Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 23

Na prethodnom času

- Linearna nezavisnost
- Baza vektorskog prostora
- Dimenzija vektorskog prostora

Linearne transformacije

Linearna transformacija je homomorfizam

Definicija (Linearna transformacija)

Neka su V_1 *i* V_2 *vektorski prostori nad poljem* F. *Fukcija* $f : V_1 \to V_2$ *je linearna transformacija ili homomorfizam ako je za sve* $a, b \in V_1$ *i* $\alpha \in F$ *važi*

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad i \quad f(\alpha a) = \alpha f(a)$$

Lema

Ako u definiciji izaberemo $\alpha = 0$, *dobijamo da za svaku linearnu transformaciju važi* $f(0) = 0$, *tj.* f *slika nula-vektor u samog sebe.*

Napomena

- *Projekcije koje smo radili kod slobodnih vektora jesu linearne trasformacije, kod kompleksnih brojeva smo imali rotacije i osne simetrije, itd.*
- *Kad uvedemo i matrice daćemo puno konkretnih primera linearnih transformacija.*

Teorema

Sve linearne transfomacije iz $\mathbb{R}^3$ *u samog sebe imaju osobinu da očuvavaju paralelnost i homotetije čiji je centar u* $(0, 0, 0)$.

Linearne transformacije i linearne kombinacije

Teorema

Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F. Fukcija $f : V_1 \to V_2$ je linearna transformacija ili homomorfizam akko za sve $a, b \in V_1$ i $\alpha, \beta \in F$ važi

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$$

Dokaz

Iz definicije linearne transformacije imamo $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ i $f(\beta b) = \beta f(b)$, pa i $f(\alpha a + \beta b) = f(\alpha a) + f(\beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$.

Posledica

Za svaku linearnu transformaciju iz V_1 u V_2 nad poljem F važi

$$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_n f(a_n)$$

Linearne transformacije iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$

Podsećanje: Svaki vektor iz $a \in \mathbb{R}^2$ može se na jednistven način predstaviti preko standardne baze $E = ((1,0),(0,1))$, tj.

$$a = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$$

Teorema (Oblik linearne transfomacije)

Za svaku linearnu transfomaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *postoje realni brojevi* $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ *takvi da je*

$$f(x,y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$$

Dokaz

Ako je f *linearna transformacija i neka je* $f(1,0) = (a_{11}, a_{21})$ *i* $f(0,1) = (a_{12}, a_{22})$ *tada imamo*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) = x \cdot f(1,0) + y \cdot f(0,1) = x(a_{11}, a_{21}) + y(a_{12}, a_{22}) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y) \end{aligned}$$

Linearne transformacije iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$

Podsećanje: Svaki vektor iz $a \in \mathbb{R}^n$ može se na jednistven način predstaviti preko standardne baze $E = ((1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,1))$, tj.

$$a = (a_1,\ldots,a_n) = a_1(1,0,\ldots,0) + \ldots + a_n(0,\ldots,0,1)$$

Teorema (Oblik linearne transfomacije)

Svaka linearna transfomacija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ima oblik

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_n)$$

Napomena

Primeti da je i ovde linearna transformacija određena slikama standardne baze, tj. u poslednjoj teoremi je

$$f(1,0,\ldots,0) = (a_{11},\ldots,a_{m1}) \quad \ldots \quad f(0,\ldots,0,1) = (a_{1n},\ldots,a_{mn})$$

Osnovni stav linearne algebre

Teorema (Osnovni stav linearne algebre)

Neka je $f : V_1 \to V_2$ linearna transfomacija i neka je $A = (a_1, \ldots, a_n)$ proizvoljna baza vektorskog prostora V_1. Tada je f jedinstveno određena slikama baze A, tj. sa $f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n$, za bilo koje $b_1, \ldots, b_n \in V_2$.

Dokaz

- **Postoji:** *Kako je A baza vektorskog prostora V_1, za sve $x \in V_1$ imamo jednistvene $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ takve da je $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$. Sada definišemo funkciju $f : V_1 \to V_2$ sa*
$$f(x) = f(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$$
Proveriti da je $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, tj. da je f linearna transformacija.
- **Jednistvenost:** *Pretpostavimo da postoje dve linearne transformacije f i g za koje važi $f(a_i) = g(a_i) = b_i$. Tada za sve $x \in V_1$ važi $f(x) = \alpha_1 f(a_1) + \ldots + \alpha_n f(a_n) = \alpha_1 g(a_1) + \ldots + \alpha_n g(a_n) = g(x)$, tj. dobijamo $f = g$.*

Skup slika linearne tranformacije. Jezgro

Teorema (Skup slika i jezgro)

Neka je $f : V_1 \to V_2$ *linearna transformacija. Tada je skup slika linearne transformacije* $f(V_1) = \{f(x) \mid x \in V_1\}$ *vektorski potprostor prostora* V_2*, a skup vektora* $\ker(f) = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}$*, koji zovemo jezgro, je potprostor prostora* V_1*.*

Dokaz

Neka su $c, d \in f(V_1)$*. Treba pokazati da je* $\alpha c + \beta d \in f(V_1)$*. Iz* $c, d \in f(V_1)$ *sledi da postoje* $x, y \in V_1$ *takvi da je* $c = f(x)$ *i* $d = f(y)$*. Kako je* f *linearna transformacija i* V_1 *je vektorski prostor, sledi* $\alpha c + \beta d = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) \in f(V_1)$*. Slično se dokazuje da je* $\ker(f)$ *potprostor od* V_1*.*

Napomena

Iz (dokaza) osnovnog stava linearne algebre sledi da je $f(V_1)$ *generisan slikama bilo koje baze vektorskog prostora* V_1*. Međutim, primeti da slike baze ne moraju biti linearno nezavisne. Na primer, za linearnu transformaciju* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, datu sa* $f(x, y) = (0, 0)$*, slike baze* $(f(1,0) = (0,0)$ *i* $f(0,1) = (0,0))$ *su linearno zavisne.*

Izomorfizmi

Definicija (Izomorfizam)

Bijektivna linearna transformacija zove se izomorfizam.

Teorema

Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F, $A = (a_1, \dots, a_n)$ baza prostora V_1 i $f : V_1 \to V_2$ linearna transformacija. Tada je f izomorfizam akko je $B = (f(a_1), \dots, f(a_n))$ baza prostora V_2.

Dokaz

$(\Rightarrow)$: *Neka je f izomorfizam. Dokazujemo da je B baza prostora V_2.*

- **Linearno nezavisna:** *Iz $\alpha_1 f(a_1) + \dots + \alpha_n f(a_n) = 0$ sledi $f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n) = 0$, a kako je f injektivna iz $f(x) = 0$ sledi $x = 0$, tj. dobijamo $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$. Pošto je A baza V_1 sledi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, tj. B je linearno nezavisna.*
- **Generatorna:** *Iz sirjektivnosti f imamo da za sve $y \in V_2$ postoji $x \in V_1$ takav da je $f(x) = y$. Pošto je A baza prostora V_1 imamo da $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, odakle je $y = f(x) = f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 f(a_1) + \dots + \alpha_n f(a_n)$, pa B jeste generatorna za V_2.*

Nastavak dokaza. Posledice

$(\Leftarrow)$: Neka je $B = (f(a_1), \ldots, f(a_n))$ baza prostora V_2. Dokazujemo da je f bijekcija.

- **Injektivna:** Neka je $f(x) = f(y)$. Pošto je A baza V_1 to je $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ i $y = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n b_n$, pa iz $f(x) = f(y)$ sledi $\alpha_1 f(a_1) + \ldots + \alpha_n f(a_n) = \beta_1 f(a_1) + \ldots + \beta_n f(a_n)$, odnosno $(\alpha_1 - \beta_1)f(a_1) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)f(a_n) = 0$. Sada iz linearne nezavisnosti B dobijamo $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$, tj. $x = y$. Dakle, f je injektivna.
- **Sirjektivna:** Neka je $y \in V_2$. Kako je B generatorna, imamo da je $y = \alpha_1 f(a_1) + \ldots + \alpha_n f(a_n)$. Odavde dobijamo $y = f(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n)$, tj. za $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ je $y = f(x)$. Dakle, f je sirjektivna.

Posledica

Svaka dva vektorska prostora nad poljem F su izomorfna akko su istih dimenzija.

Posledica

Svi n-dimenzionalni vektorski prostori nad poljem F su izomorfni vektorskom prostoru $(F^n, F, +, \cdot)$.

Vektorski prostor linearnih transformacija

Definicija

Neka je $Hom(V_1, V_2)$ skup svih linearnih transformacija iz vektorskog prostora V_1 u V_2 nad poljem F. Definišemo operacije sabiranje linearnih transformacija $+$ i množenje linearne transformacije i skalara $\cdot$ sa, za sve $x \in V_1$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad i \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$$

Teorema

$(Hom(V_1, V_2), F, +, \cdot)$ *je vektorski prostor.*

Dokaz

Treba dokazati da važe sve aksiome vektorskih prostora.

- $(Hom(V_1, V_2), +)$ *je Abelova grupa:* **Zatvorenost:** *Neka su $f, g \in Hom(V_1, V_2)$. Tada je* $(f+g)(\alpha x+\beta y) = f(\alpha x+\beta y)+g(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)+\alpha g(x)+\beta g(y) = \alpha(f(x)+g(x))+\beta(f(y)+g(y)) = \alpha(f+g)(x)+\beta(f+g)(y)$, *odakle je* $f+g \in Hom(V_1, V_2)$. **Neutralni element** *je* $O(x) = 0$, **inverzni** *za f je $-f$.*
- *Ostale aksiome se slično dokazuju.*

Kompozicija linearnih transformacija

Napomena: Pisaćemo $Hom(V)$ umesto $Hom(V, V)$ za skup svih linearnih trasformacija vektorskog prostora V u samog sebe.

Teorema

$(Hom(V), F, +, \circ)$ je prsten.

Dokaz

U prethodnoj teoremi već imamo da je $(Hom(V), +)$ Abelova grupa. Treba još dokazati da za $f, g \in Hom(V)$ važi $f \circ g \in Hom(V)$ i da važi distributivnost (asocijativnost za $\circ$ znamo da važi).

- **Zatvorenost:** $(f \circ g)(\alpha x + \beta y) = f(g(\alpha x + \beta y)) = f(\alpha g(x) + \beta g(y)) = \alpha(f \circ g)(x) + \beta(f \circ g)(y)$, *tj.* $f \circ g \in Hom(V)$.
- **Distributivnost:** $(f \circ (g + h))(x) = f((g + h)(x)) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = (f \circ g + f \circ h)(x)$. *Na isti način se pokazuje desna distributivnost.*

Matrice

Definicija matrice

Definicija (Matrice)

Preslikavanje $A_{mn} : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to F$*, gde je* F *polje, zove se matrica formata* mn *nad poljem* F*. Koristimo i oznake*

$$A_{mn} = A_{m,n} = A_{m \times n} = [a_{ij}]_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kažemo da se element a_{ij} *u matrici nalazi u* i*-toj vrsti i* j*-toj koloni.*

Operacije sa matricama nad poljem F

- **Zbir dve matrice** istog formata $A_{mn} = [a_{ij}]_{mn}$ i $B_{mn} = [b_{ij}]_{mn}$ jeste matrica

$$A_{mn} + B_{mn} = [a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$

- **Proizvod matrice** $[a_{ij}]_{mn}$ **i skalara** $\lambda \in F$ jeste matrica

$$\lambda[a_{ij}]_{mn} = [\lambda a_{ij}]_{mn}$$

- **Proizvod dve matrice** $A_{mn} = [a_{ij}]_{mn}$ i $B_{nk} = [b_{ij}]_{nk}$ jeste matrica

$$C_{mk} = [c_{ij}]_{mk} = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}]_{mk}$$

Primeri

- Sabiranje: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$
- Množenje matrice i skalara: $\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$
- Množenje dve matrice:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

Napomena

Primeti skalarne proizvode vektora u proizvodu matrica.

Specijalni tipovi matrica

- Matrice kod kojih su svi elementi jednaki nuli iz polja zovu se **nula matrice**.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice A_{nn} sa istim brojem vrsta i kolona zovu se **kvadratne**.
- Kvadratna matrica kod koje su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1, a svi ostali 0 zove se **jedinična matrica**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Gde je veza sa linearnim transformacijama nad $\mathbb{R}$?

Podsećanje: Za svaku linearnu transfomaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ datu sa $f(1,0) = (a_{11}, a_{21})$ i $f(0,1) = (a_{12}, a_{22})$, tj. $f(x,y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$ imamo

$$f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1) = x\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Ako linearnoj transformaciji f pridružimo matricu

$$M_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tada za vektor $X = [x \quad y]^\top$ imamo

$$M_f \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Primeti: Ne samo da svakoj linearnoj tranfsormaciji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ odgovara tačno jedna matrica M_{22} nad poljem $\mathbb{R}$, nego važi i obrnuto, svakoj matrici M_{22} nad poljem $\mathbb{R}$ odgovara tačno jedna linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Važi i za linearne transformacije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

Podsećanje: Svaka linearna transfomacija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ima oblik

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{nm}x_n)$$

Primetimo da je $f(1, 0, \dots, 0) = (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, f(0, \dots, 0, 1) = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$.

Ako linearnoj tranformaciji f pridružimo matricu $M_f = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ tada za vektor $X = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^\top$ imamo

$$M_f \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{nm}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Primeti: Ponovo bijekcija između svih linearnih tranfsormacija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i svih matrica M_{mn} nad poljem $\mathbb{R}$.

Operacije sa lin. transf. i matricama - sabiranje

Sabiranje: Za linearne transformacije $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ date sa $f(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$ i $g(x, y) = (b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y)$ važi

$$(f+g)(x, y) = f(x, y)+g(x, y) = ((a_{11}+b_{11})x+(a_{12}+b_{12})y, (a_{21}+b_{21})x+(a_{22}+b_{22})y)$$

Za njima odgovarajuće matrice i sabiranje matrica imamo

$$M_f + M_g = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = M_{f+g}$$

Primeti: Svejedno je da li smo prvo za f i g napisali matrice pa ih sabrali, ili smo prvo sabrali f i g pa napisali matricu (homomorfizam).

Napomena: Isto ovako bismo pokazali da $M_f + M_g = M_{f+g}$ važi i za $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, samo bi sve matrice bile formata $m \times n$.

Operacije sa lin. transf. i matricama - množenje sa skalarom

Množenje skalarom: Za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ datu sa $f(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ važi

$$(\lambda f)(x, y) = \lambda f(x, y) = (\lambda a_{11}x + \lambda a_{12}y, \lambda a_{21}x + \lambda a_{22}y)$$

Za matricu M_f i skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\lambda M_f = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} = M_{\lambda f}$$

Primeti: I ovde imamo homomorfizam.

Napomena: Isto ovako bismo pokazali da $\lambda M_f = M_{\lambda f}$ važi i za $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, samo bi matrice bile formata $m \times n$.

Operacije sa lin. transf. i matricama - kompozicija i množenje

Kompozicija i množenje: Za linearne transformacije $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ date sa $f(x,y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$ i $g(x,y) = (b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y)$ važi

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x,y) &= f(g(x,y)) = f(b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y)\\ &= (a_{11}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{12}(b_{21}x + b_{22}y), a_{21}(b_{11}x + b_{12}y) + a_{22}(b_{21}x + b_{22}y))\\ &= ((a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y, (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y)\end{aligned}$$

Za njima odgovarajuće matrice i množenje matrica imamo

$$M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = M_{f \circ g}$$

Primeti: Ponovo homomorfizam.

Napomena: Isto ovako bismo pokazali da $M_f \cdot M_g = M_{f \circ g}$ važi i za $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, samo bi matrice bile: M_f formata $k \times m$, M_g formata $m \times n$, $M_{f \circ g}$ formata $k \times n$.

Još malo o množenju matrica

Posmatrajmo ponovo

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = C$$

samo ovog puta po

- **Kolonama:** vektori kolona matrice C su zapravo linearne kombinacije kolona matrice A, npr. vektor prve kolone matrice C je

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{bmatrix} = b_{11} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + b_{21} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

- **Vrstama:** vektori vrsta matrice C su zapravo linearne kombinacije vrsta matrice B, npr. vektor prve vrste matrice C je

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Linearne transformacije i matrice - izomorfno (tj. isto)

Oznaka: Neka je $\mathcal{M}_{mn}$ skup svih matrica nad poljem $\mathbb{R}$ formata $m \times n$.

Teorema

Vektorski prostori $(Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \mathbb{R}, +, \cdot)$ *i* $(\mathcal{M}_{mn}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *su izomorfni.*

Teorema

Prsteni sa jedinicom $(Hom(\mathbb{R}^n), +, \circ)$ *i* $(\mathcal{M}_{nn}, +, \cdot)$ *su izomorfni.*

Primeti: Ovo znači da je množenje matrica asocijativno, ali nije komutativno (kao kompozicija) i da je množenje distibutivno prema sabiranju matrica. Nula funkciji odgovara nula matrica - neutralni elementi u odnosu na dva sabiranja. Identičkoj funkciji odgovara jedinična matrica - neutralni elementi u odnosu na kompoziciju i množenje.

Napomena

Važe i opštija tvrđenja o izomorfizmima: umesto polja $\mathbb{R}$ *može se posmatrati bilo koje polje* F *- kasnije ćemo ponovo o ovome.*

Šta smo danas radili

- Linearne transformacije
- Osnovni stav linearne algebre
- Izomorfizmi
- Matrice
- Veza između matrica i linearnih tranformacija