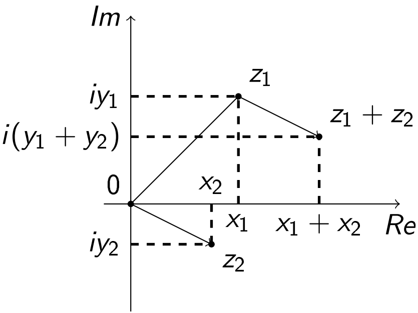
Sabiranje kompleksnih brojeva je definisano "po koordinatama" sa $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, isto kao sabiranje vektora u ravni.

Teorema

Abelova grupa $(\mathbb{C}, +)$ izomorfna je sa Abelovom grupom $(V, +)$, gde je V skup svih slobodnih vektora u ravni i $+$ sabiranje vektora. Jedan izomorfizam je $f(z) = \overrightarrow{0z}$.

Posledica

Funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa $f(z) = z + \omega$ u kompleksnoj ravni predstavlja translaciju svih tačaka za vektor ω (tj. za $\overrightarrow{0\omega}$).



Konjugovani kompleksni broj

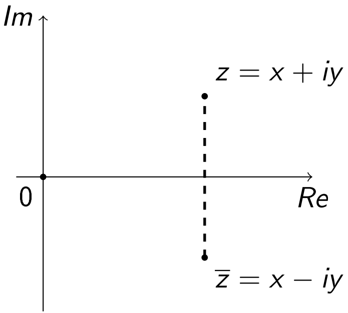
Pošto je $i^2 = -1$ i $i^{-1} = -i$ imamo sledeće tvrđenje.

Lema

Za $k \in \mathbb{Z}$ važi $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

Definicija (Konjugovani kompleksni broj)

Neka je kompleksni broj $z = x + iy$. Tada je njemu konjugovani kompleksni broj $\overline{z} = x - iy$.



Napomena

Geometrijska interpretacija funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisane $f(z) = \overline{z}$ je osna simetrija u odnosu na Re-osu.

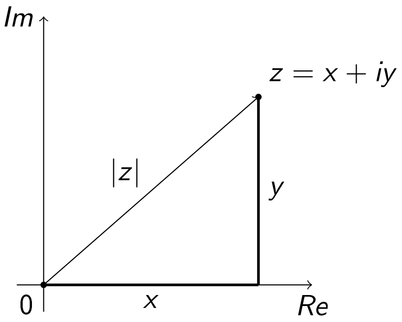
Modul (ili moduo)

Definicija (Modul)

Modul je funkcija $|\ |:\mathbb{C}\to[0,\infty)$, *definisana sa* $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, *za* $z=x+iy$. *Vrednost* $|z|$ *zove se modul kompleksnog broja* z.

Napomena

U geometrijkoj interpretaciji vidimo da je $|z|$ *rastojanje tačke* z *od koordinatnog početka (sledi iz Pitagorine teoreme).*



Osobine (1/2)

Teorema

Za $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *važi*

(a) $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = Re(z)$

(b) $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = Im(z)$

(c) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(d) $Re(z_1 \pm z_2) = Re(z_1) \pm Re(z_2)$

(e) $Im(z_1 \pm z_2) = Im(z_1) \pm Im(z_2)$

(f) $z \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \overline{z} = z$

(g) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(h) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, *za* $z_2 \neq 0$

(i) $0, z_1, z_1 + z_2, z_2$ *čine temena paralelograma.*

Dokaz

Direktna posledica definicija. Recimo, za $z = x + iy$*, pod* (b) *sledi iz*
$\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{1}{2i}(2iy) = y = Im(z)$.

Osobine (2/2)

Teorema

Neka je $z = x + iy$. *Tada važi*

$(a)\ \ z\overline{z} = |z|^2 \qquad (b)\ \ z \neq 0 \ \Rightarrow\ z^{-1} = |z|^{-2}\overline{z} \qquad (c)\ \ |z| = 1 \ \Rightarrow\ z^{-1} = \overline{z}$

Dokaz

(a) $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(-xy + yx) = x^2 + y^2 = |z|^2$

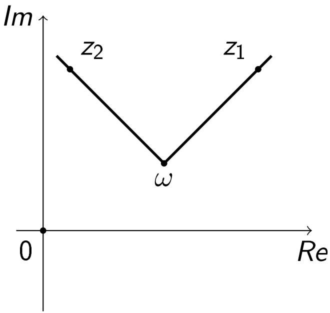
(b) $z \cdot |z|^{-2}\overline{z} = \dfrac{z \cdot \overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{|z|^2}{|z|^2} = 1 \ \Rightarrow\ |z|^{-2}\overline{z} = z^{-1}$

(c) *Iz rezultata pod* (b), *za* $|z| = 1$, *sledi* $z^{-1} = \overline{z}$

Argument kompleksnog broja

(Konveksni) orijentisani ugao u kompleksnoj ravni

- **Ugao** je deo ravni određen dvema polupravama (kracima) sa zajedničkom početnom tačkom (temenom).
- Za svake dve poluprave sa zajedničkim temenom imamo dva ugla, od kojih je bar jedan **konveksni** (oštar, prav, tup ili opružen). **Kada kažemo ugao mislimo na konveksni, i to na njegovu mernu vrednost**.
- Ugao je **orijentisan** ako se zna koja poluprava je prva, a koja druga.
- Ugao je **pozitivno orijentisan** ako rotiranje prvog kraka po (konveksnoj) oblasti ugla do drugog kraka jeste u pozitivnom smeru (suprotan od kazaljke na satu), inače je **negativno orijentisan**.
- Merni broj ugla ćemo uzimati iz skupa $(-\pi, \pi]$, tj. $[0, \pi]$ za pozitivno, a $(-\pi, 0)$ za negativno orijentisane.

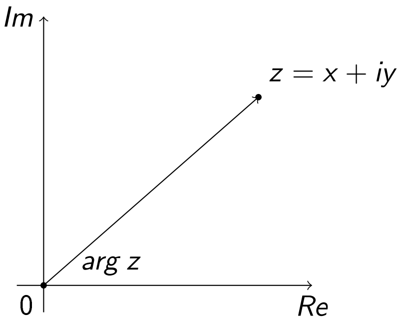


$\sphericalangle z_1\omega z_2 = \frac{\pi}{4}$ je pozitivno orijentisan, a $\sphericalangle z_2\omega z_1 = -\frac{\pi}{4}$ negativno orijentisan.

Argument kompleksnog broja

Definicija (Argument kompleksnog broja)

Agrument kompleksnog broja z*, u oznaci* $\arg z$*, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava* $0z$.



Napomena

Poluprava 00 *nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja* 0 *nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).*

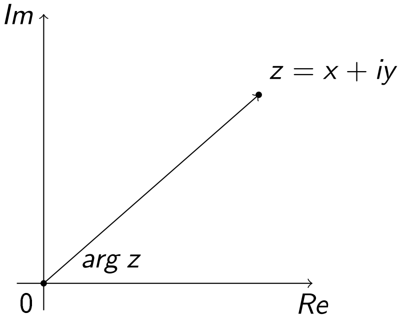
Primer

$arg(0) =$, $arg(2) =$, $arg(-3) =$, $arg(1+i) =$, $arg(-1-i\sqrt{3}) =$.

Argument kompleksnog broja

Definicija (Argument kompleksnog broja)

Agrument kompleksnog broja z, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je polupravа $0z$.



Napomena

Poluprava 00 nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja 0 nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).

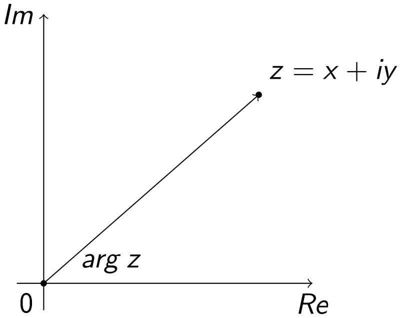
Primer

$arg(0) =$ nije def., $arg(2) =\quad$, $arg(-3) =\quad$, $arg(1+i) =\quad$, $arg(-1-i\sqrt{3}) =\quad$.

Argument kompleksnog broja

Definicija (Argument kompleksnog broja)

Agrument kompleksnog broja z, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je polupravа $0z$.



Napomena

Poluprava 00 nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja 0 nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).

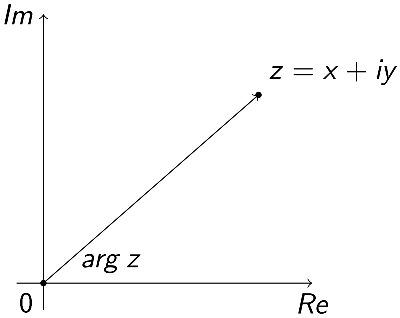
Primer

$arg(0) =$ *nije def.*, $arg(2) = 0$, $arg(-3) =\quad$, $arg(1+i) =\quad$, $arg(-1-i\sqrt{3}) =\qquad$.

Argument kompleksnog broja

Definicija (Argument kompleksnog broja)

Agrument kompleksnog broja z, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.



Napomena

Poluprava 00 nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja 0 nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).

Primer

$arg(0) =$ nije def., $arg(2) = 0$, $arg(-3) = \pi$, $arg(1+i) =$, $arg(-1-i\sqrt{3}) =$.

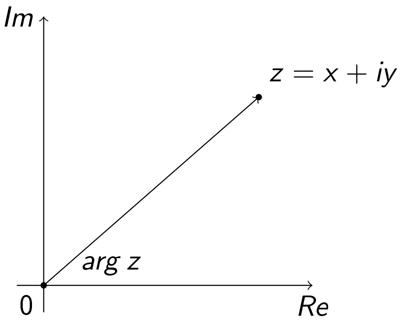
Argument kompleksnog broja

Definicija (Argument kompleksnog broja)

Agrument kompleksnog broja z, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.

Napomena

Poluprava 00 nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja 0 nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).



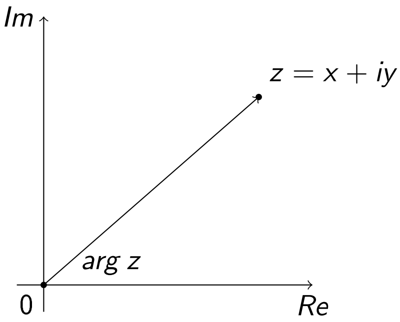
Primer

$\arg(0) =$ nije def., $\arg(2) = 0$, $\arg(-3) = \pi$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, $\arg(-1-i\sqrt{3}) =$.

Argument kompleksnog broja

Definicija (Argument kompleksnog broja)

Agrument kompleksnog broja z, u oznaci $\arg z$, merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo Re ose, a drugi krak je poluprava $0z$.



Napomena

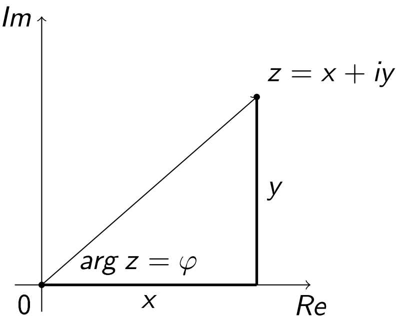
Poluprava 00 nije definisana, pa ni argument kompleksnog broja 0 nije definisan (tj. mi ga nećemo definisati).

Primer

$arg(0) =$ *nije def.*, $arg(2) = 0$, $arg(-3) = \pi$, $arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, $arg(-1-i\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}$.

Računanje agrumenta

Neka je $\arg(z) = \varphi$. Iz definicije i pravouglog trougla desno vidimo da je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. Odatle imamo $arg\ z = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, mada je ovo tačno samo ako je $x > 0$. Generalno, imamo sledeće tvrđenje.



Teorema

Neka je $z = x + iy$. Argument je funkcija $arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \xrightarrow{na} (-\pi, \pi]$ za koju važi

$$arg\ z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Osobine

Teorema

1. $\{z \mid arg\, z > 0\} = \{z \mid Im(z) > 0\} \cup \mathbb{R}^-$
2. $\{z \mid arg\, z \geq 0\} = \{z \mid Im(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$
3. $\{z \mid -\frac{\pi}{2} < arg\, z < \frac{\pi}{2}\} = \{z \mid Re(z) > 0\}$
4. $\{z \mid -\frac{\pi}{2} \leq arg\, z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z \mid Re(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$
5. $\{z \mid -\frac{\pi}{2} < arg\, z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z \mid Re(z) > 0\} \cup \{xi \mid x > 0\}$
6. $\{z \mid -\frac{\pi}{2} \leq arg\, z < \frac{\pi}{2}\} = \{z \mid Re(z) > 0\} \cup \{xi \mid x < 0\}$

Dokaz

Uputstvo: Nacrtati skupove u kompleksnoj ravni.

Primeri

Za svaki komleksni broj z tačno je

(a) $arg\, z > 0 \;\Leftrightarrow\; Im(z) > 0$

(b) $arg\, z > 0 \;\Rightarrow\; Im(z) > 0$

(c) $arg\, z > 0 \;\Rightarrow\; Im(z) \in \mathbb{R}$

(d) $arg\, z \geq 0 \;\Leftrightarrow\; Im(z) \geq 0$

(e) $arg\, z \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \big(Im(z) \geq 0 \wedge z \neq 0\big)$

Rešenje. Nacrtati skupove u kompleksnoj ravni.

Primeri

Za svaki komleksni broj z tačno je

(a) $arg\, z > 0 \;\Leftrightarrow\; Im(z) > 0$

(b) $arg\, z > 0 \;\Rightarrow\; Im(z) > 0$

(c) $arg\, z > 0 \;\Rightarrow\; Im(z) \in \mathbb{R}$

(d) $arg\, z \geq 0 \;\Leftrightarrow\; Im(z) \geq 0$

(e) $arg\, z \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \big(Im(z) \geq 0 \land z \neq 0\big)$

Rešenje. Nacrtati skupove u kompleksnoj ravni.

Homotetija

Definicija (Homotetija)

Funkcija koja proizvoljnu tačku iz ravni A preslikava u tačku A′ tako da je $\overrightarrow{0A} = k \cdot \overrightarrow{0A'}$ *zove se homotetija sa centrom u 0 i koeficijentom* $k \in \mathbb{R}$*, i obeležava* $H_{0,k}$.

Teorema

Za $z_1 \neq w, z_2 \neq w, z_1 \neq 0$ *i* $z_2 \neq 0$ *važi:*

1. $arg\, z_1 = arg\, z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+)\, \overrightarrow{0z_1} = k \cdot \overrightarrow{0z_2}$
2. $arg(z_1 - w) = arg(z_2 - w) \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+)\, \overrightarrow{wz_1} = k \cdot \overrightarrow{wz_2}$
3. **Množenjem kompleksnog broja realnim pozitivnim brojem argument se ne menja.**
4. **Kompleksni brojevi koji pripadaju istoj polupravoj koja ishodi iz koordinatnog početka imaju jednake argumente.**
5. *Množenje kompleksnog broja z realnim brojem k je homotetija* $H_{0,k}$.

Šta smo danas radili

- Algebrski oblik
- Kompleksna ravan
- Modul
- Argument