Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 20

Na prethodnom času

- Koordinate
- Ortonormirane baze
- Triedar desne orijentacije
- Vektori u koordinatama
- Vektorski proizvod
- Mešoviti proizvod

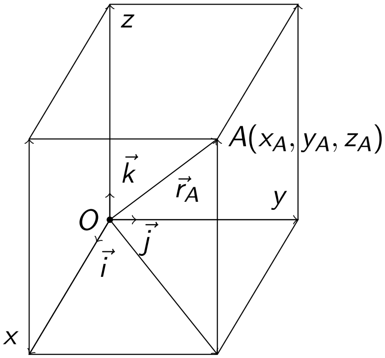
Analitička geometrija

Vektor položaja tačke

Videli smo da ako je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fiksna ortonormirana baza vektora desne orijentacije tada se svaki $\vec{r}_A \in V$ može na jedinstven način predstaviti kao

$$\vec{r}_A = (\vec{i}\vec{r}_A)\vec{i} + (\vec{j}\vec{r}_A)\vec{j} + (\vec{k}\vec{r}_A)\vec{k} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} = (x_A, y_A, z_A)$$

Ako pored $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fiksiramo i jednu tačku O, dobijamo **Dekartov pravougli koordinatni sistem**.



Definicija

Vektor $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ *zove se* **vektor položaja tačke** *A, gde je O koordinatni početak. Ako je* $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$*, tada su* (x_A, y_A, z_A) **koordinate tačke** *A, i pišemo* $A(x_A, y_A, z_A)$.

Vektori i uređene trojke realnih brojeva

Pitanje: Da li slobodni vektor $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ možemo da izjednačimo sa uređenom trojkom realnih brojeva (x, y, z)?

- Kasnije ćemo raditi vektorske prostore, pa ćemo videti da je vektorski prostor slododnih vektora $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ izomorfan vektorskom prostoru uređenih trojki realnih brojeva $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gde su operacije definisane sa

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

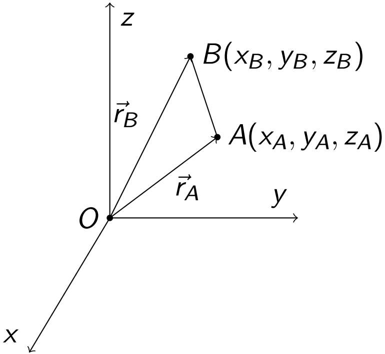
- Jedan takav izomorfizam $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^3$ je definisan sa $f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x, y, z)$.
- Sada ćemo koristeći vektore pokazati kako se jednostavno izvode osnovne činjenice iz analitičke geometrije.

Dužina duži. Deoba duži

Definicija

Ako su date tačke $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$, tada možemo izračunati vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, a odavde (pomoću skalarnog proizvoda) dobijamo dužinu duži

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

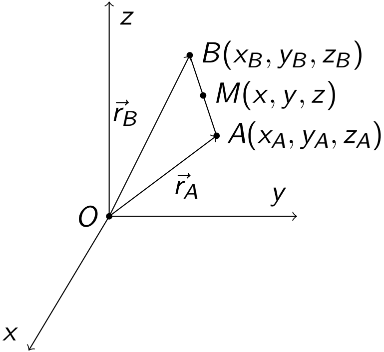


Dužina duži. Deoba duži

Definicija

Ako su date tačke $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$, tada možemo izračunati vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, a odavde (pomoću skalarnog proizvoda) dobijamo dužinu duži

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

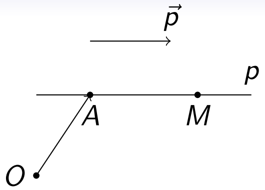


Teorema

Ako na duži AB tražimo tačku $M(x, y, z)$ koja deli duž u razmeri $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = \lambda : 1$, tada je

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_A = \lambda\vec{r}_B - \lambda\vec{r}_M \Leftrightarrow \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1+\lambda} = \left(\frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}\right)$$

Jednačina prave



Ako je prava zadata tačkom $A(x_A, y_A, z_A)$ i vektorom pravca $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, tada za svaku tačku $M(x, y, z)$ važi

$$M \in p \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AM} \parallel \vec{p} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AM} = t\vec{p} \;\Leftrightarrow\; \vec{r}_M = \vec{r}_A + t\vec{p}$$

Tako dobijamo **vektorski oblik jednačine prave** $p : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$. Ako sada raspišemo u koordinatama $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(p_1, p_2, p_3)$ dobijamo **parametarski oblik jednačine prave** p:

$$x = x_A + tp_1$$
$$y = y_A + tp_2$$
$$z = z_A + tp_3$$

Ako iz parametarskog oblika iz svih jednakosti izrazimo parametar t dobijamo **kanonički oblik jednačine prave**

$$p : \frac{x - x_A}{p_1} = \frac{y - y_A}{p_2} = \frac{z - z_A}{p_3}$$

Ako je prava p zadata sa dve tačke $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$, tada je vektor pravca prave p

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Odnos dve prave. Presek pravih

Ako su zadate dve prave

$$p : \frac{x - x_A}{p_1} = \frac{y - y_A}{p_2} = \frac{z - z_A}{p_3} \quad \text{i} \quad q : \frac{x - x_B}{q_1} = \frac{y - y_B}{q_2} = \frac{z - z_B}{q_3}$$

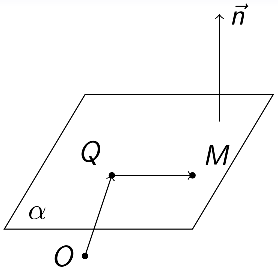
tj. $A(x_A, y_A, z_A) \in p$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \parallel p$, $B(x_B, y_B, z_B) \in q$ i $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \parallel q$, tada su prave p i q

- **paralelne** ako je $\vec{p} \parallel \vec{q}$, tj. ako je $\vec{p} = \lambda\vec{q}$, pri čemu se
  - **poklapaju** ako $A \in q$
  - **paralelne i različite** ako $A \notin q$
- ako p i q nisu paralelne, tada
  - **seku se** ako prave p i q leže u istoj ravni, tj. ako je mešoviti proizvod $\overrightarrow{AB}(\vec{p} \times \vec{q}) = 0$
  - **mimoilazne su** ako je $\overrightarrow{AB}(\vec{p} \times \vec{q}) \neq 0$

Presek pravih (ako se seku) dobija se izjednačavanjem odgovarajućih jednakosti iz parametarskih oblika jednačina dve prave.

Jednačina ravni

Ako je ravan α zadata tačkom $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ i vektorom normale $\vec{n} = (A, B, C)$, tada za svaku tačku $M(x, y, z)$ važi



$$M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{QM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{QM} \cdot \vec{n} = 0$$

Tako dobijamo **vektorski oblik jednačine ravni** $\alpha : (\vec{r}_M - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$.

Ako sada raspišemo u koordinatama $((x, y, z) - (x_Q, y_Q, z_Q))(A, B, C) = 0$ dobijamo **opšti oblik jednačine ravni**:

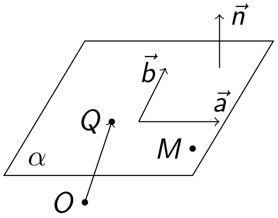
$$\alpha : A(x - x_Q) + B(y - y_Q) + C(z - z_Q) = 0$$

Ako je $D = Ax_Q + By_Q + Cz_Q$ opšti oblik jednačine ravni se može zapisati sa

$$\alpha : Ax + By + Cz = D$$

Parametarski oblik jednačine ravni - dva nekolinearna vektora i ravan

Ako je ravan α zadata tačkom $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ i dva nekolinearna vektora $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tada za svaku tačku $M(x, y, z)$ važi



$$M \in \alpha \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{QM} = t_1\vec{a}+t_2\vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{r} = \vec{r}_Q+t_1\vec{a}+t_2\vec{b}$$

Tako dobijamo **parametarski oblik jednačine ravni** α

$$\begin{aligned} x &= x_Q + t_1 a_1 + t_2 b_1 \\ y &= y_Q + t_1 a_2 + t_2 b_2 \\ z &= z_Q + t_1 a_3 + t_2 b_3 \end{aligned}$$

Primetimo da vektor normale ravni α možemo dobiti pomoću $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Ili, možemo reći da $M \in \alpha$ akko su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{QM}$ komplanarni, odakle je $\overrightarrow{QM}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} x - x_Q & y - y_Q & z - z_Q \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Odnos prave i ravni

Ako su zadate prava i ravan

$$p : \frac{x - x_p}{p_1} = \frac{y - y_p}{p_2} = \frac{z - z_p}{p_3} \quad \text{i} \quad \alpha : Ax + By + Cz = D$$

odnosno $P(x_P, y_P, z_P) \in p$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \parallel p$ i $\vec{n} = (A, B, C) \perp \alpha$, tada su prava p i ravan α

- **paralelne** ako je $\vec{p} \perp \vec{n}$, tj. $\vec{p}\vec{n} = 0$, pri čemu
  - prava leži u ravni ako $P \in \alpha$
  - paralelne i nemaju zajedničkih tačaka ako $P \notin \alpha$
- **seku se** ako $\vec{p}\vec{n} \neq 0$.

Presek prave i ravni (ako se seku) - malo kasnije.

Simetralna ravan

Problem: Naći sve tačke u prostoru koje su jednako udaljene od tačaka A i B.

Simetralna ravan

Problem: Naći sve tačke u prostoru koje su jednako udaljene od tačaka A i B.

Rešenje: U pitanju je simetralna ravan α koja sadrži sredinu duži AB, tj. tačku S čiji je vektor položaja $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$, i koja je normalna na duž AB, tj. vektor normale ravni α je $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$. Odatle je jednačina simetralne ravni za duž AB

$$\alpha : (\vec{r} - \vec{r}_S)\overrightarrow{AB} = 0$$

Prodor prave kroz ravan. Projekcije

Prodor prave kroz ravan

Ako se prava i ravan

$$p: \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p} \ \text{ i } \ \alpha : (\vec{r} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$$

seku u tački R, tada uvrštavanjem $\vec{r}$ iz jednačine prave u jednačinu ravni dobijamo

$$(\vec{r}_P + t\vec{p} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0 \ \Leftrightarrow \ t\vec{p}\vec{n} = (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)\vec{n} \ \Leftrightarrow \ t = \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{p}\vec{n}}$$

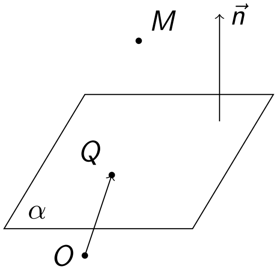
vraćanjem t u jednačinu prave dobijamo vektor položaja tačke preseka R (prodora prave kroz ravan)

$$\vec{r}_R = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{p}\vec{n}}\vec{p}$$

Normalna projekcija tačke na ravan

Problem: Naći vektor položaja tačke M' koja je normalna projekcija tačke M na ravan $\alpha : (\vec{r} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$.

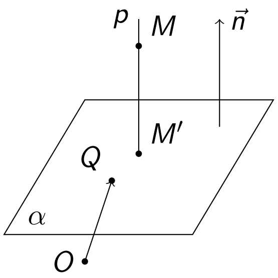
Rešenje:



Normalna projekcija tačke na ravan

Problem: Naći vektor položaja tačke M' koja je normalna projekcija tačke M na ravan $\alpha : (\vec{r} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$.

Rešenje: Konstruišemo pravu p koja prolazi kroz M i normalna je na ravan α, tj. možemo uzeti $\vec{p} = \vec{n}$, odnosno imamo $p : \vec{r} = \vec{r}_M + t\vec{n}$. Sada se tražena projekcija dobija kao prodor prave p kroz ravan α



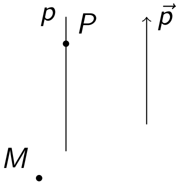
$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$$

Napomena: Ako ravan α prolazi kroz kooridnatni početak, tj. $O \in \alpha$, onda je projekcija tačke M na ravan α zapravo projekcija vektora $\vec{r}_M$ na ravan α
$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M - \frac{\vec{r}_M\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n} = \mathrm{pr}_\alpha(\vec{r}_M)$.

Normalna projekcija tačke na pravu

Problem: Naći vektor položaja tačke M' koja je normalna projekcija tačke M na pravu $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$.

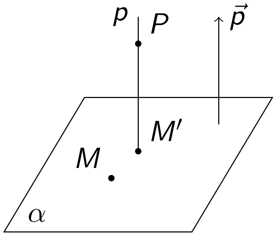
Rešenje:



Normalna projekcija tačke na pravu

Problem: Naći vektor položaja tačke M' koja je normalna projekcija tačke M na pravu $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$.

Rešenje: Konstruišemo ravan α koja prolazi kroz M i normalna je na pravu p, tj. možemo uzeti $\vec{n} = \vec{p}$, odnosno imamo $\alpha : (\vec{r} - \vec{r}_M)\vec{p} = 0$. Sada se tražena projekcija dobija kao prodor prave p kroz ravan α



$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_P)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p}$$

Napomena: Ako prava p prolazi kroz kooridnatni početak, tj. $O \in p$, onda je projekcija tačke M na pravu p zapravo projekcija vektora $\vec{r}_M$ na pravac vektora $\vec{p}$, tj. $\vec{r}_{M'} = \frac{\vec{r}_M\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p} = \mathrm{pr}_{\vec{p}}(\vec{r}_M)$.

Kose projekcije

Neka su date prava $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i ravan $\alpha : (\vec{r} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$.

- **Problem** 1: Za datu tačku M naći njenu kosu projekciju na ravan α ako su zraci projektovanja paralelni sa pravom p.

Kose projekcije

Neka su date prava $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i ravan $\alpha : (\vec{r} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$.

- **Problem 1:** Za datu tačku M naći njenu kosu projekciju na ravan α ako su zraci projektovanja paralelni sa pravom p.
  Rešenje: Konstruišemo pravu a koja prolazi kroz M i paralelna je sa p, tj. $a : \vec{r} = \vec{r}_M + t\vec{p}$. Tražena kosa projekcija je prodor prave a kroz ravan α, tj.

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{p}\vec{n}}\vec{p}$$

Kose projekcije

Neka su date prava $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i ravan $\alpha : (\vec{r} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$.

- **Problem** 1: Za datu tačku M naći njenu kosu projekciju na ravan α ako su zraci projektovanja paralelni sa pravom p.
  Rešenje: Konstruišemo pravu a koja prolazi kroz M i paralelna je sa p, tj. $a : \vec{r} = \vec{r}_M + t\vec{p}$. Tražena kosa projekcija je prodor prave a kroz ravan α, tj.

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{p}\vec{n}}\vec{p}$$

- **Problem** 2: Za datu tačku M naći njenu kosu projekciju na pravu p ako su zraci projektovanja paralelni sa ravni α.

Kose projekcije

Neka su date prava $p: \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ i ravan $\alpha: (\vec{r} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$.

- **Problem** 1: Za datu tačku M naći njenu kosu projekciju na ravan α ako su zraci projektovanja paralelni sa pravom p.
  Rešenje: Konstruišemo pravu a koja prolazi kroz M i paralelna je sa p, tj. $a: \vec{r} = \vec{r}_M + t\vec{p}$. Tražena kosa projekcija je prodor prave a kroz ravan α, tj.

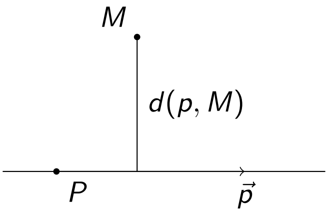
$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{p}\vec{n}}\vec{p}$$

- **Problem** 2: Za datu tačku M naći njenu kosu projekciju na pravu p ako su zraci projektovanja paralelni sa ravni α.
  Rešenje: Konstruišemo ravan β koja prolazi kroz M i paralelna je sa α, tj. $\beta: (\vec{r} - \vec{r}_M)\vec{n} = 0$. Tražena kosa projekcija je prodor prave p kroz ravan β, tj.

$$\vec{r}_{M''} = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{p}\vec{n}}\vec{p}$$

Rastojanje tačke od prave

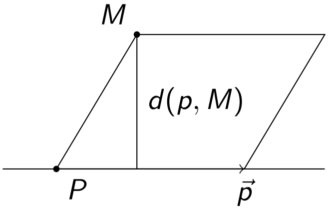
Problem: Naći rastojanje tačke M od prave
$p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$.
Rešenje:



Rastojanje tačke od prave

Problem: Naći rastojanje tačke M od prave $p : \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$.

Rešenje: Posmatramo paralelogram određen vektorima $\vec{p}$ i $\overrightarrow{PM}$. Njegova površina je $|\overrightarrow{PM} \times \vec{p}|$, ali i $|\vec{p}| \cdot d(M,p)$, pa dobijamo



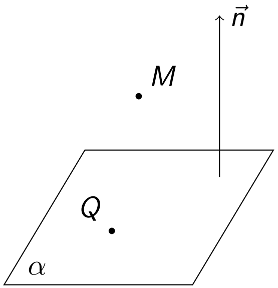
$$d(M,p) = \frac{|\overrightarrow{PM} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|} = |\overrightarrow{PM} - \mathrm{pr}_{\vec{p}}(\overrightarrow{PM})|$$

Rešenje 2: Naći tačku M' koja je normalna projekcija tačke M na pravu p i izračunati $|\overrightarrow{MM'}|$.

Rastojanje tačke od ravni

Problem: Naći rastojanje tačke M od ravni $\alpha(\vec{r} - \vec{r}_Q)\vec{n} = 0$.

Rešenje:



Rastojanje tačke od ravni

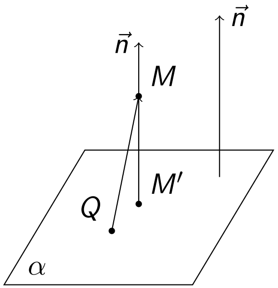
Problem: Naći rastojanje tačke M od ravni $\alpha(\vec{r}-\vec{r}_Q)\vec{n}=0$.

Rešenje: Projektujemo vektor $\overrightarrow{QM}$ na vektor normale $\vec{n}$, traženo rastojanje $d(M,\alpha)$ je intezitet dobijenog vektora projekcije, tj.

$$d(M,\alpha)=|\mathrm{pr}_{\vec{n}}(\overrightarrow{QM})|=\frac{|\overrightarrow{QM}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Ako je $M(x_1,y_1,z_1)$ i $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$ tada dobijamo

$$d(M,\alpha)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Rešenje 2: Naći tačku M' koja je normalna projekcija tačke M na ravan α i izračunati $|\overrightarrow{MM'}|$.

Šta smo danas radili

- Dužina duži i deoba duži
- Jednačina prave
- Jednačina ravni
- Prodor prave kroz ravan
- Normalne i kose projekcije
- Rastojanje tačke od prave i ravni