Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 2

Na prethodnom času

- Ponovili osnovne pojmove iz logike
- Ponovili osnovne pojmove iz skupova
- Uređeni parovi i Dekartov proizvod
- Binarne relacije
- Osobine binarnih relacija (R S A T F)

Relacije ekvivalencije

Relacija ekvivalencije

Definicija (Relacija ekvivalencije)

Ako je binarna relacija nekog skupa refleksivna, simetrična i tranzitivna (tj. R S T*), tada se ona zove relacija ekvivalencije.*

Primer

Neke relacije ekvivalencije skupa $A = \{a, b, c\}$ *su*

1. $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ *(Dijagonala, jednako)*
2. $\rho_2 = A^2$ *(Puna relacija)*
3. $\rho_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$

Klase ekvivalencije i faktor skup

Definicija (Klase ekvivalencije i faktor skup)

Za relaciju ekvivalencije ρ *skupa* A *i element* $x \in A$ *skup* $C_x = \{y \mid x \,\rho\, y \ \wedge \ y \in A\}$ *se naziva klasa ekvivalencije elementa* x *(u odnosu na* ρ*). Skup svih klasa ekvivalencije se naziva količnički skup i piše se* $A/\rho = \{C_x \mid x \in A\}$.

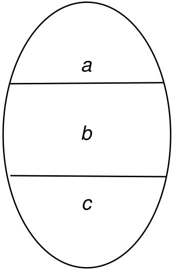
Primer

Za relacije ekvivalencije sa prethodnog slajda navodimo klase ekvivalencije i faktor skupove

ρ_1 : $C_a = \{a\}, C_b = \{b\}, C_c = \{c\}, A/\rho_1 = \{C_a, C_b, C_c\}$

ρ_2 : $C_a = C_b = C_c = \{a, b, c\}, A/\rho_2 = \{C_a\}$

ρ_3 : $C_a = C_b = \{a, b\}, C_c = \{c\}, A/\rho_3 = \{C_a, C_c\}$



Faktor skup A/ρ_1

Napomena

Deluje da su elementi u relaciji akko određuju istu klasu ekvivalencije. Dokazati!

Formulacija i dokaz napomene sa prethodnog slajda

Teorema

Neka je ρ relacija ekvivalencije skupa A. Tada, za svako $x, y \in A$ važi

$$x \, \rho \, y \quad \Leftrightarrow \quad C_x = C_y$$

Dokaz

Ekvivalenciju ($\Leftrightarrow$) dokazujemo tako što dokažemo dve implikacije:

($\Rightarrow$): *Pretpostavka je $x \, \rho \, y$. Pokazaćemo da iz ove pretpostavke sledi*

$C_x \subseteq C_y$: *Neka je $z \in C_x$. Po definiciji C_x ovo znači da važi $x \, \rho \, z$. Iz $x \, \rho \, y$ i simetričnosti ρ sledi $y \, \rho \, x$. Sad imamo $y \, \rho \, x$ i $x \, \rho \, z$, pa iz tranzitivnosti ρ dobijamo $y \, \rho \, z$. Po definiciji C_y sledi $z \in C_y$. Dakle, za svako $z \in C_x$ sledi $z \in C_y$, tj. važi $C_x \subseteq C_y$.*

$C_y \subseteq C_x$: *Analogno (na isti način). Uzeti $z \in C_y$ i pokazati da važi $z \in C_x$.*

Ovime je dokazano $C_x = C_y$.

($\Leftarrow$): *Pretpostavka je $C_x = C_y$. Iz refleksivnosti ρ imamo $y \, \rho \, y$, te je $y \in C_y$. Sada iz $C_y = C_x$ sledi $y \in C_x$, i zato važi $x \, \rho \, y$.*

Relacija ekvivalencije određuje particiju

Teorema

Svaka relacija ekvivalencije određuje jednu particiju skupa.

Dokaz

Neka je $A \neq \emptyset$. Neka je ρ relacija ekvivalencije na A. Iz refleksivnosti ρ možemo zaključiti da podskupovi u $\{C_x \mid x \in A\}$ sadrže sve elemente iz A i da su sve klase ekvivalencije neprazne. Da bi imali particiju potrebno je dokazati da su sve različite klase ekvivalencije disjunktne, tj. da imaju prazan presek. **Da budemo sigurni napravimo pomoćno tvrđenje (Lemu) koje ovo dokazuje!**

Relacija ekvivalencije određuje particiju

Lema

Ako je ρ relacija evivalencije na skupu A, tada za sve $x, y \in A$ važi $C_x = C_y$ ili $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Dokaz

Neka je $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ i neka je $z \in C_x \cap C_y$. Iz $z \in C_x$ i $z \in C_y$ sledi $x \,\rho\, z$ i $z \,\rho\, y$, pa iz tranzitivnosti ρ sledi $x \,\rho\, y$. Sada iz Teoreme od ranije imamo $C_x = C_y$.

Teorema

Svaka relacija ekvivalencije određuje jednu particiju skupa.

Dokaz

Neka je $A \neq \emptyset$. Neka je ρ relacija ekvivalencije na A. Iz refleksivnosti ρ možemo zaključiti da podskupovi u $\{C_x \,|\, x \in A\}$ sadrže sve elemente iz A i da su sve klase ekvivalencije neprazne. Da bi imali particiju potrebno je dokazati da su sve različite klase ekvivalencije disjunktne, tj. da imaju prazan presek. **Da budemo sigurni napravimo pomoćno tvrđenje (Lemu) koje ovo dokazuje!**

Relacija ekvivalencije određuje particiju

Lema

Ako je ρ relacija evivalencije na skupu A, tada za sve $x, y \in A$ važi $C_x = C_y$ ili $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Dokaz

Neka je $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ i neka je $z \in C_x \cap C_y$. Iz $z \in C_x$ i $z \in C_y$ sledi $x \,\rho\, z$ i $z \,\rho\, y$, pa iz tranzitivnosti ρ sledi $x \,\rho\, y$. Sada iz Teoreme od ranije imamo $C_x = C_y$.

Teorema

Svaka relacija ekvivalencije određuje jednu particiju skupa.

Dokaz

Neka je $A \neq \emptyset$. Neka je ρ relacija ekvivalencije na A. Iz refleksivnosti ρ možemo zaključiti da podskupovi u $\{C_x \mid x \in A\}$ sadrže sve elemente iz A i da su sve klase ekvivalencije neprazne. Da bi imali particiju potrebno je dokazati da su sve različite klase ekvivalencije disjunktne, tj. da imaju prazan presek. **Na osnovu leme gore ovo sledi.**

Particija određuje relaciju ekvivalencije

Teorema

Svaka particija skupa određuje jednu relaciju ekvivalencije.

Dokaz

Neka je $A \neq \emptyset$. *Neka je* $\mathcal{P}$ *jedna particija skupa* A. *Za svako* $C \in \mathcal{P}$ *uzmimo* C^2 *(punu) relaciju. Unija svih ovakvih punih relacija je relacija ekvivalencije na* A. *Dokažite sami.*

Particija $\Leftrightarrow$ relacija ekvivalencije: primer

Primer

Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

1. *Za* $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),(d,f),(f,d)\}$ *proveriti da je* ρ *relaciju ekvivalencije, pronaći klase ekvivalencije i faktor skup* A/ρ.
2. *Za particiju* $\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{f\}\}$ *skupa* A *napisati relaciju ekvivalencije koja joj odgovara (čiji je faktor skup baš ova particija).*

Particija $\Leftrightarrow$ relacija ekvivalencije: primer

Primer

Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

1. *Za* $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),(d,f),(f,d)\}$ *proveriti da je* ρ *relaciju ekvivalencije, pronaći klase ekvivalencije i faktor skup* A/ρ.
2. *Za particiju* $\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{f\}\}$ *skupa* A *napisati relaciju ekvivalencije koja joj odgovara (čiji je faktor skup baš ova particija).*

Rešenje.

1. Klase ekvivalencije su $C_1 = \{a,b,c\}$, $C_2 = \{d,f\}$, $C_3 = \{e\}$, a faktor skup $A/\rho = \{\{a,b,c\},\{d,f\},\{e\}\}$
2. Relacija ekvivalencije je $\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c),(d,d),(e,e),(c,d),(d,c),(c,e),(e,c),(d,e),(e,d),(f,f)\}$

Ostatak pri deljenju u $\mathbb{Z}$

Napomena

Setimo se iz 6. razreda relacije $\mid$ *na skupu* $\mathbb{Z}$*, npr.* $2 \mid 4$ *i* $2 \nmid 5$ *(malo kasnije ćemo o njenim osobinama)*

Ostatak pri deljenju u $\mathbb{Z}$

Napomena

Setimo se iz 6. razreda relacije $\mid$ *na skupu* $\mathbb{Z}$, *npr.* $2 \mid 4$ *i* $2 \nmid 5$ *(malo kasnije ćemo o njenim osobinama)*

Definicija

Na skupu $\mathbb{Z}$ *uvodimo relaciju* $\equiv_3$ **kongruentno po modulu** 3 *sa:* $x \equiv_3 y$ *akko* $3 \mid x - y$ *(tj.* x *i* y **daju isti ostatak pri deljenju sa** 3*). Piše se i* $x \equiv y (mod 3)$.

Lema

Na skupu $\mathbb{Z}$ *relacija* $\equiv_3$ *je relacija ekvivalencije.*

Ostatak pri deljenju u $\mathbb{Z}$

Napomena

Setimo se iz 6. razreda relacije $|$ *na skupu* $\mathbb{Z}$, *npr.* $2 \mid 4$ *i* $2 \nmid 5$ *(malo kasnije ćemo o njenim osobinama)*

Definicija

Na skupu $\mathbb{Z}$ *uvodimo relaciju* $\equiv_3$ **kongruentno po modulu** 3 *sa:* $x \equiv_3 y$ *akko* $3 \mid x - y$ *(tj.* x *i* y **daju isti ostatak pri deljenju sa** 3*). Piše se i* $x \equiv y (mod 3)$.

Lema

Na skupu $\mathbb{Z}$ *relacija* $\equiv_3$ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz

(R) $(\forall x \in \mathbb{Z})$ $x \equiv_3 x$ *jer* $3 \mid x - x$

(S) $(\forall x, y \in \mathbb{Z})$ *ako je* $x \equiv_3 y$ *(tj.* $3 \mid x - y$*) tada je i* $y \equiv_3 x$ *(jer* $3 \mid y - x$*)*

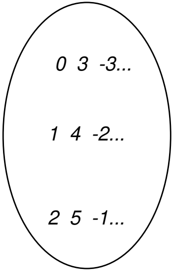
(T) $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})$ *ako* $x \equiv_3 y$ *i* $y \equiv_3 z$ *tada je* $x \equiv_3 z$ *(jer* x *i* y *i* z *daju isti ostatak pri deljenju sa* 3*)*

Skup $\mathbb{Z}_3$

Relacija $\equiv_3$ na $\mathbb{Z}$ vrši particiju: kako izgleda faktor skup?

Klase ekvivalencije

Faktor skup $\mathbb{Z}/\equiv_3$ ćemo označavati sa $\mathbb{Z}_3$



Skup $\mathbb{Z}$

Skup $\mathbb{Z}_3$

Relacija $\equiv_3$ na $\mathbb{Z}$ vrši particiju: kako izgleda faktor skup?

Klase ekvivalencije

1. $C_0 = \{0, 3, -3, \dots\}$ - deljivi sa 3
2. $C_1 = \{1, 4, -2, \dots\}$ - ostatak 1
3. $C_2 = \{2, 5, -1, \dots\}$ - ostatak 2

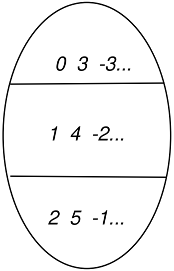
Faktor skup $\mathbb{Z}/\equiv_3$ ćemo označavati sa $\mathbb{Z}_3$

$$\mathbb{Z}_3 = \{C_0, C_1, C_2\}$$

Pošto su klase ekvivalencije određene bilo kojim svojim elementom pisaćemo i

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

Isto smo mogli uraditi da dobijemo $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \dots, \mathbb{Z}_n$



Faktor skup $\mathbb{Z}_3$

Relacije poretka

Relacija poretka

Definicija (Relacija poretka)

Ako je binarna relacija nekog skupa A refleksivna, antisimetrična i tranzitivna (tj. R A T*), tada se ona zove relacija poretka i kažemo da je (A, ρ)* **(parcijalno) uređen skup**.

Primer

Neke relacije poretka

1. *Na skupu* $A = \{a, b, c\}$: $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ *(Dijagonala, jednako)*
2. *Na skupu* $A = \{a, b, c\}$: $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$ *(Lanac)*
3. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, *za* $A \neq \emptyset$ *(Partitivni skup i relacija podskup)*
4. $(\mathbb{N}, \mid)$ *(Prirodni brojevi i relacija deli)*
5. $(\mathbb{R}, \leq)$ *(Realni brojevi i relacija manje-jednako)*

Parcijalno uređeni skupovi $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ i $(\mathbb{N}, \mid)$

Primer

Neka je $A \neq \emptyset$. *Tada je* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *je parcijalno uređen skup*

(R) $(\forall X \in \mathcal{P}(A)) \quad X \subseteq X$

(A) $(\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)) \quad (X \subseteq Y \ \wedge \ Y \subseteq X) \ \Rightarrow \ X = Y)$

(T) $(\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)) \quad (X \subseteq Y \ \wedge \ Y \subseteq Z) \ \Rightarrow \ X \subseteq Z$

Parcijalno uređeni skupovi $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ i $(\mathbb{N}, \,|\,)$

Primer

Neka je $A \neq \emptyset$. Tada je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je parcijalno uređen skup

(R) $(\forall X \in \mathcal{P}(A)) \quad X \subseteq X$

(A) $(\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)) \quad (X \subseteq Y \ \wedge \ Y \subseteq X) \ \Rightarrow \ X = Y)$

(T) $(\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)) \quad (X \subseteq Y \ \wedge \ Y \subseteq Z) \ \Rightarrow \ X \subseteq Z$

Primer

$(\mathbb{N}, \,|\,)$ *je parcijalno uređen skup*

(R) $(\forall x \in \mathbb{N})) \quad x \,|\, x$

(A) $(\forall x, y \in \mathbb{N}) \quad (x \,|\, y \ \wedge \ y \,|\, x) \ \Rightarrow \ x = y)$

(T) $(\forall x, y, z \in \mathbb{N}) \quad (x \,|\, y \ \wedge \ y \,|\, z) \ \Rightarrow \ x \,|\, z$

Napomena

Da li je $(\mathbb{Z}, \,|\,)$ parcijalno uređen skup?

Haseov dijagram

Parcijalno uređeni skup (A, ρ) možemo grafički da predstavimo kao graf (tzv. Haseov dijagram)

- Elemente skupa A crtamo kao tačke (čvorove) i povezujemo ih linijama (granama)
- Ako imamo $x \, \rho \, y$ onda x crtamo **ispod**, a y **iznad**
- Ako je $x \, \rho \, y$ i ne postoji $z \in A$ takvo da je z **između** x i y, tj. takvo da važi $x \, \rho \, z$ i $z \, \rho \, y$, onda x i y direktno spajamo granom

Haseov dijagram

Parcijalno uređeni skup (A, ρ) možemo grafički da predstavimo kao graf (tzv. Haseov dijagram)

- Elemente skupa A crtamo kao tačke (čvorove) i povezujemo ih linijama (granama)
- Ako imamo $x \, \rho \, y$ onda x crtamo **ispod**, a y **iznad**
- Ako je $x \, \rho \, y$ i ne postoji $z \in A$ takvo da je z **između** x i y, tj. takvo da važi $x \, \rho \, z$ i $z \, \rho \, y$, onda x i y direktno spajamo granom

Primer

Nacrtati Haseov dijagram za parcijalno uređen skup (A, ρ)*,*
gde je $A = \{a, b, c, d, e\}$ *i* $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d),$
$(e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, d), (c, e)\}$

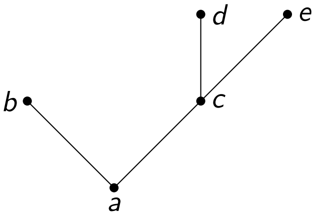
Haseov dijagram

Parcijalno uređeni skup (A, ρ) možemo grafički da predstavimo kao graf (tzv. Haseov dijagram)

- Elemente skupa A crtamo kao tačke (čvorove) i povezujemo ih linijama (granama)
- Ako imamo $x \, \rho \, y$ onda x crtamo **ispod**, a y **iznad**
- Ako je $x \, \rho \, y$ i ne postoji $z \in A$ takvo da je z **između** x i y, tj. takvo da važi $x \, \rho \, z$ i $z \, \rho \, y$, onda x i y direktno spajamo granom

Primer

Nacrtati Haseov dijagram za parcijalno uređen skup (A, ρ)*, gde je* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *i* $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, d), (c, e)\}$



Najmanji, najveći, min i max elementi

Definicija

U parcijalno uređenom skupu (A, ρ) *definišemo specijalne elemente*

- *a je najmanji element* akko $(\forall x \in A) \quad a \, \rho \, x$ *(Ispod svih drugih)*
- *a je najveći element* akko $(\forall x \in A) \quad x \, \rho \, a$ *(Iznad svih drugih)*
- *a je minimalni element* akko $(\forall x \in A \backslash \{a\}) \quad x \, \not\rho \, a$ *(Nema drugih ispod)*
- *a je maksimalni element* akko $(\forall x \in A \backslash \{a\}) \quad a \, \not\rho \, x$ *(Nema drugih iznad)*

Najmanji, najveći, min i max elementi

Definicija

U parcijalno uređenom skupu (A, ρ) *definišemo specijalne elemente*

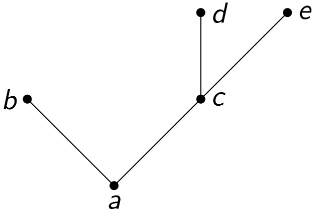
- *a je najmanji element* akko $(\forall x \in A) \quad a \, \rho \, x$ *(Ispod svih drugih)*
- *a je najveći element* akko $(\forall x \in A) \quad x \, \rho \, a$ *(Iznad svih drugih)*
- *a je minimalni element* akko $(\forall x \in A \setminus \{a\}) \quad x \, \not\rho \, a$ *(Nema drugih ispod)*
- *a je maksimalni element* akko $(\forall x \in A \setminus \{a\}) \quad a \, \not\rho \, x$ *(Nema drugih iznad)*

Primer

Za parcijalno uređen skup (A, ρ), *gde je* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *i* $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, d), (c, e)\}$ *odrediti*

najmanji: , *najveći:* ,

minimalne: , *maksimalne:*



Najmanji, najveći, min i max elementi

Definicija

U parcijalno uređenom skupu (A, ρ) *definišemo specijalne elemente*

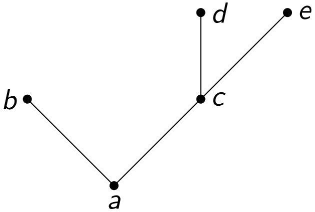
- *a je najmanji element* *akko* $(\forall x \in A) \quad a\,\rho\,x$ *(Ispod svih drugih)*
- *a je najveći element* *akko* $(\forall x \in A) \quad x\,\rho\,a$ *(Iznad svih drugih)*
- *a je minimalni element* *akko* $(\forall x \in A \backslash \{a\}) \quad x\,\not\rho\,a$ *(Nema drugih ispod)*
- *a je maksimalni element* *akko* $(\forall x \in A \backslash \{a\}) \quad a\,\not\rho\,x$ *(Nema drugih iznad)*

Primer

Za parcijalno uređen skup (A, ρ), *gde je* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *i* $\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(c,d),(c,e)\}$ *odrediti*

najmanji: a, *najveći: nema,*

minimalne: a, *maksimalne:* b, d, e



Najmanji (najveći) je jedinstven

Teorema

Ako postoji, najmanji (najveći) element parcijalno uređenog skupa je jedinstven.

Dokaz

Dokaz izvodimo **svođenjem na kontradikciju** *(reductio ad absurdum: ako pretpostavimo da je neka izjava istinita, doći ćemo do logičke kontradikcije). Suprotno tvrđenju teoreme, pretpostavimo da postoji parcijalno uređen skup* (A, ρ) *koji ima bar dva različita najmanja elementa a i b. Po definiciji najmanjeg elementa to znači da važi* $a \, \rho \, b$ *i* $b \, \rho \, a$*. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da je* (A, ρ) *parcijalno uređen skup (*ρ *mora biti antisimetrično), pa je zaključak da parcijalno uređen skup ne može imati više različitih najmanjih elemenata.*

Supremum i infimum

Definicija

Neka je (A, ρ) parcijalno uređen skup i $M \subseteq A$.

- *$a \in A$ je* **donja** *granica skupa M akko $(\forall m \in M)\ a \,\rho\, m$*
- *$a \in A$ je* **gornja** *granica skupa M akko $(\forall m \in M)\ m \,\rho\, a$*
- *Skup M je* **ograničen** *akko ima bar jednu gornju i donju granicu*
- *Ako postoji najmanji element skupa svih gornjih granica skupa M, tada se on zove* **supremum** *i obeležava se $\sup M$*
- *Ako postoji najveći element skupa svih donjih granica skupa M, tada se on zove* **infimum** *i obeležava se $\inf M$*

Primer

U parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{R}, \leq)$, za otvoren interval $M = (0, 1)$ imamo $\sup M = 1$ i $\inf M = 0$

Totalno i dobro uređeni skupovi

Definicija (Totalno uređen skup ili lanac)

Ako u parcijalno uređenom skupu za svaka dva elementa a i b važi $a \, \rho \, b$ ili $b \, \rho \, a$, tada se on naziva totalno uređen skup ili lanac.

Definicija (Dobro uređen skup)

Ako u parcijalno uređenom skupu svaki neprazan podskup ima najmanji element, tada se on naziva dobro uređen skup.

Totalno i dobro uređeni skupovi

Definicija (Totalno uređen skup ili lanac)

Ako u parcijalno uređenom skupu za svaka dva elementa a i b važi $a\,\rho\,b$ *ili* $b\,\rho\,a$*, tada se on naziva totalno uređen skup ili lanac.*

Definicija (Dobro uređen skup)

Ako u parcijalno uređenom skupu svaki neprazan podskup ima najmanji element, tada se on naziva dobro uređen skup.

Primer

$(\mathbb{R}, \leq)$ *i* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *su lanaci, a* $(\mathbb{N}, \leq)$ *je dobro uređen skup i lanac*

Totalno i dobro uređeni skupovi

Definicija (Totalno uređen skup ili lanac)

Ako u parcijalno uređenom skupu za svaka dva elementa a i b važi $a\,\rho\,b$ ili $b\,\rho\,a$, tada se on naziva totalno uređen skup ili lanac.

Definicija (Dobro uređen skup)

Ako u parcijalno uređenom skupu svaki neprazan podskup ima najmanji element, tada se on naziva dobro uređen skup.

Primer

$(\mathbb{R}, \leq)$ *i* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *su lanaci, a* $(\mathbb{N}, \leq)$ *je dobro uređen skup i lanac*

Teorema

Svaki dobro uređeni skup je i lanac.

Dokaz

Neka je (A, ρ) dobro uređen skup. Ako uzmemo $a, b \in A$ i skup $\{a, b\}$ sledi da taj skup ima najmanji element. Tada je taj najmanji element u relaciji sa onim drugim elementom skupa $\{a, b\}$, tj. imamo $a\,\rho\,b$ ili $b\,\rho\,a$.

Primeri

Nacrtati Haseove dijagrame i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente sledećih parcijalno uređenih skupova:

1. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, gde je $A = \{a, b, c\}$
2. $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$, gde je $A = \{a, b, c\}$
3. $(\mathbb{N}, \mid)$
4. $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \mid)$
5. $(D_{30}, \mid)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
6. $(D_{30} \setminus \{30\}, \mid)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Šta smo danas radili

- Rekacije ekvivalencije
  - Klase ekvivalencije i faktor skup (particije)
  - Skup $\mathbb{Z}_n$
- Relacije poretka (parcijalno uređeni skupovi)
  - Haseov dijagram
  - Najmanji, najveći, min i max elementi
  - Supremum i infimum
  - Lanci i dobro uređeni skupovi