Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 26

Na prethodnom času

- Rang po vrstama i rang po kolonama
- Ekvivalentne (elementarne) transformacije matrica
- Trougaoni oblik matrice i rang matrice
- Linearne transformacije u sistemima liearnih jednačina
- Inverzna matrica, regularne i singularne matrice
- Inverzna preko adjungovane matrice i preko dopisane matrice
- Elemenatarne matrice, rang i jezgro

Karakteristični koreni i vektori

Karakteristični koreni i vektori

Definicija (Karakteristični koreni i vektori)

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linearna tranformacija, a* A *njoj odgovarajuća kvadratna matrica. Kažemo da je nenula vektor* $w \in \mathbb{R}^n$ *karakterističan vektor linearne transformacije* f *ako ga* f *preslikava u njemu kolinearan vektor* λw*, tj. ako važi*

$$f(w) = \lambda w, \quad \text{ili u matričnom obliku} \quad Aw = \lambda w.$$

Ako je $Aw = \lambda w$*, tada se* λ *naziva karakteristični koren matrice* A *(odnosno, linearne transformacije* f*).*

Napomene:

1. Gore u definiciji w posmatramo i kao vektor i kao matricu kolonu (kao i do sada što smo radili).
2. Karakteristični koreni i vektori se još nazivaju i sopstveni koreni i vektori (eng. eigenvalues i eigenvectors).

Primeri (1/2)

- Skaliranje prostora $\mathbb{R}^2$, dato matricom $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

  Svi vektori su karakteristični, sa karakterističnim korenom $\lambda = 2$, jer je

$$Aw = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2w$$

- Osna simetrija u $\mathbb{R}^2$ oko prave $y = x$, data matricom $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

  Karakteristični vektori su oni koji su paralelni sa pravom $w = (x, x)$, sa karakterističnim korenom $\lambda_1 = 1$, i normalni na pravu $v = (x, -x)$, sa karakterističnim korenom $\lambda_2 = -1$.

- Rotacija za $\frac{\pi}{2}$ oko O u $\mathbb{R}^2$, data matricom $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

  Nema karakteristične vektore i korene (bar ne realne), jer se ni jedan vektor ne slika u sebi kolinearan.

Primeri (2/2)

Projekcija prostora $\mathbb{R}^3$ na xOy ravan, data matricom

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični vektori su svi koji su paralelni sa ravni, npr. $w_1 = (2, 1, 0)$ i $w_2 = (1, 1, 0)$, za koje je karakteristični koren $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ali i svi koji su normalni na ravan, npr. $w_3 = (0, 0, 2)$, za koje je karakteristični koren $\lambda_3 = 0$, jer je

$$Cw_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot w_3$$

Pitanje: A kako za prozvoljnu kvadratnu matricu reda n izračunati karakteristične vektore i korene?

Kako se računaju?

Problem: Karakteristični koreni i vektori za matricu A reda n su zadati sa $Aw = \lambda w$, što zapravo predstavlja sistem linearnih jednačina $n \times n$. Međutim, ovde imamo nepoznate sve koordinate vektora w i λ, što je ukupno $n + 1$ nepoznatih!
Rešenje: Ako je I jedinična matrica formata n, imamo da važi

$$Aw = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad Aw = \lambda I w \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)w = 0$$

Pošto $(A - \lambda I)w = 0$ predstavlja homogen sistem linearnih jednačina, a mi tražimo rešenje za koje važi $w \neq 0$ (jer su karakteristični vektori po definiciji nenula vektori), to sledi da sistem mora biti neodređen, što je ekvivalentno sa time da je determinanta sistema jednaka nuli, tj. mora važiti

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Sada iz posledenje jednakosti izračunavamo vrednosti krakterističnih korena, a zatim za svaki posebno, zamenom u $Aw = \lambda w$, izračunavamo odgovarajuće karakteristične korene.

Krakteristični polinom matrice

Definicija (Krakteristični polinom matrice)

Za matricu A krakteristični polinom je dat sa $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Primeti:

- Koreni karakterističnog polinoma matrice A su karakteristični koreni matrice A.
- Ako je A kvadratna matrica reda n, tada je polinom f_A stepena n sa realnim koeficijentima - pa ima tačno n kompleksnih korena (neki mogu biti realni, konjugovano-kompleksni koreni idu u paru), od kojih neki mogu biti i višestruki.

Primeri (1/3)

Izračunaj karakteristične korene i njima odgovarajuće karakteristične vektore za matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje.

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2-1$$

Karakteristične korene dobijamo iz $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, pa imamo $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. Za ove korene računamo odgovarajuće karakteristične vektore w_1 i w_2:

$$Aw_1 = 0 \cdot w_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w_1 = \{x(1,1) \,|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

$$Aw_2 = 2w_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w_2 = \{x(1,-1) \,|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

Primeri (2/3)

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(B - \lambda I) = \lambda^2 + 1$$

Karakteristični koreni su $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$. Za ove korene računamo odgovarajuće karakteristične vektore w_1 i w_2:

$$Bw_1 = i \cdot w_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix \\ iy \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w_1 = \{y(i, 1) \mid y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\}$$

$$Bw_2 = -iw_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ix \\ -iy \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w_2 = \{y(-i, 1) \mid y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\}$$

Napomena: B je rotaciona matrica za ugao $\frac{\pi}{2}$ - koju smo dobili od kompleksne funkcije $f(z) = ze^{\frac{\pi}{2} i} = zi$.

Primeri (3/3)

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(B - \lambda I) = (2-\lambda)^2$$

Karakteristični koreni su $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Za ove korene računamo odgovarajući karakteristični vektor w_1:

$$Cw_1 = 2 \cdot w_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w_1 = \{x(1,0) \,|\, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\}$$

Napomena: Samo jedan linearno nezavisan karakteristični vektor!

Domaći: Matrica D.

Trag matrice. Osobine karakterističnih korena

Definicija (Trag matrice)

Za matricu $A = [a_{ij}]_{nn}$ *trag matrice, u oznaci* $\operatorname{trace}(A)$ *je zbir elemenata na glavoj dijagonali, tj.* $\operatorname{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Primeti da za kvadratne matrice reda 2 imamo

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ako su λ_1 i λ_2 karakteristični koreni matrice A, osnovu Vijetovih formula sledi

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{trace}(A) \quad \text{i} \quad \lambda_1\lambda_2 = \det(A)$$

Ovo važi sa sve kvadratne matrice proizvoljnog reda: zbir svih karakterističnih korena je jednak tragu matrice, a proizvod je jednak determinanti matrice.

Dijagonalizacija i stepenovanje matrica (1/2)

Neka je $A = [a_{ij}]_{nn}$, neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ njeni karakteristični koreni i $w_1, w_2, \dots, w_n$ njima odgovarajući vektori. Neka je S matrica čiji su vektori kolona karakteristični vektori $w_1, w_2, \dots, w_n$. Tada imamo

$$AS = A\left[\begin{array}{c|c|c|c} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 w_1 & \lambda_2 w_2 & \dots & \lambda_n w_n \end{array}\right]$$

Sa druge strane imamo

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 w_1 & \lambda_2 w_2 & \dots & \lambda_n w_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ako sa Λ označimo dijagonalnu matricu gore koja na glavnoj dijagonali ima karakteristične korene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tada dobijamo matričnu jednakost $AS = S\Lambda$.

Dijagonalizacija i stepenovanje matrica (2/2)

Ako su karakteristični vektori $w_1, w_2, \ldots, w_n$ **matrice** A **linearno nezavisni**, tada za matricu S postoji inverzna S^{-1}, pa iz $AS = S\Lambda$, množenjem sa S^{-1} sa desne strane dobijamo faktorizaciju matrice

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

Ako sada računamo stepene matrice A dobijamo

$$A^2 = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}, \ldots, A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

Ovo je važno jer množenje proizvoljnih matrica može da zahteva puno resursa, dok kod množenja dijagonalnih matrica samo pomnožimo odgovarajuće elemente sa dijagonale!

Primer

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *smo izračunali* $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Za domaći pokušajte sami izračunati* A^{50}, *a mi iz dijagonalizacije imamo*

$$A^{50} = S\Lambda^{50} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Kejli-Hamiltonova teorema

Podsećanje: Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]_{nn}$ karakteristični polinom je dat sa $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Ako je $f_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$, tada za matricu $C = [c_{ij}]_{nn}$ definišemo $f_A(C) = C^n + b_{n-1}C^{n-1} + \ldots + b_1 C + b_0 I$, gde je I jedinična matrica reda n.

Teorema (Kejli-Hamiltonova)

Svaka kvadratna matrica A zadovoljava svoj karakteristični polinom, tj. $f_A(A) = 0$.

Primer

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *smo izračunali* $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda$. *Sada možemo proveriti da je* $f_A(A) = 0$:

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Šta smo danas radili

- Karakteristični koreni i vektori matrice
- Primeri
- Karakteristični polinom matrice
- Osobine karakterističnih korena
- Dijagonalizacija matrice - prelazak na bazu karakterističnih vektora
- Kejli-Hamiltonova teorema