Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 22

Na prethodnom času

- Vektorski prostori
- Potprostori
- Lineali

Linearna nezavisnost

Linearna nezavisnost

Podsećanje: Slobodni vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su nekomplanarni akko iz $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$ sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Definicija (Linearna nezavisnost)

U vektorskom prostoru V, n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno nezavisna akko

$$(\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F)\ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Kažemo da je n-torka vektora linearno zavisna ako nije linearno nezavisna.

Teorema (Linearna zavisnost)

U vektorskom prostoru V, n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno zavisna akko se bar jedan od vektora može izraziti kao linearna kombinacija (razložiti u pravcu) preostalih vektora iz n-torke.

Dokaz teoreme. Primeri

Dokaz

Vektor a_i se može razložiti u pravcu preostalih vektora iz n-torke $(a_1, \ldots, a_n)$ akko $(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_n \in F)$ takvi da je $a_i = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \alpha_n a_n$, što je ekvivalentno sa

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{i-1} a_{i-1} - a_i + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \alpha_n a_n = 0$$

što znači da $(a_1, \ldots, a_n)$ nisu linearno nezavisni (jer je $\alpha_i = -1 \neq 0$).

Posledica

Ako je u n-torci $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektor $a_i = 0$ tada je n-torka linearno zavisna.

Primer

U vektorskom prostoru slobodnih vektora $(\vec{i})$, $(\vec{i}, \vec{j})$ i $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{k})$ su linearno nezavisni, a $(\vec{0})$, $(\vec{i}, 2\vec{i})$ i $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$ su linearno zavisni.

Kako proveriti linearnu nezavisnost u $\mathbb{R}^3$? (1/2)

1. Da li su vektori $a = (1, 2, 3)$ i $b = (4, 5, 6)$ linearno nezavisni?
2. Da li su vektori $a = (1, 2, 3)$, $b = (4, 5, 6)$ i $c = (7, 8, 9)$ linearno nezavisni?

Rešenje.

1. Po definiciji, a i b su linearno nezavisni ako iz $\alpha a + \beta b = 0$ sledi $\alpha = \beta = 0$.

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} \alpha & + & 4\beta & = & 0 \\ 2\alpha & + & 5\beta & = & 0 \\ 3\alpha & + & 6\beta & = & 0 \end{array}$$

Dakle, vektori a i b su linearno nezavisni ako je dobijeni homogeni sistem linearnih jednačina određen (jer je tada rešenje $\alpha = \beta = 0$). Gausovim postupkom dobijamo

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & 4\beta & = & 0 \\ & - & 3\beta & = & 0 \\ & - & 6\beta & = & 0 \end{array}$$

odakle je $\beta = 0$ i $\alpha = 0$, tj. a i b su linearno nezavisni.

Kako proveriti linearnu nezavisnost u $\mathbb{R}^3$? (2/2)

1. Da li su vektori $a = (1, 2, 3)$ i $b = (4, 5, 6)$ linearno nezavisni?
2. Da li su vektori $a = (1, 2, 3)$, $b = (4, 5, 6)$ i $c = (7, 8, 9)$ linearno nezavisni?

Rešenje.

2.

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 4\beta & + & 7\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & + & 5\beta & + & 8\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & + & 6\beta & + & 9\gamma & = & 0 \end{array}$$

Dakle, vektori a, b i c su linearno nezavisni ako je dobijeni homogeni sistem linearnih jednačina određen, tj. ako je $\det(S) \neq 0$ (jer je tada rešenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$). Gausovim postupkom dobijamo

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

tj. a, b i c su linearno zavisni.

Linearna nezavisnost u $\mathbb{R}^n$ i polinomima

1. U $\mathbb{R}^n$ vektori $a_1, \dots, a_m$ su linearno nezavisni ako iz $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = 0$ sledi $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, tj. ponovo rešavamo preko homogenog sistema linearnih jednačina, kao i u prethodnim slučajevima. (Isto to ćemo raditi i preko ranga matica - malo kasnije).
2. Da li su funkcije $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date sa $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ i $f_3(x) = x^2$, iz vektorskog prostora $(\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ linearno nezavisne?
   Rešenje. Funkcije su linearno nezavisne ako iz $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$, sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Date funkcije su zapravo polinomske funkcije nad beskonačnim poljem $\mathbb{R}$, pa iz $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$, možemo zaključiti da $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
3. Da li su vektori $a = 1$ i $b = i$ iz vektorskog prostora $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ linearno nezavisni?
   Rešenje. Kako iz $\alpha a + \beta b = 0$, tj. $\alpha + i\beta = 0$, sledi $\alpha = \beta = 0$, to su a i b linearno nezavisni.

Baza i dimenzija

Generatornost. Baza

Podsećanje: Kod lineala smo spominjali generatornost.

Definicija (Generatornost)

Za n-torku vektora $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ kažemo da generiše vektorski prostor V ako se svaki vektor iz V može predstaviti kao linearna kombinacija tih vektora, tj. ako je $L(a_1, a_2, \dots, a_n) = V$.

Definicija (Baza)

Za n-torku vektora $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ kažemo da je baza vektorskog prostora V ako je B linearno nezavisna i ako B generiše V.

Primer

- *U vektorskom prostoru slobodnih vektora jedna baza je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ i ona se zove* **strandardna (ortonormirana) baza**. *Baza je i $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{k})$.*
- *U $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$,* **standardna baza** *je $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$. Baza je i $\big((1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\big)$. Svaka 3 nekomplanarna vektora čine jednu bazu.*

Teorema (O maksimalnoj linearno nezavisnoj n-torki)

Svaka n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ jeste baza vektorskog prostora V akko je B maksimalna linearno nezavisna n-torka (tj. dodavanjem jednog vektora u B dobija se linearno zavisna $(n+1)$-torka).

Dokaz

$(\Rightarrow)$: *Ako je B baza i $x \in V$ proizvoljan vektor, tada iz generatornosti B sledi da postoje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ skalari takvi da je $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = x$, odakle je*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n - x = 0$$

tj. dobili smo linearno zavisnu $(n+1)$-torku, odakle je B maksimalna linearno nezavisna n-torka.

$(\Leftarrow)$: *Neka je B maksimalna linearno nezavisna n-torka i $x \in V$. Posmatrajmo*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha x = 0$$

Ako je $\alpha \neq 0$ onda se x može izraziti kao linearna kombinacija vektora iz B, pa imamo generatornost. Slučaj da iz gornje jednakosti sledi $\alpha = 0$ nije moguć: iz $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ i nezavisnosti B sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, odakle je $(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$ linearno nezavisna, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je B maksimalna linearno nezavisna.

Teorema (O minimalnoj n-torki generatora)

Svaka n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ jeste baza vektorskog prostora V akko je B minimalna n-torka generatora (tj. izbacivanjem jednog vektora iz B dobija se $(n-1)$-torka koja ne generiše V).

Dokaz

$(\Rightarrow)$: *Ako je B baza, tada iz linearne nezavisnoti sledi da ni jedan vektor iz B se ne može dobiti kao linearna kombinacija preostalih vektora iz B. Odnosno, izbacivanjem jednog vektora iz B gubi se generatornost.*

$(\Leftarrow)$: *Neka je B minimalna generatorna n-torka. Treba pokazati da je i linearno nezavisna. Posmatrajmo*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$$

Ako bi u gornjoj jednakosti postojao $\alpha_i \neq 0$, onda bi se a_i mogao izraziti kao linearna kombinacija vektora $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, odakle bi ova $(n-1)$-torka bila generatorna za V, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je B minimalna n-torka generatora.

Teorema (O jedinstvenoj reprezentaciji)

Svaka n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *jeste baza vektorskog prostora* V *akko za svaki vektor* $x \in B$ *postoje jedinstveni skalari* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ *takvi da je*

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$$

Dokaz

$(\Rightarrow)$: *Neka je* B *baza. Pretpostavimo da postoji* $x \in V$ *takav da je* $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ *i* $x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n$. *Oduzimanjem prethodne dve jednakosti dobijamo*

$$(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)a_n = 0$$

pa iz nezavisnosti B *sledi* $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$, *odnosno* $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$, *tj. dobijamo da* x *ima jedinstvenu reprezentaciju u bazi* B.

$(\Leftarrow)$: *Neka svaki* $x \in V$ *ima jedinstvenu reprezentaciju u* B. *Tada imamo da je* B *generatorna (svaki vektor iz* V *može se predstaviti preko* B*), pa još treba pokazati linearnu nezavisnost. Kako i* 0 *vektor ima jedinstvenu reprezentaciju, iz*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$$

sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, *tj.* B *je linearno nezavisna.*

Dimenzija vektorskog prostora (1/3)

Lema

Neka je $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-torka nenula vektora. Ako je A linearno zavisna tada među vektorima A postoji vektor koji je jednak linearnoj kombinaciji samo njemu prethodnih vektora.

Dokaz. Od vektora iz A formiramo sledeće linearno nezavisne l-torke vektore: 1 (a_1) je nezavisna jer je $a_1 \neq 0$; 2 (a_1, a_2) ako su a_1 i a_2 linearno nezavsni; $\ldots$; k-1 $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ ako su $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ linearno nezavisni, sve dok ne dobijemo linearno zavisnu k-torku $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$, što će se desiti najviše za $k = n$ jer je A linearno zavisna. Neka je sada $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ linearno nezavisna i $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ linearno zavisna. Tada iz

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + \alpha_k a_k = 0$$

sledi $\alpha_k \neq 0$, jer bi za $\alpha_k = 0$, iz linearne nezavisnosti $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ sledilo i $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{k-1} = 0$, pa bi $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ bila linearno nezavisna. Dakle, $\alpha_k \neq 0$, odakle dobijamo $a_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} a_2 + \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} a_{k-1}$.

Dimenzija vektorskog prostora (2/3)

Lema

Ako je $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ generatorna m-torka prostora V, tada je $(a_1, b_1, b_2, \dots, b_m)$ linearno zavisna $(m+1)$-torka.

Teorema

Ako je $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ linearno nezavisna n-torka, a $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ generatorna m-torka, tada je $n \leq m$.

Dokaz. Pošto je $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ generatorna, (iz prethodne leme) sledi da je $(a_1, b_1, b_2, \dots, b_m)$ linearno zavisna, pa (iz leme sa prethodnog slajda) sledi da postoji vektor iz $(m+1)$-toke koji je jednak linearnoj kombinaciji samo njemu prethodnih vektora. Pošto su vektori u A linearno nezavisni, sledi da je neki b_i jednak linearnoj kombinaciji njemu prethodnih vektora u $(a_1, b_1, b_2, \dots, b_m)$, pa ga možemo izbaciti iz $(m+1)$-torke, a da preostali vektori i dalje generišu V. Sada ponavljamo postupak, ubacimo a_2, pa izbacimo jedan b_j, itd, i tako sve dok: **slučaj** $n > m$ ubacimo a_{m+1} i dobijemo $(a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1})$ linearno zavisnu $(m+1)$-torku, što je nemoguće jer su vektori iz A linearno nezavisni. Zato je jedini mogući **slučaj** $n \leq m$.

Dimenzija vektorskog prostora (3/3)

Teorema

Ako su $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *i* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *dve baze vektorskog prostora* V, *tada je* $n = m$.

Dokaz

Pošto je baza vektora i linearno nezavisna i generatorna iz A *je linearno nezavisna, a* B *je generatorna sledi* $n \leq m$, *a iz* A *je generatorna, a* B *je linearno nezavisna sledi* $n \geq m$, *tj. imamo* $n = m$.

Definicija (Dimenzija vektorskog prostora)

Ako je $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *baza vektorskog prostora* V, *tada kažemo da je dimenzija prostora* V *jednaka* n *i pišemo* $\dim(V) = n$. *Specijalno, za* $(\{0\}, F, +, \cdot)$ *dimenzija je* 0, *a ako baza prostora* V *ima beskonačno mnogo elemenata pišemo* $\dim(V) = \infty$.

Primer

Za V *vektorski prostor slobodnih vektora imamo* $\dim(V) = 3$, *za* $\mathbb{R}^n$ *imamo* $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, *za vektorski prostor polinoma* $\mathbb{R}[x]$ *imamo* $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$, *jer je jedna baza* $(1, x, x^2, \ldots)$.

Nezavisnost, generatornost i dimenzija prostora

Posledica

- *Ako je* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *linearno nezavisna n-torka vektora prostora* V*, tada je* $n \leq \dim(V)$*;*
- *Ako je* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *generatorna n-torka vektora prostora* V*, tada je* $n \geq \dim(V)$*;*

Posledica

Neka je $\dim(V) = n$*.*

- *Ako je* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *linearno nezavisna n-torka vektora prostora* V*, tada je* A *baza.*
- *Ako je* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *generatorna n-torka vektora prostora* V*, tada je* A *baza.*

Posledica

Ako je W *potprostor vektorskog prostora* V *i ako su* W *i* V *iste dimenzije, tada je* $W = V$*.*

O koordinatama

Podsećanje: Ako je $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza vektorskog prostora V tada za svaki vektor $x \in B$ postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ takvi da je

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$$

Dakle, svaka baza određuje jedinstvene koordinate vektora.

Primer

U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ posmatramo vektor $x = (1, 2, 3)$.

- *U standardnoj (ortonormiranoj) bazi $E = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = (e_1, e_2, e_3)$ imamo*

$$x = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 = (1, 2, 3)_E$$

- *U bazi $B = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)) = (b_1, b_2, b_3)$ imamo*

$$x = b_1 + b_2 + b_3 = (1, 1, 1)_B$$

Zadatak

Zadatak

Neka je V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3$ generisan vektorima $a = (1,2,3)$, $b = (4,5,6)$ i $c = (7,8,9)$. Naći sve linearne zavisnosti vektora a, b, c, odrediti sve podskupove od (a, b, c) koji su baze prostora V i odrediti dimenziju prostora V.

Rešenje. Linearne zavisnosti tražimo iz $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. Odavde dobijamo sistem linearnih jednačina (koji smo već rešavali na jednom od prethodnih slajdova) koji je jednostruko neodređen, pri čemu je $\beta = -2\gamma$ i $\alpha = \gamma$. Odavde imamo da je $\gamma a - 2\gamma b + \gamma c = 0$, tj. $\gamma(a - 2b + c) = 0$, tačno za sve $\gamma \in \mathbb{R}$. Sledi da su sve linearne zavisnosti vektora a, b, c date jednačinom

$$a - 2b + c = 0$$

Ovu jednačinu možemo posmatrati kao sistem linearnih jednačina i zaključiti da je dvostruko neodređen, recimo $a = 2b - c$, odakle (pošto drugih zavisnosti vektora a, b, c nema) zaključujemo da je (b, c) jedna baza prostora V i da je $\dim(V) = 2$. Slično, baze su i (a, b) i (a, c).

Šta smo danas radili

- Linearna nezavisnost
- Baza vektorskog prostora
- Dimenzija vektorskog prostora