# Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 11

# Na prethodnom času

- Algebarski oblik kompleksnog broja
- Kompleksna ravan
- Modul kompleksnog broja
- Argument kompleksnog broja

# Trigonometrijski i eksponencijalni oblik

# Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

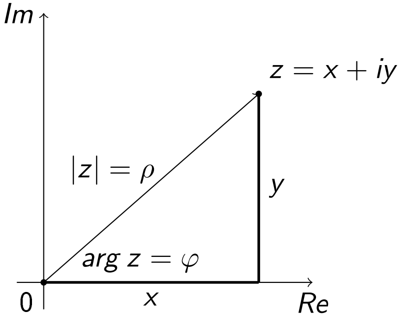
Neka je $z = x + iy$. Iz pravouglog trougla na slici desno i definicije trigonometrijskih funkcija imamo

$$\sin\varphi = \frac{y}{\rho} \quad \text{i} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho}$$

odakle sledi

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Ovo je tačno za sve kompleksne brojeve različite on nule (ne samo za one iz prvog kvadranta).




## Teorema

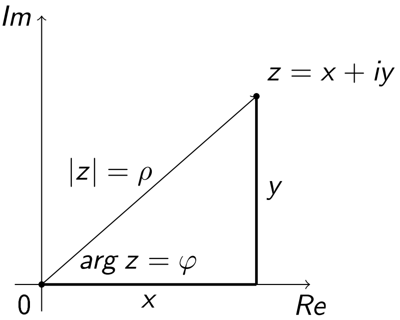
*Neka je* $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *modul kompleksnog broja* $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, *a* $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi]$ *njegov argument. Tada važi* $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *i ovaj oblik zapisa se zove* **trigonometrijski oblik kompleksnog broja**.

# Eksponencijalni oblik i jednakost kompleksnih brojeva

**Moavrova formula**: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$
Kasnije je Leonard Ojler dokazao zabavniju jednakost (koristeći stepene redove - tek na Matematičkoj analizi 2). **Ojlerova formula**: $\cos x + i \sin x = e^{ix}$

## Definicija

*Za kompleksni broj* $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ *važi* $z = \rho e^{i\varphi}$*, i ovaj oblik zapisa zove se* **eksponencijalni oblik kompleksnog broja**.




## Teorema

*Za nenula kompleksne brojeve* $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ *i* $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ *date u eksponencijalnom obliku važi*

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\rho_1 = \rho_2 \ \wedge \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$
2. $5 =$
3. $-1 =$
4. $i =$
5. $-4i =$
6. $-1 - i =$
7. $-\pi =$
8. $ie =$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$nije def.
2. $5 =$
3. $-1 =$
4. $i =$
5. $-4i =$
6. $-1 - i =$
7. $-\pi =$
8. $ie =$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$nije def.
2. $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{i \cdot 0}$
3. $-1 =$
4. $i =$
5. $-4i =$
6. $-1 - i =$
7. $-\pi =$
8. $ie =$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$nije def.
2. $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{i \cdot 0}$
3. $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = e^{i\pi}$ (Ojlerova formula)
4. $i =$
5. $-4i =$
6. $-1 - i =$
7. $-\pi =$
8. $ie =$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$nije def.
2. $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{i\cdot 0}$
3. $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{i\pi}$ (Ojlerova formula)
4. $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}}$
5. $-4i =$
6. $-1 - i =$
7. $-\pi =$
8. $ie =$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$nije def.
2. $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{i \cdot 0}$
3. $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = e^{i\pi}$ (Ojlerova formula)
4. $i = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}}$
5. $-4i = 4(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}) = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$
6. $-1 - i =$
7. $-\pi =$
8. $ie =$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$nije def.
2. $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{i \cdot 0}$
3. $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = e^{i\pi}$ (Ojlerova formula)
4. $i = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}}$
5. $-4i = 4(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}) = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$
6. $-1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
7. $-\pi =$
8. $ie =$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$nije def.
2. $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{i\cdot 0}$
3. $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{i\pi}$ (Ojlerova formula)
4. $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}}$
5. $-4i = 4(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}) = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$
6. $-1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
7. $-\pi = \pi(\cos\pi + i\sin\pi) = \pi e^{i\pi}$
8. $ie =$

# Primeri

Kompleksne brojeve prebaci u trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

1. $0 =$nije def.
2. $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{i\cdot 0}$
3. $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = e^{i\pi}$ (Ojlerova formula)
4. $i = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}}$
5. $-4i = 4(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}) = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$
6. $-1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
7. $-\pi = \pi(\cos \pi + i \sin \pi) = \pi e^{i\pi}$
8. $ie = e(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = e \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

# Množenje i deljenje u eksponencijalnom obilku

## Teorema

*Za* $x, y \in \mathbb{R}$ *važi* $(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$.

## Dokaz

*Direktna posledica definicije množenja kompleksnih brojeva i adicionih formula.*

## Posledica

*Ako je* $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ *i* $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ *tada važi*

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z_1^n = \rho_1^n\big(\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1)\big) = \rho_1^n e^{in\varphi_1}$$

# Modul i argument kod množenja

Iz prethodne posledice sledi da je $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Pošto smo definisali da za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ važi $arg(z) \in (-\pi, \pi]$, imamo da je

$$arg\,(z_1 z_2) = \begin{cases} arg\ z_1 + arg\ z_2, & arg\ z_1 + arg\ z_2 \in (-\pi, \pi] \\ arg\ z_1 + arg\ z_2 + 2\pi, & arg\ z_1 + arg\ z_2 \leq -\pi \\ arg\ z_1 + arg\ z_2 - 2\pi, & arg\ z_1 + arg\ z_2 > \pi \end{cases}$$

## Primer

1. $(1+i)(1+i\sqrt{3}) =$
2. $(-1+i)(-1+i\sqrt{3}) =$
3. $(-i)(-i) =$

# Modul i argument kod množenja

Iz prethodne posledice sledi da je $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Pošto smo definisali da za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ važi $arg(z) \in (-\pi, \pi]$, imamo da je

$$arg\,(z_1 z_2) = \begin{cases} arg\,z_1 + arg\,z_2, & arg\,z_1 + arg\,z_2 \in (-\pi, \pi] \\ arg\,z_1 + arg\,z_2 + 2\pi, & arg\,z_1 + arg\,z_2 \leq -\pi \\ arg\,z_1 + arg\,z_2 - 2\pi, & arg\,z_1 + arg\,z_2 > \pi \end{cases}$$

## Primer

1. $(1+i)(1+i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi+4\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
2. $(-1+i)(-1+i\sqrt{3}) =$
3. $(-i)(-i) =$

# Modul i argument kod množenja

Iz prethodne posledice sledi da je $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Pošto smo definisali da za $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ važi $arg(z) \in (-\pi, \pi]$, imamo da je

$$arg\,(z_1 z_2) = \begin{cases} arg\ z_1 + arg\ z_2, & arg\ z_1 + arg\ z_2 \in (-\pi, \pi] \\ arg\ z_1 + arg\ z_2 + 2\pi, & arg\ z_1 + arg\ z_2 \leq -\pi \\ arg\ z_1 + arg\ z_2 - 2\pi, & arg\ z_1 + arg\ z_2 > \pi \end{cases}$$

## Primer

1. $(1+i)(1+i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi+4\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
2. $(-1+i)(-1+i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi+8\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}} =$
   $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{17\pi}{12}-2\pi\right)} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$
3. $(-i)(-i) =$

# Modul i argument kod množenja

Iz prethodne posledice sledi da je $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Pošto smo definisali da za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ važi $arg(z) \in (-\pi, \pi]$, imamo da je

$$arg\,(z_1 z_2) = \begin{cases} arg\, z_1 + arg\, z_2, & arg\, z_1 + arg\, z_2 \in (-\pi, \pi] \\ arg\, z_1 + arg\, z_2 + 2\pi, & arg\, z_1 + arg\, z_2 \leq -\pi \\ arg\, z_1 + arg\, z_2 - 2\pi, & arg\, z_1 + arg\, z_2 > \pi \end{cases}$$

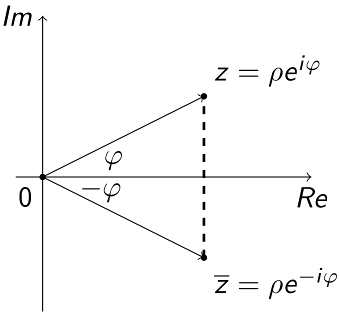
## Primer

1. $(1+i)(1+i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi+4\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
2. $(-1+i)(-1+i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi+8\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{17\pi}{12}-2\pi\right)} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$
3. $(-i)(-i) = e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\pi} = e^{i(-\pi+2\pi)} = e^{i\pi}$

# Inverzni i konjugovani u eksponencijalnom obliku

**Inverzni:** Za $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, imamo da je $z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$

**Konjugovani:** Za $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, imamo da je $\overline{z} = \rho e^{-i\varphi}$




## Napomena

*Geometrijska interpretacija funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisane $f(z) = \overline{z}$ je osna simetrija u odnosu na Re-osu.*

## Primer

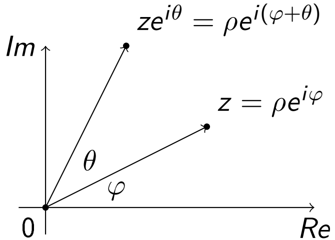
1. *Za $z \in \mathbb{C}\backslash\left(\mathbb{R}^- \cup \{0\}\right)$ važi $\arg z^{-1} = -\arg z$.*
2. *Za $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ važi $\arg z^{-1} = \arg z$.*
3. *Za $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ važi $\arg z^{-1} = \arg \overline{z}$.*

# Rotacije u kompleksnoj ravni

# Rotacija oko koordinatnog početka

## Teorema

*Geometrijska interpretacija množenja kompleksnog broja* $z = \rho e^{i\varphi}$ *kompleksnim brojem* $e^{i\theta}$ *jeste rotacija* $z$ *oko* 0 *za ugao* $\theta$.




## Primer

*Rotacija oko* 0 *za proizvoljan ugao* $\theta$ *daje*
$f(x+iy) = (x+iy)e^{i\theta} = (x+iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$.

**Posledica:**
Rotacija za $\theta$ oko $(0,0)$ u $\mathbb{R}^2$ data je sa $f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$.
Na primer, rotacija u $\mathbb{R}^2$ oko koordinatnog početka:

- za ugao $\pi$ je funkcija $f_1(x,y) = (-x,-y)$;
- za ugao $\frac{\pi}{2}$ je funkcija $f_2(x,y) = (-y,x)$.

# Osne simetrije ako osa prolazi kroz koordinatni početak

Već smo utvrdili da je $f(z) = \bar{z}$ osna simetrija u odnosu na realnu osu.

## Zadatak

*Dokazati da funkcija $f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gde je $\theta \in (-\pi, \pi]$ definisana sa $f_\theta(0) = 0$ i $f_\theta(z) = \bar{z}e^{i\theta}$, za $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, određuje osnu simetriju u odnosu na osu koja prolazi kroz 0 i čija jedna poluosa sa pozitivnim delom realne ose gradi ugao od $\frac{\theta}{2}$.*

*Rešenje.* Kompozicija: (1) rotacije oko 0 za ugao $-\frac{\theta}{2}$, (2) osne simetrije $g(z) = \bar{z}$ i (3) rotacije oko 0 za ugao $\frac{\theta}{2}$ jeste osna simetrija čija osa gradi ugao $\frac{\theta}{2}$ sa realnom osom.

Odatle imamo da $\overline{ze^{i\frac{-\theta}{2}}}e^{i\frac{\theta}{2}} = \bar{z}e^{i\theta}$ jeste data funkcija.

**Posledica:** Kako je

$f_\theta(x+iy) = (x-iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta + i(x\sin\theta - y\cos\theta)$, osna simetrija u $\mathbb{R}^2$ oko ose koja prolazi kroz koordinatni početak i sa realnom osom gradi:

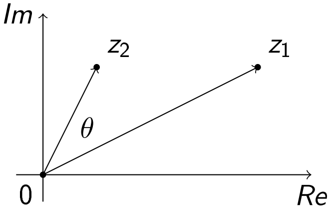
- ugao $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ (tj. oko prave $y = x$) je funkcija $f_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (y, x)$;
- ugao $\frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{4}$ (tj. oko prave $y = -x$) je funkcija $f_{-\frac{\pi}{2}}(x, y) = (-y, -x)$.

# Računanje ugla $\sphericalangle z_1 0 z_2$

## Teorema

*Za konveksni orijentisani ugao $\sphericalangle z_1 0 z_2$ važi*

$$\sphericalangle z_1 0 z_2 = arg\,\frac{z_2}{z_1}$$




## Dokaz

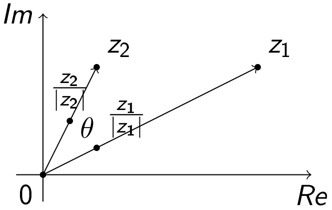
*Neka je* $\theta = \sphericalangle z_1 0 z_2 \in (-\pi, \pi]$. *Generalno, imamo* $|z_1| \neq |z_2|$,

# Računanje ugla $\sphericalangle z_1 0 z_2$

## Teorema

*Za konveksni orijentisani ugao $\sphericalangle z_1 0 z_2$ važi*

$$\sphericalangle z_1 0 z_2 = arg\,\frac{z_2}{z_1}$$




## Dokaz

*Neka je $\theta = \sphericalangle z_1 0 z_2 \in (-\pi, \pi]$. Generalno, imamo $|z_1| \neq |z_2|$, ali ako ih skaliramo i posmatramo $\frac{z_1}{|z_1|}$ i $\frac{z_2}{|z_2|}$, onda je $\left|\frac{z_1}{|z_1|}\right| = \left|\frac{z_2}{|z_2|}\right| = 1$ i $arg\,z_1 = arg\,\frac{z_1}{|z_1|}$ i $arg\,z_2 = arg\,\frac{z_2}{|z_2|}$. Sada imamo da se $\frac{z_2}{|z_2|}$ dobija rotacijom $\frac{z_1}{|z_1|}$ za ugao $\theta$ oko 0, odakle sledi*

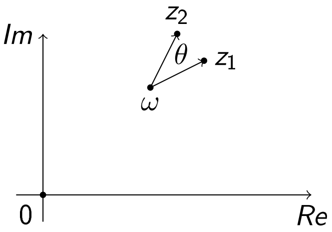
$$\frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_1}{|z_1|}e^{i\theta} \quad\Leftrightarrow\quad e^{i\theta} = \frac{z_2}{z_1}\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad\Rightarrow\quad arg\,e^{i\theta} = arg\,\frac{z_2}{z_1}\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = arg\,\frac{z_2}{z_1}$$

# Rotacija oko proizvoljnog kompleksnog broja

## Teorema

*Za kompleksni broj $z_2$ koji se dobija rotacijom $z_1$ oko $\omega$ za konveksni orijentisani ugao $\theta$ važi*

$$z_2 = \omega + (z_1 - \omega)e^{i\theta}$$



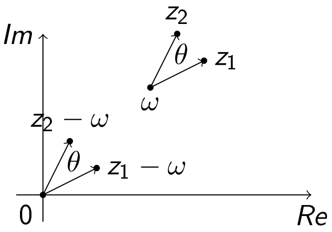

## Dokaz

# Rotacija oko proizvoljnog kompleksnog broja

## Teorema

*Za kompleksni broj $z_2$ koji se dobija rotacijom $z_1$ oko $\omega$ za konveksni orijentisani ugao $\theta$ važi*

$$z_2 = \omega + (z_1 - \omega)e^{i\theta}$$

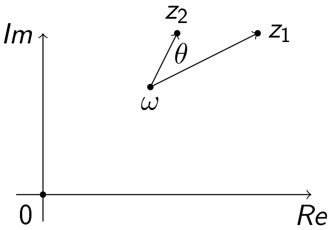



## Dokaz

*Ako transliramo tačke $z_1, \omega, z_2$ za vektor $-\omega$ dobijamo da se $z_2 - \omega$ dobija od $z_1 - \omega$ rotacijom za $\theta$ oko koordinatnog početka. Odatle sledi*

$$z_2 - \omega = (z_1 - \omega)e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = \omega + (z_1 - \omega)e^{i\theta}$$

# Računanje ugla $\sphericalangle z_1 \omega z_2$




## Teorema

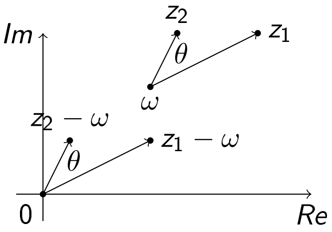
*Za konveksni orijentisani ugao $\sphericalangle z_1 \omega z_2$ važi*

$$\sphericalangle z_1 \omega z_2 = arg\,\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}$$

## Dokaz

*Neka je $\theta = \sphericalangle z_1 \omega z_2 \in (-\pi, \pi]$.*

# Računanje ugla $\sphericalangle z_1 \omega z_2$




## Teorema

*Za konveksni orijentisani ugao $\sphericalangle z_1 \omega z_2$ važi*

$$\sphericalangle z_1 \omega z_2 = \arg \frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}$$

## Dokaz

*Neka je $\theta = \sphericalangle z_1 \omega z_2 \in (-\pi, \pi]$. Prvo tačke $z_1, \omega, z_2$ transliramo za vektor $-\omega$ i dobijamo da je ugao $\theta = \sphericalangle (z_1 - \omega) 0 (z_2 - \omega)$. Generalno, imamo $|z_1 - \omega| \neq |z_2 - \omega|$, ali ako ih skaliramo kao u ranijoj teoremi i posmatramo $\frac{z_1 - \omega}{|z_1 - \omega|}$ i $\frac{z_2 - \omega}{|z_2 - \omega|}$, onda je $\left|\frac{z_1 - \omega}{|z_1 - \omega|}\right| = \left|\frac{z_2 - \omega}{|z_2 - \omega|}\right| = 1$ i $\arg(z_1 - \omega) = \arg \frac{z_1 - \omega}{|z_1 - \omega|}$ i $\arg(z_2 - \omega) = \arg \frac{z_2 - \omega}{|z_2 - \omega|}$. Sada imamo da se $\frac{z_2 - \omega}{|z_2 - \omega|}$ dobija rotacijom $\frac{z_1 - \omega}{|z_1 - \omega|}$ za ugao $\theta$ oko 0, odakle sledi*

$$\frac{z_2 - \omega}{|z_2 - \omega|} = \frac{z_1 - \omega}{|z_1 - \omega|} e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\theta} = \frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega} \frac{|z_1 - \omega|}{|z_2 - \omega|} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arg \frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}$$

# Kompleksni koreni

# Kompleksni $n$-ti koren

## Primer

1. *Skup rešenja jednačine* $z^4 = 1$ *je:* .
2. *Skup rešenja jednačine* $z^3 = 1$ *je:* .

# Kompleksni $n$-ti koren

## Primer

1. *Skup rešenja jednačine* $z^4 = 1$ *je:* $\{1, i, -1, -i\}$.
2. *Skup rešenja jednačine* $z^3 = 1$ *je:* .

# Kompleksni $n$-ti koren

## Primer

1. *Skup rešenja jednačine* $z^4 = 1$ *je:* $\{1, i, -1, -i\}$.
2. *Skup rešenja jednačine* $z^3 = 1$ *je:* $\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$.

# Kompleksni $n$-ti koren

## Primer

1. *Skup rešenja jednačine* $z^4 = 1$ *je:* $\{1, i, -1, -i\}$.
2. *Skup rešenja jednačine* $z^3 = 1$ *je:* $\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$.

## Teorema

*Kompleksna jednačina* $z^n = \omega = \rho e^{i\varphi}$ *ima* $n$ *različitih rešenja za sve prirodne brojeve* $n \geq 2$ *i* $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Rešenja su*

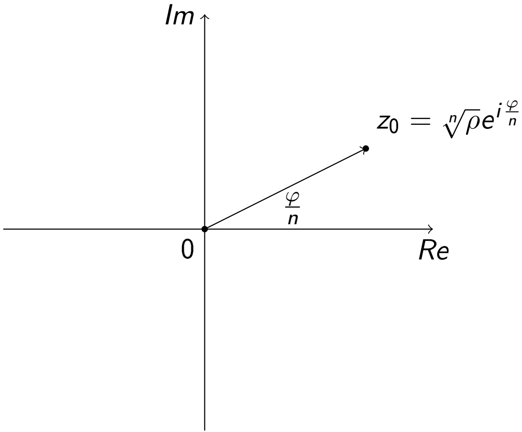
$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \text{ za } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

*pri čemu je* $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}^+$ *(tj.* $\sqrt[n]{\rho}$ *je realan koren).*

# Pre dokaza teoreme: geometrijska interpretacija

Prethodna teorema tvrdi da jednačina $z^n = \omega = \rho e^{i\varphi}$ ima rešenja $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, za $k = 0, 1, \dots, n-1$. Primetimo sledeće:

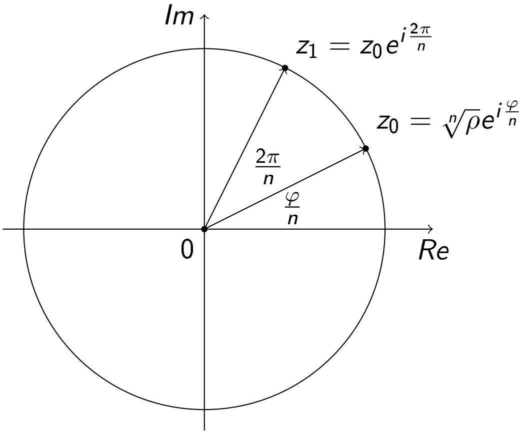
- za $k = 0$ dobijamo $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}}$



## Pre dokaza teoreme: geometrijska interpretacija

Prethodna teorema tvrdi da jednačina $z^n = \omega = \rho e^{i\varphi}$ ima rešenja $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, za $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Primetimo sledeće:

- za $k = 0$ dobijamo $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}}$
- za $k = 1$ dobijamo
  $z_1 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}$
- isto tako dobijamo $z_k = z_{k-1} e^{i\frac{2\pi}{n}}$, za $k = 1, \ldots, n-1$
- Primeti: $z_k$ se dobija rotacijom $z_{k-1}$ za $n$-ti deo punog ugla (delimo krug na $n$ jednakih delova)
- **Dakle: tačke $z_0, \ldots, z_{n-1}$ u kompleksnoj ravni jesu temena pravilnog $n$-tougla čiji je centar u 0, a poluprečnik $\sqrt[n]{\rho}$.**



# Dokaz teoreme

Ako je $z = re^{i\psi}$, na osnovu osobine stepenovanja kompleksnih brojeva jednačina $z^n = \omega = \rho e^{i\varphi}$ postaje $r^n e^{in\psi} = \rho e^{i\varphi}$. Ovi kompleksni brojevi su jednaki akko $r^n = \rho$ i $n\psi = \varphi + 2k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. Odatle je skup rešenja jednačine

$$\{z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Preostaje samo da pokažemo da u ovom skupu ima tačno $n$ različitih brojeva.

- **Bar $n$ rešenja:** Na prethodnom slajdu smo pokazali da za $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ dobijamo različite kompleksne brojeve $z_k$ (koji obrazuju temena pravilnog $n$-tougla).
- **Ne više od $n$ rešenja:** Kod polinoma ćemo raditi teoremu: polinom $n$-tog stepena ima najviše $n$ korena. Dakle, $z^n - \omega = 0$ ne može imati više od $n$ rešenja.

# Šta smo danas radili

- Trigonometrijski oblik
- Eksponencijalni oblik
- Rotacije u kompleksnoj ravni
- Kompleksni koreni