Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 19

Na prethodnom času

- Slobodni vektori
- Sabiranje vektora
- Množenje vektora i skalara
- Linearna kombinacija vektora, linearna nezavisnost, generatornost
- Skalarni proizvod i projekcije

Slobodni vektori - koordinate

Baze vektora i koordinate

Napomena

- *Videli smo da ako su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nekomplanarni vektori tada se svaki $\vec{x} \in V$ može na jedinstven način predstaviti kao njihova linearna kombinacija*

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

  Zapravo, (α, β, γ) su kooridnate vektora $\vec{x}$ u (bazi) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
- *Kako izračunati koordinate? Pomoću projekcija, tj. skalarnog proizvoda.*
- *Mi smo posebno zainteresovani za skupove vektora (baze) koje imaju lepu osobinu* **ortonormiranosti**:
  - *Da su svi vektori jedinični (ortovi) -* **normirani**
  - *Da su svaka dva vektora iz tog skupa međusobno* **ortogonalni**

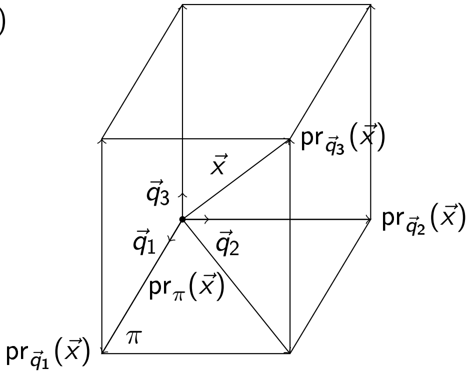
Vektori u koordinatama

Neka su $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ i $\vec{q}_3$ jedinični, međusobno normalni (ortogonalni) vektori i neka je π ravan određena vektorima $\vec{q}_1$ i $\vec{q}_2$. Primetimo da je $\vec{q}_3 \perp \pi$. Neka je $\vec{x} \in V$.

- Iz projekcije $\vec{x}$ na ravan π imamo $\mathrm{pr}_\pi(\vec{x}) = \vec{x} - \mathrm{pr}_{\vec{q}_3}(\vec{x})$, tj.

$$\vec{x} = \mathrm{pr}_\pi(\vec{x}) + \mathrm{pr}_{\vec{q}_3}(\vec{x}) = \mathrm{pr}_{\vec{q}_1}(\vec{x}) + \mathrm{pr}_{\vec{q}_2}(\vec{x}) + \mathrm{pr}_{\vec{q}_3}(\vec{x})$$

- Pošto je $\vec{q}_1$ jedinični to $\mathrm{pr}_{\vec{q}_1}(\vec{x}) = (\vec{q}_1\vec{x})\vec{q}_1$ - algebarska projekcija $\vec{q}_1\vec{x}$ je $\vec{q}_1$ koordinata. Isto važi za projekciju vektora $\vec{x}$ na $\vec{q}_2$ i $\vec{q}_3$.



Teorema

Neka su $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ i $\vec{q}_3$ jedinični međusobno normalni vektori (tj. čine skup ortonormiranih vektora), tada za svaki $\vec{x} \in V$ važi

$$\vec{x} = (\vec{q}_1\vec{x})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2\vec{x})\vec{q}_2 + (\vec{q}_3\vec{x})\vec{q}_3$$

Gram-Šmitov algoritam

Pitanje: Da li se od svaka tri nekomplanarna vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (baze) može dobiti ortonormirana baza $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$?

Odgovor: Gram-Šmitov algoritam. Neka su $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tri nekomplanarna vektora (baza). Ortonormiranu bazu $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$ dobijamo na sledeći način:

1. $\vec{q}_1 = \pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ - tj. $\vec{q}_1$ je ort koji ima pravac $\vec{a}$
2. $\vec{q}_2 = \pm\frac{\vec{b}-\text{pr}_{\vec{q}_1}(\vec{b})}{|\vec{b}-\text{pr}_{\vec{q}_1}(\vec{b})|}$ - tj. $\vec{q}_2$ je ort koji ima pravac normalan na $\vec{q}_1$
3. $\vec{q}_3 = \pm\frac{\vec{c}-\text{pr}_{\pi}(\vec{c})}{|\vec{c}-\text{pr}_{\pi}(\vec{c})|} = \pm\frac{\vec{c}-\text{pr}_{\vec{q}_1}(\vec{c})-\text{pr}_{\vec{q}_2}(\vec{c})}{|\vec{c}-\text{pr}_{\vec{q}_1}(\vec{c})-\text{pr}_{\vec{q}_2}(\vec{c})|}$ - tj. $\vec{q}_3$ je ort koji ima pravac normalan na ravan π koja je određena vektorima $\vec{q}_1$ i $\vec{q}_2$

Napomena

Gram-Šmitov algoritam se lako uopštava na n-dimenzionalne vektorske prostore (radićemo kasnije), a u matričnoj notaciji (koju ćemo takođe raditi kasnije) daje QR dekompoziciju matrica.

Triedar desne orijentacije

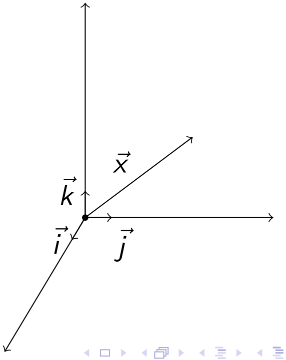
Definicija (Triedar i desni triedar)

- *Trojka nekomplanarnih vektora zove se* **triedar** *ili baza prostora slobodnih vektora.*
- *Triedar* $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$ *je desne orijentacije ako se smerovi vektora poklapaju sa smerovima određenim sa prva tri prsta desne ruke (palac, kažiprst, srednji prst).*

- Od svih triedara desne orijenatcije fiksiramo jedan ortonormiran $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Tada se svaki slobodan vektor $\vec{x}$ na jedinstven način može predstaviti sa

$$\vec{x} = (\vec{i}\vec{x})\vec{i} + (\vec{j}\vec{x})\vec{j} + (\vec{k}\vec{x})\vec{k}$$

Dakle, algebarske projekcije vektora $\vec{x}$ na $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ su $(\vec{i}\vec{x}, \vec{j}\vec{x}, \vec{k}\vec{x})$ - a ovo su zapravo koordinate vektora $\vec{x}$.



Sabiranje vektora i proizvod vektora i skalara u koordinatama

Napomena

Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *ortonormiran triedar desne orijentacije. Do sad smo zaključili da za svaki* $\vec{a} \in V$ *imamo*

$$\vec{a} = \mathrm{pr}_{\vec{i}}(\vec{a}) + \mathrm{pr}_{\vec{j}}(\vec{a}) + \mathrm{pr}_{\vec{k}}(\vec{a}) = (\vec{i}\vec{a})\vec{i} + (\vec{j}\vec{a})\vec{j} + (\vec{k}\vec{a})\vec{k} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Teorema

Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *ortonormiran triedar desne orijentacije. Tada za proizvoljne vektore* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *i skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *važi*

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) = (\lambda a_1)\vec{i} + (\lambda a_2)\vec{j} + (\lambda a_3)\vec{k}$$

$$\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Računanje pomoću koordinata

Teorema

Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *ortonormiran triedar desne orijentacije. Tada za prozvoljne vektore* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *važi*

1. $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
2. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
3. $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Dokaz

Dokazaćemo samo prvo tvrđenje, ostala su direktne posledice definicija i prvog tvrđenja.

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})\\ &= a_1b_1\vec{i}\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\vec{k} + a_2b_1\vec{j}\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\vec{j} + a_2b_3\vec{j}\vec{k} + a_3b_1\vec{k}\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\vec{j} + a_3b_3\vec{k}\vec{k}\\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

Vektorski i mešoviti proizvod

Vektorski proizvod

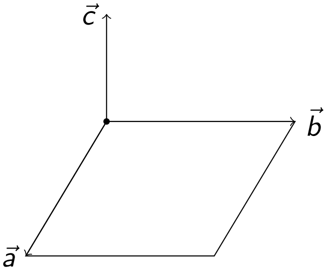
Definicija

Vektorski proizvod vektora je operacija $\times : V^2 \to V$ *gde je vektor* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *određen sa*

- *Intezitet:* $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$;
- *Pravac:* $\vec{c} \perp \vec{a}$ *i* $\vec{c} \perp \vec{b}$, *tj.* $\vec{c}$ *je normalan na ravan određenu vektorima* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$;
- *Smer: takav da* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *čini triedar desne orijentacije.*

- Ako je P površina paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a h visina koja odgovara stranici $|\vec{a}|$, tada iz $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{h}{|\vec{b}|}$ dobijamo

$$P = |\vec{a}|h = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



Osobine

Teorema

Za sve slobodne vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ važi

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;
2. $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$;
3. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$;
4. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$;
5. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$;
6. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Dokaz

Svi sem poslednjeg su direktna posledica definicija (za dokaz poslednjeg pogledati knjigu). Na primer, za prvo tvrđenje imamo da je $\vec{b} \times \vec{a}$ vektor koji ima isti intezitet i pravac kao $\vec{a} \times \vec{b}$ ali suprotan smer (zbog orijentacije).

Vektorski proizvod u koordinatama

Teorema

Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *ortonormiran triedar desne orijentacije. Tada za prozvoljne vektore* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *važi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Dokaz

Na osnovu definicije ortonormiranog desnog triedra $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *sledi*

$$\begin{array}{c|ccc} \times & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i} & 0 & \vec{k} & -\vec{j} \\ \vec{j} & -\vec{k} & 0 & \vec{i} \\ \vec{k} & \vec{j} & -\vec{i} & 0 \end{array}.$$

Koristeći ovo i osobine vektorskog proizvoda imamo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \end{aligned}$$

Mešoviti proizvod

Definicija

Mešoviti proizvod je funkcija koja preslikava V^3 *u* $\mathbb{R}$ *definisana sa* $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$.

Teorema

Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda nekomplanarnih vektora $\vec{a}, \vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima.*

Dokaz

Sledi direktno iz $|\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})| = |\vec{b}\times\vec{c}||\mathrm{pr}_{\vec{b}\times\vec{c}}(\vec{a})|$, *jer je* $|\vec{b}\times\vec{c}|$ *jednak površini pralelograma konstruisanog nad vektorima* $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$, *tj. površini baze paralelopipeda, a* $|\mathrm{pr}_{\vec{b}\times\vec{c}}(\vec{a})|$ *jednako je visini paralelopipeda, jer je vektor* $\vec{b}\times\vec{c}$ *normalan na bazu određenu vektorima* $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$.

Mešoviti proizvod i komplanarnost

Teorema

Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni akko je $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

Dokaz

$(\Rightarrow)$: Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni. Pošto je vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ normalan na ravan određenu vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$, a vektor $\vec{a}$ je komplanaran sa nijma, sledi da je $(\vec{b} \times \vec{c}) \perp \vec{a}$. Odatle je $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

$(\Leftarrow)$: Neka je $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$. Ako pretpostavimo suprotno, da su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nekomplanarni, tada dobijamo da je zapremina paralelopipeda konstruisanog nad njima različita od nule, tj. $|\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})| \neq 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom.

Mešoviti proizvod u koordinatama

Teorema

Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *ortonormiran triedar desne orijentacije. Tada za prozvoljne vektore* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *i* $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ *važi*

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Dokaz

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})((b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} - (b_3c_1 - b_1c_3)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{aligned}$$

Napomena

Vektori kolona u determinanti gore su linearno zavisni (komplanarni) akko je determinanta jednaka nuli.

Šta smo danas radili

- Koordinate
- Ortonormirane baze
- Triedar desne orijentacije
- Vektori u koordinatama
- Vektorski proizvod
- Mešoviti proizvod