Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 18

Na prethodnom času

- Determinante reda 2 i 3 iz srednje škole
- Definicija determinante
- Izračunavanje determinante svođenjem na trougaoni oblik
- Kvadratni sistemi linearnih jednačina i njihove determinante
- Izračunavanje determinante razvojem to vrsti ili koloni

Slobodni vektori

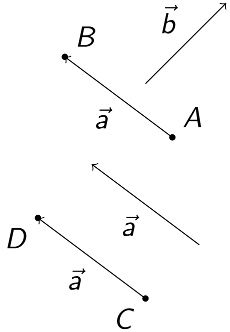
Slobodni vektori

Napomena

Vektorske veličine su određene sa više parametara, a skalarne veličine samo jednom. (Slobodni) vektori su određeni sa tri veličine - intezitet, pravac i smer.

Definicija

(Slobodni) vektor je skup svih orijentisanih duži (iz Euklidskog prostora) koje su međusobno podudarne, paralelne i isto orijentisane.



Definicija

U skupu $\mathbb{E}^2$ parova tačaka Euklidskog prostora $\mathbb{E}$ relacija ρ je data sa $(A, A)\rho(B, B)$ i $(A, B)\rho(C, D)$ akko je duž AB podudarna, paralelna i isto orijentisana kao CD. Relacija ρ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{E}$, a slobodan vektor je klasa ekvivalencije.

Primer

Desno imamo vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Intezitet, pravac i smer slobodnog vektora

Definicija

Za slobodni vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \in V$

- **intezitet**, *u oznaci* $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = a$, *je dužina duži* AB;
- **pravac** *je određen pravom (i svim njoj paralelnih pravih) na kojoj leže tačke* A *i* B;
- **smer** *(na pravcu vektora) je od tačke* A *do tačke* B.

Ako je $A = B$, *tada* **nula vektor** $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = 0$ *ima intezitet* 0 *i neodređen pravac i smer.*
Za nula vektor se uzima da je normalan i paralelan sa svakim drugim vektorom.

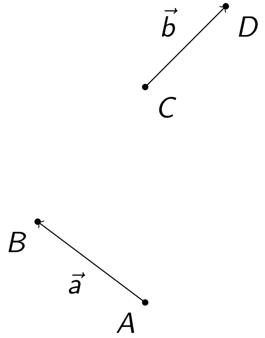
Teorema

Svaki slobodan vektor $\vec{a} \in V$ *jednoznačno je određen pravcem, smerom i intezitetom.*

Sabiranje vektora

Definicija

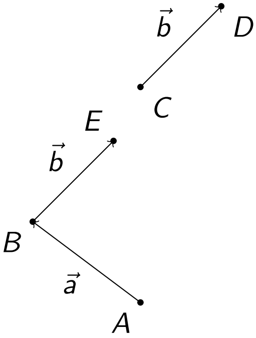
Zbir vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *i vektora* $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ *je vektor* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AE}$, *gde je tačka* E *određena sa* $\vec{b} = \overrightarrow{BE}$.



Sabiranje vektora

Definicija

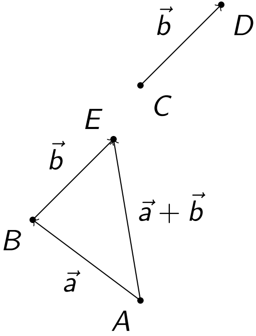
Zbir vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *i vektora* $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ *je vektor* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AE}$, *gde je tačka* E *određena sa* $\vec{b} = \overrightarrow{BE}$.



Sabiranje vektora

Definicija

Zbir vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *i vektora* $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ *je vektor* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AE}$, *gde je tačka* E *određena sa* $\vec{b} = \overrightarrow{BE}$.



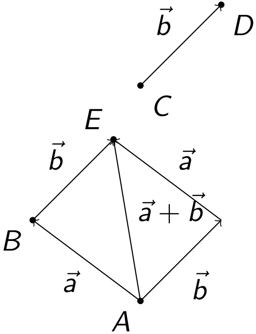
Sabiranje vektora

Definicija

Zbir vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *i vektora* $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ *je vektor* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AE}$, *gde je tačka* E *određena sa* $\vec{b} = \overrightarrow{BE}$.

Napomena

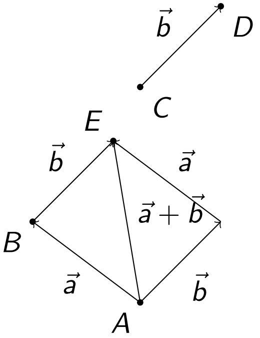
Zbir vektora $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *se može defnisati i kao dijagonala paralelograma konstruisanog nad* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.



Sabiranje vektora

Definicija

Zbir vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *i vektora* $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ *je vektor* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AE}$, *gde je tačka* E *određena sa* $\vec{b} = \overrightarrow{BE}$.



Napomena

Zbir vektora $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *se može defnisati i kao dijagonala paralelograma konstruisanog nad* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

Teorema

Neka je V *skup svih slobodnih vektora. Tada je* $(V, +)$ *Abelova grupa.*

Dokaz

Na osnovu definicije vektora i zbira vektora zatvorenost važi. Ako je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ *i* $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ *tada je* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ *i* $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, *pa asocijativnost važi. Slično se pokazuje komutativnost. Neutralni element je* **nula vektor** $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, *a inverzni za* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *je* **njemu suprotni vektor** $-\vec{a} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

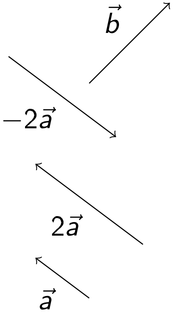
Množenje vektora i skalara

Definicija

Proizvod vektora $\vec{a}$ i skalara α je operacija $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, gde je $\alpha \cdot \vec{a}$ vektor čiji je

- *Intezitet:* $|\alpha \cdot \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;
- *Pravac: isti kao i pravac vektora* $\vec{a}$;
- *Smer: ako je* $\alpha > 0$ *isti kao smer vektora* $\vec{a}$, *ako je* $\alpha < 0$ *suprotan od smera vektora* $\vec{a}$.

Ako je $\alpha = 0$ *ili* $\vec{a} = 0$ *tada je* $\alpha \cdot \vec{a} = 0$.



Definicija (Jedinični vektor - Ort)

Za svaki nenula vektor $\vec{a}$ jedinični vektor njegovog pravca $\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ zove se jedinični vektor ili ort.

Osobine množenja vektora i skalara

Teorema

Za sve skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V$ imamo

1. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$,
2. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
3. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
4. $1\vec{a} = \vec{a}$,
5. $\alpha\vec{a} = 0 \ \Leftrightarrow\ (\alpha = 0 \wedge \vec{a} = 0)$.

Dokaz

Direktna posledica definicija, sem drugog tvrđenja koje se može pokazati koriteći sličnost trouglova. Npr. pod 1, imamo da su $\alpha(\beta\vec{a})$ i $(\alpha\beta)\vec{a}$ vektori istog pravca (pravac vektora $\vec{a}$) i smera (koji zavisi od $\alpha\beta > 0$), a za intezitete važi
$|\alpha(\beta\vec{a})| = |\alpha| \cdot |\beta\vec{a}| = |\alpha|(|\beta| \cdot |\vec{a}|) = (|\alpha| \cdot |\beta|)|\vec{a}| = |(\alpha\beta)\vec{a}|$.

Linearna zavisnost i generatornost

Definicija (Linearna zavisnost)

- **U ravni:** *Dva vektora su linearno zavisna akko su kolinearni (paralelni, tj. istog pravca). Nula vektor i bilo koji drugi vektor su uvek kolinearni.*
- **U prostoru:** *Tri vektora su linearno zavisna akko su komplanarni (paralelni istoj ravni). Nula vektor je komplanaran sa svakim skupom komplanarnih vektora.*

Teorema

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nenula linearno zavisni vektori tada se svaki od njih može predstaviti kao proizvod nekog skalara i onog drugog vektora.

Definicija (Linearna kombinacija. Generatornost)

- **U ravni:** *Ako je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, za neke vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i skalare α i β, tada kažemo da je $\vec{c}$ linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kažemo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ generišu skup vektora koji se mogu dobiti njihovim linearnim kombinacijama.*
- **U prostoru:** *Analogno - samo koristimo tri vektora.*

Linearna nezavisnost

Teorema

1. **U ravni:** *Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni tada:*
   $(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0 \;\Rightarrow\; \alpha=\beta=0)$;
2. **U prostoru:** *Ako su $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ nekomplanarni tada:*
   $(\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0 \;\Rightarrow\; \alpha=\beta=\gamma=0)$;

Dokaz

1. *Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni. Pretpostavimo suprotno tvrđenju teoreme da postoje α i β, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0$ važi. Ako je $\alpha\neq 0$, tada dobijamo $\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}$, odakle sledi da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno zavisni, što je u kontradikciji sa uslovom teoreme.*
2. *Ako su $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno nezavisni i $\alpha\neq 0$. Tada iz $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ sledi $\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}-\frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}$, odakle sledi da $\vec{c}$ pripada ravni određenoj vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ - kontradikcija sa pretpostavkom da su vektori nekomplanarni.*

Generatornost

Teorema

1. **Prava:** *Nenula vektor $\vec{a}$ generiše pravu koju određuje. Takođe, za svaki vektor $\vec{x}$ paralelan sa vektorom $\vec{a}$ (tj. pravoj koju on određuje) postoji jedinstven $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{x} = \alpha\vec{a}$.*
2. **U ravni:** *Nekolinearni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ generišu ravan koju određuju. Takođe, za svaki vektor $\vec{x}$ paralelan sa tom ravni postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*
3. **U prostoru:** *Nekomplanarni vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ generišu čitav prostor slobodnih vektora. Takođe, za svaki vektor $\vec{x} \in V$ postoje jedinstveni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.*

Napomena

Svaka tri nekomplanarna vektora su linearno nezavisna i generišu ceo prostor slobodnih vektora. Skup takvih vektora ćemo zvati **baza** *vektorskog prostora.*

Skalarni proizvod. Projekcije

Skalarni proizvod vektora i projekcija na pravac vektora

Definicija (Skalarni proizvod)

Skalarni proizvod vektora je operacija $\cdot : V^2 \to \mathbb{R}$ *koja je za svaka dva vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *definisana sa*

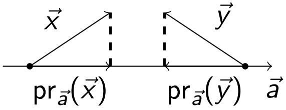
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

gde možemo uzeti da $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$.

Definicija (Projekcija na pravac vektora)

Funkcija koja predstavlja projekciju svih vektora na pravac vektora $\vec{a}$, *tj.* $\mathrm{pr}_{\vec{a}} : V \to \{\alpha \vec{a} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$, *gde je* $\vec{a} \neq 0$, *definisana je sa*

$$\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) = |\vec{x}| \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{a}) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



$\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{x})$ je vektor inteziteta i smera određenih sa $\frac{\vec{a}\vec{x}}{|\vec{a}|}$ i pravca $\vec{a}$

Veza između projekcija i skalarnog proizvoda. Linearnost projekcije

Definicija

Algebarska projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{a}$ je broj $\frac{\vec{x}\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Teorema

Ako je $\vec{q}$ jednični vektor (ort) tada je projekcija na pravac vektora $\vec{q}$ data sa $\mathrm{pr}_{\vec{q}}(\vec{x}) = (\vec{q}\vec{x})\vec{q}$ gde je algebarska projekcija data sa $\vec{q}\vec{x}$, odakle je

$$|\mathrm{pr}_{\vec{q}}(\vec{x})| = \pm\vec{q}\vec{x} = \begin{cases} \vec{q}\vec{x}, & \sphericalangle(\vec{q},\vec{x}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\vec{q}\vec{x}, & \sphericalangle(\vec{q},\vec{x}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Teorema

Neka je $\vec{c} \neq 0$. Tada za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$ važi

$$\mathrm{pr}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{pr}_{\vec{c}}(\vec{a}) + \mathrm{pr}_{\vec{c}}(\vec{b}) \qquad i \qquad \mathrm{pr}_{\vec{c}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathrm{pr}_{\vec{c}}(\vec{a})$$

Napomena

Projekcije na pravac vektora zovu se **projektori**. *Vratićemo se na njih kad budemo radili linearne transformacije.*

Projekcije na ravan

Napomena

Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{n}$, tj. $\mathrm{pr}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \frac{\vec{n}\vec{x}}{|\vec{n}|}\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ *je normalan na* $\vec{x} - \mathrm{pr}_{\vec{n}}(\vec{x})$.

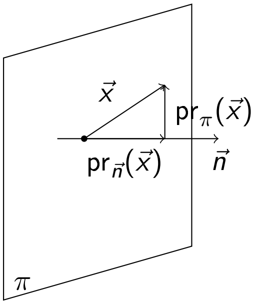
Napomena

Ravan π određena je jednom svojom tačkom i jednim svojim vektorom normale $\vec{n}$.

Definicija (Projekcija na ravan)

Funkcija koja predstavlja projekciju svih vektora na ravan π, tj. $\mathrm{pr}_\pi : V \to V$, *gde je $\pi \perp \vec{n}$, definisana je sa*

$$\mathrm{pr}_\pi(\vec{x}) = \vec{x} - \mathrm{pr}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{n}\vec{x}}{|\vec{n}|}\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$



Teorema

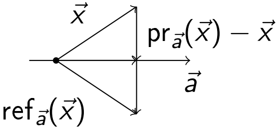
Projekcija na ravan je linearna transformacija: $\mathrm{pr}_\pi(\vec{x}+\vec{y}) = \mathrm{pr}_\pi(\vec{x}) + \mathrm{pr}_\pi(\vec{y})$ *i* $\mathrm{pr}_\pi(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathrm{pr}_\pi(\vec{x})$.

Reflektori

Definicija (Reflektori)

Funkcija koja predstavlja refleksiju svih vektora u odnosu na vektor $\vec{a}$, tj. $\mathrm{ref}_{\vec{a}} : V \to V$, *gde je* $\vec{a} \neq 0$, *definisana je sa*

$$\mathrm{ref}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + 2(\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) - \vec{x}) = 2\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{x}) - \vec{x}$$



Napomena

Reflektori su takođe linearne transfomacije:

$$\mathrm{ref}_{\vec{a}}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathrm{ref}_{\vec{a}}(\vec{x}) + \mathrm{ref}_{\vec{a}}(\vec{y}) \qquad i \qquad \mathrm{ref}_{\vec{a}}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathrm{ref}_{\vec{a}}(\vec{x})$$

Osobine skalarnog proizvoda

Teorema

Za sve vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ i skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ važi

1. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
3. $\vec{a} \perp \vec{b} \ \Leftrightarrow \ \vec{a}\vec{b} = 0$;
4. $\alpha(\vec{a}\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b})$;
5. $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \vec{b} \cdot \mathrm{pr}_{\vec{b}}(\vec{a})$;
6. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

Dokaz

Prvih pet tvrđenja slede direktno po definiciji. Šesti sledi iz

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}) + \mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{c})) = \vec{a} \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}) + \vec{a} \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$$

Šta smo danas radili

- Slobodni vektori
- Sabiranje vektora
- Množenje vektora i skalara
- Linearna kombinacija vektora, linearna nezavisnost, generatornost
- Skalarni proizvod i projekcije