Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 25

Na prethodnom času

- Primeri linearnih transformacija: rotacije, simetrije, projekcije
- Promena baze
- Matrice u drugim bazama
- Kanonički izomorfizam
- Matrice za sve linearne tranfsomacije

Rang

Baza i dimenzija vektorskog prostora slika linearne transformacije

Podsećanje:

- Ako je $A = (a_1, \ldots, a_n)$ baza prostora V_1, tada je linearna transformacija $f : V_1 \to V_2$ određena slikama vektora te baze - a te slike $B = (f(a_1), \ldots, f(a_n))$ zapravo čine vektore kolona odgovarajuće matrice M_f.
- Znamo da je skup slika $f(V_1)$ vektorski potprostor od V_2, i da je $f(V_1)$ generisan vektorima iz B.
- Dalje, znamo da je B linearno nezavisna akko je f injektivna - i tada je B baza vektorskog prostora $f(V_1)$.
- Dakle, ako je f injektivna tada je $\dim(V_1) = \dim(f(V_1))$, a ako f nije injektivna tada je $\dim(V_1) > \dim(f(V_1))$.

Pitanje: Za datu linearnu transformaciju f (tj. njenu matricu M_f) kako da nađem jednu bazu za $f(V_1)$ skup slika i kako da odredim dimenziju skupa slika?

Odgovor: Pomoću **ranga**. (Zapravo rang će nam dati i više od toga!)

Vektorski prostori vrsta i kolona matrice

Definicija (Vektorski prostori vrsta i kolona matrice)

Neka je matrica

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i neka su vektori
$r_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), r_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ *vektori vrsta (eng. rows) matrice A, a vektori*
$c_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), c_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, c_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ *vektori kolona (eng. columns) matrice A. Tada je* $R(A) = L(r_1, r_2, \dots, r_m)$ *vektorski prostor generisan vektorima vrsta matrice A, a* $C(A) = L(c_1, c_2, \dots, c_n)$ *vektorski prostor generisan vektorima kolona matrice A.*

Primeti: Ako je f linearna transformacija koja odgovara matrici A, tada je $C(A) = f(V_1)$.

Rang po vrstama i po kolonama

Definicija (Rang po vrstama i po kolonama)

Za datu matricu A *definišemo rang po vrstama sa* $\operatorname{rang}(R(A)) = \dim(R(A))$, *a rang po kolonama sa* $\operatorname{rang}(C(A)) = \dim(C(A))$.

Primeti: Ako je f linearna transformacija koja odgovara matrici A, tada je $\operatorname{rang}(C(A)) = \dim(f(V_1))$.

Primer

Za matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

imamo da je rang po vrstama $\operatorname{rang}(R(A)) = 2$ *jer su prve dve vrste linearno nezavisne, a treća je zbir prve dve, a takođe je rang po kolonama* $\operatorname{rang}(C(A)) = 2$ *jer su prve dve kolone linearno nezavisne, treća je* $c_3 = -c_1 + 2c_2$, *a četvrta* $c_4 = 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2$.

Ekvivalentne (elementarne) transformacije matrica

Pitanje: Prošli primer je bio jednostavan - kako za bilo koju matricu mogu da proverim rangove po vrstama i kolonama (i da li su uvek jednaki)?

Odgovor: Kao i mnogi drugi problemi iz linearne algebre - pomoću ekvivalentnih transformacija i Gausovog metoda eliminacije.

Definicija (Ekvivalentne transformacije matrica)

Ekvivalentne (elementarne) transformacije matrica su:

- *Zamena mesta dvema vrstama (kolonama).*
- *Množenje vrste (kolone) skalarom različitim od nule.*
- *Dodavanje vrste (kolone), prethodno pomnožene skalarom, drugoj vrsti (koloni).*

Transformacije po vrstama se zovu **vrsta-transformacije***, a transformacije po kolonama su* **kolona-transformacije***. Ako je matrica B dobijena od matrice A ekvivalentnim transformacijama tada pišemo $A \sim B$.*

Ekvivalentne transformacije matrica i rangovi

Teorema (Ekvivalentne transformacije matrica i rangovi)

Ekvivalentnim transformacijama matrice rangovi po vrstama i rangovi po kolonama se ne menjaju.

Dokaz

Dokaz dajemo samo za vrsta-transformacije matrice (dokaz za kolona-transformacije je potpuno analogan). Neka je matrica $A = [a_{ij}]_{mn}$ i neka je A' matrica dobijena od A pomoću jedne vrsta-transformacije.

- **Rang po vrstama:** *Posmatrajmo $R(A) = L(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ (podseti se - r_i su vrste matrice A). Pokazaćemo da vrsta-transformacije ne menjaju $R(A)$ i zato je* $\text{rang}(R(A)) = \text{rang}(R(A'))$.
    1. *Ako je A' dobijena od A zamenom mesta dvema vrstama - recimo prvim dvema- tada je $R(A) = L(r_1, r_2, \ldots, r_m) = L(r_2, r_1, \ldots, r_m) = R(A')$.*
    2. *Ako je A' dobijena od A množenjem jedne vrste - recimo druge - skalarom $\lambda \neq 0$ tada je $R(A) = L(r_1, r_2, \ldots, r_m) = L(r_1, \lambda r_2, \ldots, r_m) = R(A')$.*
    3. *Ako je A' dobijena od A dodavanjem jedne vrste pomnožene λ drugoj vrsti - recimo prvoj na drugu - tada je $R(A) = L(r_1, r_2, \ldots, r_m) = L(r_1, \lambda r_1 + r_2, \ldots, r_m) = R(A')$.*

(Nastavak dokaza.) **Rang po kolonama:** Posmatrajmo $C(A) = L(c_1, c_2, \dots, c_n)$ (podsećanje: c_i su kolone matrice A). Sada imamo situaciju da vrsta-transformacije menjaju $C(A)$, ali ćemo pokazati da ne menjaju linearne zavisnosti koje važe između vektora. Sve linearne zavisnosti između vektora $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ dobijamo iz vektorske jednačine $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n = 0$, koja za matricu $A = [a_{ij}]_{mn}$ ima oblik

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ tj. } \begin{array}{ccccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{1n}\alpha_n & = & 0 \\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{2n}\alpha_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{mn}\alpha_n & = & 0 \end{array}$$

Ako primenom jedne vrsta-transformacije na matricu A dobijamo matricu A' (npr. zamenimo mesta prvim dvema vrstama), tada od vektora kolona matrice A - $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, dobijamo neke nove vektore kolona matrice A' - $(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$. Međutim, tada je sistem linearnih jednačina koji daje sve linearne zavisnosti vektora $(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$ ekvivalentan sistemu linearnih jednačina koji daje sve linearne zavisnosti vektora $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, pa znamo da ta dva sistema imaju isti skup rešenja po $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Npr. za matričnu transformaciju zamena mesta dvema prvim vrstama, sistem linearnih zavisnosti od A' dobija se zamenom mesta prvim dvema jednačinama u sistemu zavisnosti od A. Dakle, možemo zaključiti da je $\dim(L(c_1, c_2, \dots, c_n)) = \dim(L(c'_1, c'_2, \dots, c'_n))$, odnosno $\operatorname{rang}(C(A)) = \operatorname{rang}(C(A'))$.

Gausov metod i rang matrice

Teorema (Gornja trougaona matrica i rang matrice)

Svaka matrica $B = [b_{ij}]_{mn}$ *se može ekvivalentnim transformacijama svesti na (gornju) trougaonu matricu* A, *tj. važi*

$$B \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & a_{3r+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = A$$

gde su pivoti $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0$. *Takođe važi* $\text{rang}(R(B)) = \text{rang}(R(A)) = r$ *i* $\text{rang}(C(B)) = \text{rang}(C(A)) = r$.

Dokaz teoreme

Ako je B nula-matrica tada su rangovi po vrstama i po kolonama jednaki 0, pa je dokaz gotov. Neka je $B \neq O$. Tada na B primenjujemo Gausov metod (koji je isti kao i za sisteme linearnih jednačina): ako je $b_{11} \neq 0$ eliminišemo sve ostale elemente iz prve kolone. Ako je $b_{11} = 0$ zamenom mesta vrstama i kolonama na poziciju 11 dovesti nenula element, pa onda uraditi eliminaciju preostalih elemenata iz prve kolone. Ponavljati postupak za podmatricu iz koje su izbačene dotle "obrađene" kolone i vrste. U trougaonoj matrici A sa prethodnog slajda možemo primetiti sledeće:

- **Po vrstama:** Prvih r vrsta su linearno nezavisne, a ostale su nula-vektori, a kako ekvivalentne transformacije ne menjaju rang po vrstama sledi $\mathrm{rang}(R(B)) = \mathrm{rang}(R(A)) = r$.
- **Po kolonama:** Prvih r kolona su linearno nezavisne, a kako je u svim kolonama samo prvih r koordinata različito od 0, to sve kolone mogu generisati prostor najviše dimenzije r. Dalje, kako ekvivalentne transformacije ne menjaju rang po kolonama sledi $\mathrm{rang}(C(B)) = \mathrm{rang}(C(A)) = r$.

Rang matrice i linearne transformacije

Primeti: Rang po vrstama (tj. dimenzija prostora generisanog vrstama matrice) jednak je rangu po kolonama (tj. dimenziji prostora generisanog kolonama matrice - što je zapravo dimenzija prostora slika odgovarajuće linearne transformacije).

Definicija (Rang matrice i linearne transformacije)

Za svaku matricu A, odnosno njoj odgovarajuću linearnu transformaciju f, definišemo rang sa $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(R(A)) = \mathrm{rang}(C(A))$.

Primer

Gausov metod eliminacije daje

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odakle je $\mathrm{rang}(A) = 2$. *Primeti da su prve dve vrste (kolone) linearno nezavisni vektori i da se treća kolona može dobiti kao linearna kombinacija prve dve kolone.*

Rang i determinanta

Teorema (Rang i determinanta)

Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada je $\det(A) \neq 0$ *akko je* $\operatorname{rang}(A) = n$.

Dokaz

$(\Rightarrow)$: *Neka je* $\det(A) \neq 0$. *Treba pokazati da su tada svi vektori vrsta* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *matrice A linearno nezavisni (jer je tada rang maksimalnih n). Pretpostavimo suprotno, da su vektori vrsta linearno zavisni. Tada znamo da jedan od vektora možemo izraziti kao linearna kombinacija samo njemu prethodnih vektora. Neka je* $r_k = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \ldots + \lambda_{k-1} r_{k-1}$. *Ali tada od* $\det(A)$ *primenom ekvivalentnih transformacija: na k-tu vrstu dodamo prvu pomnoženu sa* $-\lambda_1$, *drugu pomnoženu sa* $-\lambda_2$, ..., $(k-1)$. *vrstu pomnoženu sa* $-\lambda_{k-1}$, *dobijamo determinantu čija je k-ta vrsta 0-vektor, pa je* $\det(A) = 0$ *- kontradikcija.*

$(\Leftarrow)$: *Neka je* $\operatorname{rang}(A) = n$. *Pretopostavimo, suprotno tvrđenju teoreme, da je* $\det(A) = 0$. *Ako matricu A ekvivalentnim transformacijama svedemo na trougaoni oblik, dobijamo da je bar poslednja vrsta jednaka 0-vektoru (jer ako su svi pivoti nenula onda je* $\det(A) \neq 0$*). Pošto ekvivalentne transformacije očuvavaju rang, dobijamo* $\operatorname{rang}(A) < n$ *- kontradikcija.*

Sistemi linearnih jednačina i linearne transformacije

Svaki sistem linearnih jednačina može se zapisati u matričnom obiliku:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

odnosno $Ax = b$. Što znači da rešenja sistema predstavlja skup svih vektora koje linearna transformacija f, koja odgovara matrici A, preslikava u vektor b, ako takvi postoje.

Specijalno, za homogen sistem linearnih jednačina $Ax = 0$, skup rešenja sistema predstavlja skup svih vektora koje linearna transformacija f, koja odgovara matrici A, preslikava u 0-vektor - a ovo je zapravo jezgro (za koje smo pokazali da je vektorski prostor). Važi sledeće: za matricu A_{nn} i njenu linearnu transformaciju f, ako je $\text{rang}(A) = r$ tada je $\dim(\ker(f)) = n - r$.

Inverzna matrica

Inverzna linearna transformacija, tj. inverzna matrica

Podsećanje: Ako je $f : F^n \to F^m$ linearna transformacija, tj. M_{mn} njoj odgovarajuća matrica, tada je $\dim(V_1) \geq \dim(f(V_1)) = \mathrm{rang}(M)$. Dalje:

- ako je $n < m$, tada f ne može biti sirjektivna, a f je injektivna akko je $\mathrm{rang}(M) = n$;
- ako je $n > m$, tada f ne može biti injektivna, a f je sirjektivna akko je $\mathrm{rang}(M) = m$;
- ako je $n = m$, tada je f izomorfizam akko f bazu preslikava na bazu akko je $\mathrm{rang}(M) = n$ akko je $\det(M) \neq 0$.

Pitanje: Kako za $f : F^n \to F^n$ koja je izomorfizam izračunati inverznu f^{-1}?

Odgovor: Ako za f odgovara kvadratna matrica M, računaćemo inverznu matricu M^{-1} (koja odgovara linearnoj transformaciji f^{-1}).

Regularne i singularne matrice

Definicija (Inverzna matrica)

Za kvadratnu matricu A reda n, kvadratna matrica B, reda n, je inverzna ako je $AB = BA = I$, gde je I jedinična matrica reda n. Tada pišemo $B = A^{-1}$.

Definicija (Regularne i singularne matrice)

Ako za kvadratnu matricu A postoji inverzna, kažemo da je A regularna matrica. U suprotnom, za matricu A kažemo je singularna.

Napomena

Znamo da je $(Hom(F^n), \circ)$ monoid, a ako uzmemo samo izomorfizme dobijamo (nekomutativnu) grupu $(Izo(F^n), \circ)$ koja je izomorfna sa grupom $(\mathcal{M}'_{nn}, \cdot)$ svih regularnih matrica reda n, u odnosu na množenje matrica.

Računanje inverzne matrice preko adjungovane matrice

Podsećanje: Za $A = [a_{ij}]_{nn}$ kvadratnu matricu, minor M_{ij} elementa a_{ij} u matrici A je determinanta koja se dobija kada se iz $\det(A)$ izostavi i-ta vrsta i j-ta kolona. Kofaktor elementa a_{ij} u matrici A je $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Definicija (Adjungovana matrica)

Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]_{nn}$*, adjungovana matrica je* $\mathrm{adj}(A) = [A_{ij}]_{nn}^{\top}$.
(Adjungovana matrica se dobija tako što se svaki element u matrici zameni svojim kofaktorom i zatim se izvrši transponovanje.)

Teorema

Ako je A *regularna matrica, tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$$

Dokaz teoreme

Ako računamo $A \cdot \mathrm{adj}(A)$ imamo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix}$$

gde smo koristili Teoremu o razvoju determinante po i-toj vrsti (koloni) koja kaže da je $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ jednako sa $\det(A)$ za $i = k$, a jednako je 0 za $i \neq k$. Dakle, dobili smo $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot I$, odakle je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$$

Zadatak

Izračunaj inverznu matricu za $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\top} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Rešavanje određenih sistema linearnih jednačina matričnom metodom

Reši sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 2 \end{array}$ matričnom metodom.

Rešenje: Sistem možemo zapisati u matričnom obliku sa $Aw = b$, gde su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje dobijamo iz $w = A^{-1}b$ (A^{-1} smo izračunali na prethodnom slajdu), odnosno

$$w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Primeti: Množenje matrica nije komutativno i $A^{-1}b \neq bA^{-1}$.

Elementarne matrice

Računanje inverzne preko dopisane matrice - primer

Drugi (brži) način da se izračuna inverzna matrica je da se na matricu A dopiše jednična matrica I i da se na A i I istovremeno izvode vrsta-transformacije tako da se od matrice A dobije jedinična (što je moguće ako je A regularna) - tada će se dopisana jedinična matrica transformisati u A^{-1}. Na primer:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right]$$

Pitanje: Zašto se ovo desilo?

Ekvivalentne (elementarne) transformacije i elementarne matrice

Ekvivalentne (elementarne) vrsta-transformacije matrice su zapravo množenje matrice sleva **elementarnim matricama**:

1. Zamena mesta i-toj i j-toj vrsti - množenje matricom E_{ij} koja se dobija od jedinične I zamenom i-te i j-te vrste.
2. Množenje i-te vrste sa $\lambda \neq 0$ - množenje matricom $E_i(\lambda)$ koja se dobija od jedinične I tako što se i-ta vrsta pomnoži sa λ.
3. Dodavanje i-te vrste, prethodno pomnožene sa λ, j-toj vrsti - množenje matricom $E_{ij}(\lambda)$ koja se dobija od jedinične I dodavanje i-te vrste, prethodno pomnožene sa λ, j-toj vrsti.

Primer:

$$E_{12}(-3) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Napomena: Isto važi za kolona-transformacije i množenje zdesna elementarnim matricama $E'_{ij}, E'_i(\lambda), E'_{ij}(\lambda)$ u kojima se transformacije takođe rade po kolonama.

Inverzna preko dopisane matrice - dokaz

Sledi dokaz da je algoritam računanja inverzne matrice pomoću dopisane validan. Ako su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vrsta-transformacije koje regularnu matricu A transformišu u jediničnu i neka su $E^1, E^2, \ldots, E^n$ njima odgovarajuće elementarne matrice. Tada je

$$E^n \cdot \ldots \cdot E^2 \cdot E^1 \cdot A = I,$$

što znači da je

$$E^n \cdot \ldots \cdot E^2 \cdot E^1 = E^n \cdot \ldots \cdot E^2 \cdot E^1 \cdot I = A^{-1}.$$

Elemenatarne matrice, rang i jezgro

Elementarnim matricama možemo puno više: možemo odrediti skup slika i jezgro svake linearne transformacije. Na primer, ako je f linearna transformacija određena matricom

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

tada kolona-transformacijama možemo dobiti

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&2&3\\0&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&2&0\\0&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

Ako pomnožimo dve elementarne (po kolonama) matrice dobijamo

$$AE'=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&2&0\\0&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}=B$$

Nastavak priče sa prethodnog slajda

Šta nam sada o matrici A i njoj odgovarajućoj linearnoj transformaciji f govori

$$AE' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B?$$

- E' je proizvod elementarnih (po kolonama) matrica, pa je $A \sim B$. Dalje:
  - Pošto su prve dve kolone u B linearno nezavisne (i nismo menjali mesta kolonama) imamo da su i prve dve kolone matrice A linearno nezavisne, odakle ne samo da možemo zaključiti da je $\mathrm{rang}(A) = 2$, već i da je $f(V) = L((1,2,1),(2,1,1))$.
  - Znamo da je $\dim(\ker(f)) = 3 - \mathrm{rang}(f) = 1$, **međutim sada vidimo i koja kombinacija vektora kolona matrice A daje 0-vektor - piše u trećoj koloni matice E.** Odatle možemo zaključiti da je $\ker(f) = L((1,-2,1))$.

Primeti: Upravo smo pronašli sva rešenja homogenog sistema linearnih jednačina određenog sa $Aw = 0$ - gde piše?

Šta smo danas radili

- Rang po vrstama i rang po kolonama
- Ekvivalentne (elementarne) transformacije matrica
- Trougaoni oblik matrice i rang matrice
- Linearne transformacije u sistemima liearnih jednačina
- Inverzna matrica, regularne i singularne matrice
- Inverzna preko adjungovane matrice i preko dopisane matrice
- Elemenatarne matrice, rang i jezgro